Beweise zum Artikel direkte Summen abelscher Gruppen

Andreas Bartholomé
84028 Landshut
Schirmgasse 275

Zuletzt bearbeitet am 29. April 2017

1 Zur direkte Summen abelscher Gruppen

Satz 1.1. *Es seien B, C Untergruppen der abelschen Gruppe A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $A = B \oplus C$.
2. *Jedes $a \in A$ lässt sich eindeutig schreiben $a = b + c$ mit $b \in B$ und $c \in C$.*
3. *Es ist $A = B + C$ und die 0 lässt sich eindeutig schreiben $0 = b + c$ mit $b \in B$ und $c \in C$.*

1. $\Longrightarrow$2.: Sei $A = B \oplus C$ und $a = b + c = b' + c'$ mit $b, b' \in B$ und $c, c' \in C$. Dann ist $0 = (b - b') + (c - c')$. Daher ist $c - c' = b' - b \in B \cap C = 0$. Daher ist $c - c' = b' - b = 0$ Daher ist $b = b'$ und $c = c'$.
2. $\Longrightarrow$3.: Ist $a \in A$, so gibt es eindeutig bestimmte $b \in B$ und $c \in C$ mit $a = b + c$. Daher ist $A = B + C$. Alle Elemente lassen sich eindeutig als Summe von Elementen aus B und C schreiben. Daher ist insbesondere die Summendarstellung der 0 eindeutig.
3. $\Longrightarrow$1.: Es ist $A = B + C$ nach Voraussetzung. Sei $b \in B \cap C$. Dann ist $-b \in C$. Es folgt $0 = b + (-b) = 0 + 0$ Wegen der Eindeutigkeit folgt $0 = b = (-b)$. Also ist auch $B \cap C = 0$. $\square$

Satz 1.2. *Für $B, C \hookrightarrow A$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $A = B \oplus C$.
2. *Es gibt zwei Endomorphismen $\pi_B, \pi_C \colon A \to A$ mit $\pi_B(A) = B, \pi_C(A) = C, \pi_B^2 = \pi_B \pi_C^2 = \pi_C$ und $\pi_B + \pi_C = 1_A$.*

1. $\Longrightarrow$2.: Wir betrachten die Abbildungen $\pi_B \colon A = B \oplus C \ni b + c \mapsto b \in A$ und $\pi_C \colon A = B \oplus C \ni b + c \mapsto c \in A$. Diese beiden Homoorphismen erfüllen das Gewünschte.
2. $\Longrightarrow$1.:Sie $a \in A$. Dann ist $a = \pi_B(a) + \pi_C(a) \in B + C$. Ist $a \in B \cap C$, so ist $\pi_B(a) = a = \pi_C(a)$. Daher ist $a = \pi_B^2(a) = \pi_B \circ \pi_C(a) = 0$. $\square$

Homomorphismen liefern eine Möglichkeit direkte Summanden zu kennzeichnen und zu erkennen,

Satz 1.3. *$f : A \to B$, und $g : B \to C$ Homomorphismen.*

1. *gf ein Monomorphismus $\iff$ $Bi(f) \cap \mathrm{Ke}(g) = 0$ und f ist ein Monomorphismus.*
2. *gf ein Epimorphismus , dann ist $\mathrm{Bi}(f) + \mathrm{Ke}(g) = B$.*
3. *gf ein Isomorphismus, dann ist $\mathrm{Bi}(f) \oplus \mathrm{Ke}(g) = B$.*

Zu 1.: Sei gf ein Monomorphismus und $y \in Bi(f) \cap Ke(g)$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Also ist $g(f(x)) = 0$. Damit ist $x = 0$ und so auch $y = f(x) = 0$.
Zu 2.: Sei $b \in B$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $gf(a) = g(b)$. Also ist $f(a) - b \in Ke(g)$. Und also $f(a) = b + k$ mit $k \in Ke(g)$. Und daher $b = f(a) + (-k)$.
Zu 3.: Ist gf ein Isomorphismus, so ist gf ein Epimorphismus. Daher ist $b = Bi(f) + Ke(g)$. Da andererseits gf auch ein Monomorphismus ist, ist $Bi(f) \cap Ke(g) = 0$. Das bedeutet $B = Bi(f) \oplus Ke(g)$. □

Satz 1.4. *Sie $0 \neq \vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$. Für $\vec{a}\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^2$ sind äquivalent:*

