Die lokale Struktur abelscher Stromalgebren auf dem Kreis

Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde
eingereicht am Fachbereich Physik
der Freien Universität Berlin

von Carl Philipp Staszkiewicz
aus Diez

März 1995

Erstgutachter: Professor Dr. B. Schroer
Zweitgutachter: Professor Dr. R. Schrader

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Unter einer Superauswahlregel versteht man die Zerlegung des physikalischen Hilbert-Raumes in orthogonale Unterräume, so daß *Observablen* keine Übergänge zwischen verschiedenen dieser Unterräume machen können [Wi/Wi/Wi 52]. Ein bekanntes Beispiel für eine Superauswahlregel ist die sogenannte Univalenz-Superauswahlregel: Der Hilbert-Raum zerfällt in die beiden Unterräume mit ganzzahligem bzw. halbganzzahligem Gesamtdrehimpuls. Relative Phasenfaktoren von Vektoren in diesen Unterräumen sind durch keine physikalische Messung zu bestimmen. Es folgt, daß die Matrixelemente von observablen Operatoren mit Vektoren in verschiedenen dieser Unterräume verschwinden.

Ein Beispiel für eine Auswahlregel, die keine Superauswahlregel ist, ist die Erhaltung des Gesamtimpulses eines abgeschlossenen Systems. In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls erhalten. Dennoch gibt es Observablen, die Übergänge zwischen Zustandsvektoren mit unterschiedlichem Impuls machen können. Ein Beispiel dafür ist der Ortsoperator. Aus der Unschärferelation folgt, daß sich bei einer Ortsmessung der Gesamtimpuls eines Systems ändert. Es folgt weiter, daß der Ortsoperator nichtverschwindende Matrixelemente mit Zustandsvektoren zu unterschiedlichem Impuls hat. Somit definiert der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems keine Superauswahlregel.

Ein anderes Beispiel für eine Superauswahlregel ist die Erhaltung der elektrischen Ladung eines abgeschlossenen Systems: Es gibt keine Observable, die eine Ladung erzeugt oder vernichtet.

Bei diesen Betrachtungen wird klar, daß der Begriff der Superauswahlregel eng mit dem Begriff der Observablen verknüpft ist. In diesem Zusammenhang soll eine Observable ein Operator sein, der einer physikalisch meßbaren Größe entspricht.

Superauswahlregeln spielen vor allem in der Elementarteilchenphysik, insbesondere also in der relativistischen Quantenfeldtheorie eine große Rolle. Die angemessenste Formulierung der Quantenfeldtheorie, um Superauswahlsektoren zu studieren, ist die sogenannte algebraische Quantenfeldtheorie (sie wird oft auch "algebraische Theorie der Superauswahlsektoren" genannt). Die Formulierung dieser Theorie entspringt dem Bedürfnis, eine mathematisch rigorose und konsistente Beschreibung von Phänomenen der Elementarteilchenphysik zu haben, die sich (a) nur auf observable Größen bezieht, und (b) die Kausalität im Sinne der speziellen Relativitätstheorie respektiert.

Ich möchte diese beiden Forderungen durch einige Beispiele beleuchten. Zu (a): In der gewöhnlichen Formulierung der relativistischen Quantenphysik durch Quantenfelder und Lagrange-Funktionale werden oft nichtobservable Größen (in dem vorher beschriebenen Sinne) benutzt. In der Quantenelektrodynamik z.B. treten zur Beschreibung von Elektronen-Zuständen Fermi-Felder auf, die nach der Univalenz-Superauswahlregel nichtobservabel sind. Es sollte von einem operationellen Standpunkt aus möglich sein, diese Felder aus der Beschreibung zu eliminieren, ohne die physikalischen Konsequenzen zu ändern. Ein anderes Beispiel für eine Redundanz in der Beschreibung durch Quantenfelder ist die Tatsache, daß es durchaus verschiedene Felder geben kann, die zu der gleichen S-Matrix führen. Beispiele hierfür sind Felder, die in derselben Borchers-Klasse liegen [BORCHERS 60]. Die einzig beobachtbaren Größen in der Elementarteilchenphysik können aber aus der S-Matrix abgeleitet werden. Somit beinhaltet die Beschreibung durch Felder eine gewisse Redundanz.

Zu (b): Physikalische Messungen können in beschränkten Raum-Zeit-Gebieten ausgeführt werden (man denke an einen Geiger-Zähler endlicher Ausdehnung, der in einem bestimmten Zeitintervall eingeschaltet ist). Messungen in Raum-Zeit-Gebieten, die raumartig getrennt sind, sollten kompatibel sein.