1. *$\vec{a}\mathbb{Z}$ ist direkter Summand in $\mathbb{Z}^2$.*
2. *Es gibt b_1, b_2 mit $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$.*

1. $\implies$ 2.: Sei $\vec{a} = (a_1, a_2) \neq 0$ und $\vec{a}\mathbb{Z}$ direkter Summand in $\mathbb{Z}^2$. Dann gibt es $U \hookrightarrow \mathbb{Z}^2$ mit $\vec{a}\mathbb{Z} \oplus U = \mathbb{Z}^2$. Sei $p\colon \mathbb{Z}^2 \to \vec{a}\mathbb{Z}$ die Projektion auf $\vec{a}\mathbb{Z}$. Also ist $p(\vec{a}) = \vec{a}$. Es ist $\alpha\colon \vec{a}\mathbb{Z} \ni \vec{a}z \mapsto z \in \mathbb{Z}$ ein wohldefinierter Isomorphismus. Es ist $1 = \alpha(p(\vec{a})) = \alpha(p(\vec{e_1})a_1 + p(\vec{e_2})a_2)$ Da α, p Homomorphismen sind, ist $1 = \alpha(p(\vec{e_1}))a_1 + \alpha(p(\vec{e_2}))a_2$. Wählen wir $b_1 = \alpha(p(\vec{e_1}))$ und $b_2 = \alpha(p(\vec{e_2}))$, so erhalten wir: $1 = b_1a_1 + b_2a_2$.
2. $\implies$1.: Es gebe b_1, b_2 mit $b_1a_1 + b_2a_2 = 1$. Wir haben den Homomorphismus $f\colon \mathbb{Z}^2 \ni (x, y) \mapsto b_1x + b_2y \in \mathbb{Z}$. Es ist $f(\vec{a}) = 1$. Außerdem ist $\alpha\colon \mathbb{Z} \ni z \mapsto \vec{a}z \in \mathbb{Z}^2$ ein Homomorphismus. Es ist $f \circ \alpha(1) = b_1a_1 + b_2a_2 = 1$. Daher ist $f \circ \alpha = 1_{\mathbb{Z}}$. Es folgt $\mathbb{Z}^2 = \mathrm{Ke}(f) \oplus \mathrm{Bi}(\alpha) = \mathrm{Ke}(f) \oplus \vec{a}\mathbb{Z}$. Daher ist $\vec{a}\mathbb{Z}$ direkter Summand in $\mathbb{Z}$.

Satz 1.5. *Sei $\vec{a} \in \mathbb{Z}^2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\vec{a}\mathbb{Z}$ ist direkter Summand in $\mathbb{Z}^2$.*

2. *Es gibt ein $\vec{c} = (c_1, c_2)$, so dass $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1$ glt. Dabei ist $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ die von den beiden Vektoren bestimmte Determinante.*

1. $\Longrightarrow$2.: Es gibt nach dem Satz vorher ein $\vec{b} = (b_1, b_2)$ mit $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$. Dann ist $\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ a_2 & b_1 \end{vmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 = 1$. Wähle wir $c_1 = -b_2$ und $c_2 = b_1$, so folgt de Behauptung.
2. $\Longrightarrow$1.: Es gibt (c_1, c_2) mit $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2 = 1$. Wählt man $b_1 = c_2$ und $b_1 = -c_1$, so folgt die Behauptung. $\square$

Die Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ gibt den orientierten Flächeninhalt, des von $\vec{a}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms an. Also ist $\vec{a}\mathbb{Z}$ direkter Summand in $\mathbb{Z}^2$, wenn es ein $\vec{c}$ gibt, so dass $\vec{a}, \vec{c}$ ein Paralellogramm der Fläche 1 aufspannen Beispiele:

1. Ist B direkter Summand in A und $A = B \oplus C$, so heißt C Komplement von B. Dieses Komplement ist normalerweise nicht eindeutig bestimmt. Sei zum Beispiel $A = \mathbb{Z}^2 = (1,0)\mathbb{Z} \oplus (0,1)\mathbb{Z} = (1,0)\mathbb{Z} \oplus (1,1)\mathbb{Z} = (1,0) \oplus (z,1)\mathbb{Z}$ für beliebiges $z \in \mathbb{Z}$.

   Ist $(x, 0) = (z, 1)y \in (1,0)\mathbb{Z} \cap (z,1)\mathbb{Z}$, so ist $y = 0$ und daher auch x. Also sind die beiden Untergruppen disjunkt. Weiter ist $(1,0) = (1,0)\mathbb{Z} \oplus (z,1)\mathbb{Z}$. Und es ist $(0,1) = (-z,0) + (z,1) \cdot \mathbb{Z}$. Daher ist auch die Summenbedingung erfüllt. $\square$

Satz 1.6. *Es gebe ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A \cdot n = 0$. Ist $n = r \cdot s$ mit teilerfremden r, s, so ist $A = As \oplus Ar$.*

Es gibt $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $sx + ry = 1$. Ist $a \in A$, so ist $a \cdot 1 = (a \cdot x)) \cdot s + (a \cdot y) \cdot r \in A \cdot s + A \cdot r$. Ist $a \in A \cdot s \cap A \cdot r$, so gibt es $a', a'' \in A$ mit $a = a's = a''r$. Daher ist

$$(a \cdot x) \cdot s = ((a'' \cdot r) \cdot s) \cdot x = a'' \cdot n \cdot x = 0$$
$$(a \cdot y) \cdot r = ((a' \cdot s) \cdot r) \cdot y = a' \cdot n \cdot y = 0$$

Also ist $a = 0$. Damit ist der Durchschnitt 0. $\square$

Diese Aussage kann verebessert werden. Dazu eine Definition:

Definition 1. Sei p eine Primzahl. Die Gruppe A heißt p-primär genau dann, wenn es zu jedem $a \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a \cdot p^n = 0$.

Die Summe aller p-primären Untergruppen einer Gruppe A ist p-primär. Es ist die größte p-primäre Untergruppe von A. Sie wird mit A_p bezeichnet und heißt p-Primärkomponente von A.

Satz 1.7. *Ist A eine Torsionsgruppe, so ist $A = \bigoplus_{p \text{ prim}} A_p$. Es ist A direkte Summe seiner Primärkomponenten.*

Sei $a \in A$. Es gibt ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$, so dass $a \cdot n = 0$. Dieses n habe die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$. Es ist $a \in A_{p_1} + \cdots + A_{p_k}$.
Dies beweise ich durch Induktion nach der Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n. Die Behauptung ist klar für $k = 1$. Gelte sie für k. Sei nun $n = (p_1^{r_1} \cdots p_k^{rk}) \cdot p_{k+1}^{r_{r+1}}$. Es sind $p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ und $p_{k+1}^{r_{k+1}}$ teilerfremd. Daher gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$
\begin{aligned}
1 &= p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} x + p_{k+1}^{r_{k+1}} y \\
a &= a \cdot p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} x + a \cdot p_{k+1}^{r_{k+1}} y
\end{aligned}
$$

Der erste Summand ist in $A_{p_{k+1}}$ und der zweite Summand nach Induktionsvoraussetzung in $A_{p_1} + \ldots A_{p_k}$. Also ist $a \in A_{p_1} + \cdots + A_{p_{k+1}}$. Mit Induktion folgt: $A = \sum_{p \text{ prim}} A_p$.
Zu zeigen bleibt, dass die Summe direkt ist. Sei dazu $a \in A_p \cap (A_{p_1} + \cdots + A_{p_n})$ mit $p \neq p_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es ist dann $a = a_1 + \cdots + a_n$ mit $a \in A_p$ und $a_i \in A_i$. Es gibt zu jedem i ein $r_i \in \mathbb{N}$ mit $a_i \cdot p_i^{r_i} = 0$. Sei $m = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$. Außerdem gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot p^{r_n} = 0$. Da m und p^r teilerfremd sind, gibt es $x, y \in \mathbb{N}$ mit

$$
\begin{aligned}
1 &= p^r \cdot x + m \cdot y \\
a &= a \cdot p^r \cdot x + a \cdot m \cdot y
\end{aligned}
$$

Beide Summanden sind 0. Also ist $a = 0$. □

1.1 Universelle Eigenschaft

Satz 1.8. *Sei $A = A_1 + A_2$ für zwei Untergruppen A_1, A_2 und $q_i \colon A_i \hookrightarrow A$ die kanonischen Inklusionen. Es sind äquivalent:*