Im Formalismus werden diese Forderungen folgendermaßen eingebaut: Jedem Raum-Zeit-Gebiet wird eine Algebra beschränkter Operatoren zugeordnet. Die selbstadjungierten Elemente einer Algebra entsprechen den in dem Raum-Zeit-Gebiet möglichen Observablen ("Meßapparate"). Die Lokalität wird durch die Forderung der Mikrokausalität gewährleistet: Operatoren, die in Algebren liegen, deren Raum-Zeit-Gebiete raumartig getrennt sind, sollen miteinander kommutieren. Neben dieser Forderung hat man noch die unmittelbar einsichtige Forderung der Isotonie zu stellen: Observablen in einem Gebiet O sind auch in jedem Gebiet $\overline{O}$ observabel, das O enthält.

Ein physikalisches System ist aber nicht allein durch die Observablen, d.h. die möglichen Messungen bestimmt. Man muß auch noch angeben, in welchen Zuständen sich das System befinden kann. (Im Gegensatz zu einer Observablen, die einen Meßapparat repräsentiert, entspricht der Zustand also einer Quelle, die diesen Zustand präpariert. Beispiele sind Beschleuniger, Polarisierungsfilter etc.)

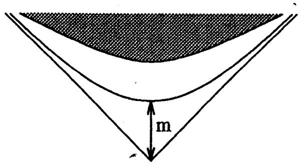
Im Formalismus sind diese Zustände als lineare (normierte) Funktionale auf der Algebra aller Observablen eingebaut. Ist die Algebra konkret als Algebra von Operatoren auf einem Hilbert-Raum gegeben, so sind Beispiele für Zustände die aus der Quantenmechanik bekannten Vektorzustände. Tatsächlich liefert ein kanonisches Verfahren (die GNS-Konstruktion) aus einem Zustand auf der *abstrakten* Algebra eine *Darstellung*, d.h. einen Hilbert-Raum, auf dem die Observablen wirken. Man erhält so eine Mannigfaltigkeit an Zuständen, nämlich die Vektorzustände des Hilbert-Raumes. Diese Zustände unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander, da ihre Vektoren durch unitäre Operatoren in dem Hilbert-Raum ineinander überführt werden können. Diese Prozedur entspricht einem Koordinatenwechsel. Allgemeiner bezeichnet man zwei Darstellungen der Observablenalgebra als äquivalent, wenn sie durch einen unitären Operator ineinander überführt werden (die entsprechenden Zustände beschreiben dann dieselbe physikalische Situation). Die Theorie liefert als Resultat, daß die Superauswahlsektoren durch Äquivalenzklassen von Darstellungen der Observablenalgebra gegeben sind.

Bemerkung: In der Quantenmechanik sind, unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen, alle Darstellungen der Heisenberg-Weyl Vertauschungsrelationen äquivalent zur Schrödinger-Darstellung: Die Quantenmechanik besitzt keine Superauswahlsektoren.

Ein wichtiges Problem der Theorie ist es, aus den zu einer Observablenalgebra gegebenen Zuständen diejenigen auszuwählen, die physikalisch realistischen Situationen entsprechen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Zustände im allgemeinen auch die gesamte dynamische Information eines physikalischen Systems tragen. Dies führt z.B. zu der Minimalforderung, daß ein physikalisch relevanter Zustand zu einer Darstellung der Observablenalgebra führen sollte, in der die Raum-Zeit-Translationen als unitäre Operatoren implementierbar sind. Der Forderung nach Stabilität des Systems wird dadurch Rechnung getragen, daß das gemeinsame Spektrum der Energie-Impuls-Operatoren, die diese Darstellung der Translationen erzeugen, im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel enthalten ist. Das ist die Positivität des Spektrums.

Eine andere Forderung an einen Zustand ist, daß er sich nur in einem beschränkten Raum-Zeit-Gebiet vom Vakuumzustand unterscheiden läßt. Dies entspricht der Anschauung, daß der Zustand eine lokalisierte Teilchenanregung beschreibt. In genügend großer Entfernung von diesen Teilchen sollte ihr meßbarer Einfluß verschwindend gering sein. Der Zustand darf sich in solchen Entfernungen nicht wesentlich vom Vakuumzustand unterscheiden [DHR 71]. Tatsächlich schließt diese Forderung jedoch Phänomene aus, wie sie in *lokalen* Eichtheorien beschrieben werden. Das Gauss'sche Gesetz impliziert nämlich, daß man die Ladung eines Teilchens auf der Oberfläche einer beliebig großen Kugel (um das Teilchen) messen kann.