1. *$A = A_1 \oplus A_2$.*
2. *Zu je zwei Homomorphismen $f_i \colon A_i \to B, i \in \{1, 2\}$ gibt es genau einen Homomorphismus $f \colon A \to B$ mit $\circ q_i = f_i, i \in \{1, 2\}$*

1. $\Longrightarrow$2.: Sind $A_1 \overset{f_1}{\to} B$ und $A_2 \overset{f_2}{\to} B$ zwei Homomorphismen, so definieren wir: $S(f)\colon A \ni a = a_1 + a_2 \mapsto f_1(a_1) + f_2(a_2) \in B$. Diese Definition is eindeutig und f st ein Homomorphismus. Es ist $fq_1 = fq_2$ und bezüglich dieser Eigenschafzt ist f auch eindeutig.
2. $\Longrightarrow$1.: Sei $a \in A_1 \cap A_2$. Wir betrachten die beiden Funktionen $f_1\colon A_1 \ni x \mapsto x \in A$ und $f_2\colon A_2 \ni x \mapsto 0 \in A$. Es gibt genau eine Funktion $A \overset{f}{\to} A$ mit $f \circ q_1 = f_1$ und $f \circ q_2 = f_2$. Da $a \in A_1 \cap A_2$ ist gilt $f(a) = fq_1(a) = f_1(a) = a$. Und da $a \in A_2$ ist gilt: $f(a) = fq_2(a) = f_2(a) = 0$. Also ist $a = 0$. Daher olgt die Behauptung. □

Dieser Satz gilt auch für beliebige Indexmengen.

Satz 1.9. *Sei $(A_i|i \in I)$ eine Familie von Untergruppen mit $\sum\limits_{i\in I} A_i = A$. Und $q_i : A_i \hookrightarrow A$ seien die Inklusionen. Dann sind äquivalent:*

1. *Es ist $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i = A$.*

2. *Zu jeder Familie von Homomorphismen $f_i\colon A_i \to B$ gibt es genau ein $f\colon A \to B$ mit $f \circ q_i = f_i$. Das heißt folgendes Diagramm ist für alle $i \in I$ kommutativ.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "f!"] & \\
A_i \arrow[u, "q_i"] \arrow[r, "f_i"'] & B
\end{tikzcd}$$

Eine vielleicht bessere Veranschaulichung der Situation ist folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[dd, dotted, "f!"] & & & \\
\cdots & A_i \arrow[urr, "q_i"] \arrow[drr, "f_i"'] & A_j \arrow[ur] \arrow[dr] & & A_k \arrow[ul] \arrow[dl] & A_l \arrow[ull, "q_l"'] \arrow[dll, "f_l"] & \cdots \\
 & & & B & & &
\end{tikzcd}$$

1. $\Longrightarrow$2.: Genau wie im Satz vorher.
2. $\Longrightarrow$1.: Sei $a_i = \sum_{j\neq i} a_j$ mit $a_j \in A_j$. Wir betrachten die Familie der Homomorphismen $f_j(a) = \begin{cases} 0 \text{ falls } a \in A_j \\ a \text{ falls } a \in A_i \end{cases}$ Zu dieser Familie gibt es genau ein $f\colon A \to B$ mit $f \circ q_j = f_j$ für alle $j \in I$. Dann ist $f(a_i) = f(\sum_{j\neq i} a_j)$. Wir erhalten: $a_i = f(q_i(a_i)) = \sum_{j\neq i} f(a_j) = \sum_{i\neq j} fq_j(a_j) = \sum_{j\neq i} f_j(a_j) = 0$ □

Satz 1.10. *Seien (A, q_i) und (S, s_i) zwei abelsche Gruppen mit $q_i\colon A_i \to A$ und $s_i\colon A_i \to S$. Gibt es zu jeder Familie $f\colon A_i \to B$ genau ein $f\colon A \to B$ mit $f_i = fq_i$ und genau ein $g\colon S \to B$ mit $gs_i = f_i$, so sind A und S isomorph.*

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[dd, dotted, shift left, "f!"] & & & \\
\dots & A_i \arrow[urr, "q_i"] \arrow[drr, "s_i"'] & A_j \arrow[ur] \arrow[dr] & & A_k \arrow[ul] \arrow[dl] & A_l \arrow[ull, "q_l"'] \arrow[dll, "s_l"] & \dots \\
 & & & S \arrow[uu, dotted, shift left, "g!"] & & &
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung über A gibt es zu der Familie $s_i\colon A_i \to S$ genau ein $f\colon A \to S$ mit $fq_i = s_i$ für alle $i \in I$. Genauso gibt es genau ein $g\colon S \to A$ mit $gs_i = q_i$. Daher ist $fq_i = fgs_i = 1_S s_i$ für alle $i \in I$. Daher ist $1_S = fg$. Es ist auch $gs_i = gfq_i = 1_A q_i$ für alle $i \in I$. Daher ist $1_A = gf$. Es folgt die Behauptung. □

Es fragt sich ob es zu jeder Familie $(A_i|i \in I)$ von Gruppen eine solche Gruppe A und solche Homomorphismen $q_i\colon A_i \to A$ gibt. Setzen wir das Auswahlaxiom voraus, so ist die Antwort: Ja!

1.1.1 Produkte und Koprodukte

Definition 2. Sei $(A_i|i \in I)$ eine Familie von Gruppen.

$$\prod_{i\in I} A_i = \{\alpha|\alpha\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ und } \alpha(i) \in A_i\}$$

sei das mengentheoretische direkte Produkt der Mengen $(A_i|i \in I)$.

Für $\alpha \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ wählen wir die etwas eingängigere Schreibweise $(\alpha(i)|i \in I) = (\alpha(i))$. Im Falle $I = \mathbb{N}$ entspricht dies der Schreibweise für Folgen $(\alpha(n))$. Wie bei Folgen schreiben wir $(\alpha(i)) = (a_i)$. Dabei ist $\alpha(i) = a_i \in A_i$. Es ist (a_i) eine andere Darstellung der Funktion $\alpha\colon I \to \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ mit $\alpha(i) = a_i \in A_i$. Ist I die endliche Menge $I_n = \{0, \dots, n-1\}$, so entspricht jedem $\alpha\colon I \to \prod A_i$ ein n-Tupel $\alpha = (a_0, \dots, a_{n-1})$. Die Funktion α wird mit ihrer Wertetabelle identifiziert.
$\prod\limits_{i\in I} A_i$ wird zu einer Gruppe aus $\mathcal{A}$ indem man definiert $(\alpha+\beta)(i)\colon = \alpha(i)+\beta(i)$. Es ist $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$. Die Gruppenoperationen ist komponentenweise

definiert. Die Abbildungen

$$\pi_k \colon \prod_{i \in I} A_i \ni \alpha \mapsto \alpha(k) \in A_k,$$

heißen Projektionen. π_k ordnet jedem (a_i) die k-te Komponente zu.

Satz 1.11. *Es sei $(f_i | i \in I)$ eine Familie von Homomorphismen $f_i \in Hom(X, A_i)$. Dann ist die Abbildung:*

$$f \colon X \ni x \mapsto (f_i(x)) \in \prod_{i \in I} A_i$$

der einzige Homomorphismus, so dass für alle $i \in I$ gilt: $\pi_i \circ f = f_i$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \arrow[dll, "f_i"'] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr, "f_l"] \arrow[dd, dashed, "f!"] & & & \\
\dots & A_i & A_j & & A_k & A_l & \dots \\
 & & & \prod_{i \in I} A_i \arrow[ull, "\pi_i"] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urr, "\pi_l"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung f ist ein Homomorphismus. Denn $f(x + x') = (f_i(x + x')) = (f_i(x) + f_i(x')) = (f_i(x)) + (f_i(x')) = f(x) + f(x')$. Also ist f ein Homomorphismus abelscher Gruppen. Für $r \in R$ ist $f(x \cdot r) = (f_i(x \cdot r)) = (f_i(x) \cdot r) = (f_i(x)) \cdot r = f(x) \cdot r$. Also ist f ein Homomorphismus. Weiter ist nach Definition $(\pi_i \circ f)(x) = \pi_i((f_i(x))) = f_i(x)$ für alle $x \in X$. Daher ist $\pi_i \circ f = f_i$. Sei $g \colon X \to \prod_{i \in I} A_i$ ein weiterer solcher Homomorphismus. Dann ist für alle $x \in X$ und alle $i \in I$: $g_i(x) = \pi_i(g_i(x)) = (\pi_i \circ g)(x) = f_i(x) = (\pi_i \circ f)(x) = f_i(x)$. Daher ist $(g_i(x)) = (f_i(x))$. Daher ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$. Daher ist $f = g$. □

Folgerung 1.12. *In der Kategorie $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ gibt es Produkte. Das Produkt einer Modulfamilie ist bis auf Isomorphie eindeutig.*

Dies gilt wegen Satz **??**. □

Sei $(A_i | i \in I)$ eine Familie von Moduln und $(P = \prod_{i \in I} A_i | (\pi_i, i \in I))$ ihr Produkt. Zu jedem $i \in I$ hat man die Familie $f_j A_i \to A_j$

$$f_j = \begin{cases} 0_{ij} & \text{für } j \neq i \\ \mathbf{1}_{A_i} \text{ für } i = j & \end{cases}$$

Dabei ist $0_{ij}\colon A_i \to A_j$ die jeweilige Nullabbildung. Es existiert also für alle $i \in I$ der eindeutig eindeutig bestimmte Homomorphismus $\eta_i\colon A_i \to P$ mit

$$\pi_j \eta_i = \begin{cases} 0_{ij} & \text{für } j \neq i \\ \mathbf{1}_{A_i} \text{ für } i = j \end{cases}$$

Für alle $i \in I$ sind die η_i Monomorphismen. In der Schreibweise als I-Tupel ist $\eta_i(a) = (\dots, 0, a, 0, \dots)$. Das ist das Tupel, das an der $i$ten Stelle a stehen hat und an allen anderen Stellen 0. Sei $\coprod_{i\in I} A_i \colon = \sum_{i \in I} \eta_i(A_i) \hookrightarrow P$.

Satz 1.13. *Es ist* $\coprod_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in I} \eta_i(A_i)$

Sei eine endliche Teilmenge $E \subset I$ gegeben und $0 = \sum_{i\in E} \eta_i(a_i)$. Dann ist für $k \in E$: $0 = \pi_k(\sum_{i\in E} \eta_i(a_i)) = \pi_k(\eta_k)(a_k) = a_k$. Daher ist $\eta_k(a_k) = 0$ für alle $k \in E$. Die Summe ist direkt. □

Satz 1.14. *Ist E eine endliche Teilmenge von I, so ist $D = \bigoplus_{i\in E} \eta_i(A_i)$ direkter Summand in $P = \prod_{i\in I} A_i$. Ist $p = \sum_{i\in E} \eta_i \pi_i$, so ist $p\colon \prod_{i\in I} A_i \to D$ ein Homomorphismus mit $p \circ \iota = \mathbf{1}_D$.*

Wir betrachten den Homomorphismus $p = \sum_{i\in E} \eta_i \pi_i$. Es ist $\mathrm{Bi}(p) = D$ und für $x \in D$ $x = \sum_{i\in E} \eta_i(a_i) = (\sum_{i\in E} \eta_i \pi_i)(\eta_i(a_i)) = x$. Daher ist $\mathbf{1}_D = p \circ \iota$. Wobei ι die Inklusion ist. Also ist D direkter Summand in P. □

Satz 1.15. *Es sei $P = \bigoplus_{i\in I} \eta_i(A_i)$. Zu jeder Familie $f_i\colon A_i \to A$ ist*

$$f\colon \bigoplus_{i\in I} \eta_i(A_i) \ni \sum_{i\in I} \eta_i(a_i) \mapsto \sum_{i\in I} f_i(a_i) \in A$$

der einzige Homomorphismus mit $f \circ \eta_i = f_i$ für alle $i \in I$.

Der Homomorphismus ist sicher wohldefiniert. Sei $a_i \in A_i$. Dann ist $f(\eta_i(a_i)) = f_i(a_i)$ für alle $i \in I$. Daher ist $f \circ \eta_i = f_i$ für alle $i \in I$. Sei $g\colon \bigoplus_{i\in I} \eta_i(A_i) \to A$ ein solcher Homomorphismus. Dann ist für alle $x \in \bigoplus_{i\in I} \eta_i(A_i)$: $g(x) = \sum_{i\in I} g\eta_i(a_i) = \sum_{i\in I} f_i(a_i) = \sum_{i\in I} f\eta_i(a_i) = f(x)$. Dies ist für alle $x \in \bigoplus_{i\in I} \eta_i(A_i)$ richtig. Daher ist $f = g$. □

Folgerung 1.16. *In der Kategorie $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ gibt es Koprodukte. Dies ist bis auf Isomorphie eindeutig.*

1.2 Einige Struktursätze

Satz 1.17. *Ist $f\colon A \to \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus, so ist $A = \mathrm{Ke}(f) \oplus a\mathbb{Z}$ mit $a \in A$ und $a \cdot \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.*

Da f ein Epimorphismus ist, gibt es ein $a \in A$, so dass $f(a) = 1$ ist. Wegen der universellen Eigenschaft von $\mathbb{Z}$, gibt es genau ein $g\colon \mathbb{Z} \to A$ mit $g(1) =$ Es ist $(f \circ g)(1) = f(a) = 1$. Daher ist $A = \mathrm{Ke}(g) \oplus \mathrm{Bi}(g)$. Es ist $\mathrm{Bi}(g) = a\mathbb{Z}$. Außerdem ist g ein Monomorphismus. □

Satz 1.18. *Jede Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ ist direkte Summe von höchstens n zyklischen Untergruppen.*

Die Behauptung stimmt für $\mathbb{Z}^1 = \mathbb{Z}$. Der Satz wird durch Induktion nach n gezeigt. Gelte die Behauptung für $\mathbb{Z}^n$. Dann ist jede Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ direkte Summe von höchstens n zyklischen Untergruppen. Wir betrachten $\mathbb{Z}^{n+1}$ und den Epimorphismus $\pi_{n+1}\colon \mathbb{Z}^{n+1} \ni (a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto a_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Es ist $\mathrm{Ke}(\pi_{n+1}) = \mathbb{Z}^n$. Sei $U \hookrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Einschränkung von π_{n+1} auf U $\pi^*_{n+1}\colon U \ni u \mapsto \pi_{n+1}(u) \in \mathbb{Z}$. Da jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ zyklisch und isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist gibt es einen Isomorphismus $\alpha\colon\ \mathrm{Bi}(\pi^*_{n+1}) \to \mathbb{Z}$. Es ist daher $f := \alpha\pi^*_{n+1}$ ein Epimorphismus. $U \to \mathbb{Z}$. Daher ist $U = \mathrm{Ke}(f) \oplus u\mathbb{Z}$ für ein $u \in U$. Es ist $\mathrm{Ke}(f) = \mathrm{Ke}(\pi^*_{n+1}) = U \cap \mathrm{Ke}(\pi_n) \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$. Also ist $\mathrm{Ke}(\pi^*_{n+1})$ direkte Summe von höchstens n zyklischen Untergruppen. Damit folgt die Behauptung. □

Satz 1.19. *Ist F torsionsfrei und endlich erzeugt, so gibt es einen Monomorphismus $F \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$.*

Es sei $F = a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_n\mathbb{Z}$. Ist $n = 1$, so ist die Behauptung klar. Denn, da F torsionsfrei ist, ist $a_1\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Gelte die Behauptung für k. Es gibt daher einen Monomorphismus $\alpha_k\colon F_k \to \mathbb{Z}^k$. Ist $a_{k+1}\mathbb{Z} \cap F_k = 0$, so ist $F_{k+1} = F_k \oplus a_{k+1}\mathbb{Z}$ und man hat den Monomorphismus

$$\alpha_{k+1}\colon F_k \oplus a_{k+1}\mathbb{Z} \ni x + a_{k+1}z \mapsto \alpha_k(x) + e_{k+1} \cdot z \in \mathbb{Z}^{k+1}.$$

Dabei ist e_{k+1} der $(k+1)$te Einheitsvektor. Andernfalls gibt es ein $z \neq 0$ mit $0 \neq a_{k+1}z \in F_k$. Daher ist $F_{k+1}z \hookrightarrow F_k$. Da F torsionsfrei ist, ist die Multiplikation mit $z \neq 0$ ein Monomorphismus. Also gibt es insgesamt einen Monomorphismus $F_{k+1} \to \mathbb{Z}^k$. □

Folgerung 1.20. *Ist F eine von n Elementen erzeugte torsionsfreie Gruppe, so gibt es ein $k \leq n$, so dass F isomorph zu $\mathbb{Z}^k$ ist.*

F ist bis auf Isomorphie Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$. Mit dem Satz 1.18 folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 1.21. *Ist A endlich erzeugt, so ist die Torsionsuntergruppe von A direkter Summand in A.*