Buchholz und Fredenhagen haben stattdessen ein Kriterium angegeben, das auch allgemeinere Situationen beschreibt [BU/FRE 82]. Sie forderten, daß in einer Darstellung der Observablenalgebra das Spektrum des Viererimpuls-Operators eine isolierte Massenschale zur Masse $m > 0$ besitzt, d.h. es habe folgende Form:



Aus dieser Eigenschaft konnten sie folgern, daß die Darstellungen, die diesem Kriterium genügen, in raumartigen Kegeln lokalisiert sind. D.h. jede solche Darstellung ist äquivalent zur Vakuumdarstellung, wenn man sie auf das kausale Komplement eines raumartigen Kegels einschränkt. Solche Zustände beschreiben also Teilchenanregungen, die sich in raumartigen Kegeln lokalisieren lassen. Zustände, die solchen Darstellungen entsprechen, lassen prinzipiell Situationen zu, wie sie in massiven Eichtheorien gegeben sind. Man "bündelt" den Fluß des Eichfeldes in einen raumartigen Doppelkegel (der nichtobservabel ist). Der Grenzwert, daß der Kegel verschwindenden Öffnungswinkel hat, entspricht somit dem Bild eines Mandelstam-Strings. Allerdings paßt die Quantenelektrodynamik nicht in diesen Rahmen, weil durch die Anwesenheit der masselosen Photonen die Bedingung an das Impuls-Spektrum verletzt ist. Die Diskussion dieser Theorie im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie ist weitaus schwieriger (siehe [HAAG 92] und die dort angegebenen Referenzen). Trotzdem nimmt man aus historischen Gründen die elektrische Ladung als generisches Beispiel für eine Superauswahlregel und nennt die charakteristischen Eigenschaften, die Darstellungen in verschiedenen Sektoren unterscheiden, allgemein Ladungen. Außerdem kann man hoffen, daß nichtabelsche Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung (Higgs-

Mechanismus) das Kriterium von Buchholz und Fredenhagen erfüllen, und somit mit den hier diskutierten Mitteln analysiert werden können.

Nachdem man also Kriterien an Zustände gefunden hat, die physikalisch realistischen Situationen entsprechen, kann man versuchen die Eigenschaften der in einer Theorie auftretenden Ladungen zu untersuchen. Ich möchte an dieser Stelle kurz einige der Ergebnisse aufzählen, die innerhalb des oben beschriebenen Rahmens gewonnen werden können [HAAG 92]. Das erste Ergebnis betrifft die möglichen auftretenden Ladungen der Theorie.

Man kann zeigen, daß man Ladungen komponieren (im einfachsten Fall—addieren) kann. Weiterhin existiert zu jeder Ladung eine Antiladung in dem Sinne, daß die Komposition der Ladung mit der Antiladung die Ladung des Vakuums enthält.

Ein wichtiges Ergebnis betrifft die Teilchen-Interpretation der Theorie. Man kann in geladenen Sektoren Streuzustände konstruieren. Das ermöglicht es, geladene Sektoren mit dem Teilchenbegriff zu verknüpfen; einem Teilchen (= Streuzustand) kann somit eine Ladung zugeordnet werden. Die obige Aussage über die Antiladung läßt sich dann auch so formulieren: Jedes Teilchen besitzt ein Anti-Teilchen.

Eine andere Analyse betrifft den Begriff der Statistik von Teilchen. Man kann in der Theorie konsistent einen Begriff der Statistik von Sektoren und somit von Teilchen einführen. Es stellt sich heraus, daß zunächst eine verallgemeinerte Bose-Fermi-Alternative zutrifft: Die Teilchen transformieren sich unter Austausch nach einer unitären Darstellung der Permutationsgruppe. Ist diese Darstellung eindimensional, so handelt es sich bei den Teilchen um Bosonen oder Fermionen. Es ist jedoch möglich, daß sich die Teilchen nach einer höherdimensionalen Darstellung der Permutationsgruppe transformieren. Man spricht dann von Para-Statistik. Genauer gesagt kann man auch hier den Fall von Para-Bose oder Para-Fermi-Statistik unterscheiden[1].

Die Existenz von Para-Statistik ist zunächst einmal etwas ungewöhnlich. Sie kann jedoch durch die Einführung zusätzlicher, unobservabler Freiheitsgrade, die jedoch sehr nützlich sind, eliminiert werden. Dies ist ein Teil der wohl weitreichendsten Aussagen, die in diesem Rahmen gemacht wurden [DOP/ROB 90]. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Darstellungen der Observablenalgebra in einer eineindeutigen Beziehung stehen mit den Darstellungen einer kompakten (globalen) Eichgruppe. Die Komposition von Teilchen entspricht dann gerade dem Tensorprodukt von Darstellungen der Eichgruppe. Der Übergang zum Antiteilchen entspricht dem Übergang zur konjugiert komplexen Darstellung. Die eben erwähnte Eliminierung der Para-Statistik gewinnt man dadurch, daß man die Observablenalgebra um *Felder* erweitert, die als Multipletts unter der Eichgruppe transformieren. Die Eichgruppe wirkt somit auf dieser neu definierten Algebra, der Feldalgebra. Man kann zeigen, daß die Invarianten unter dieser Wirkung genau die Observablen sind. Den Feldern kann man wiederum einen Lokalisierungsbegriff zuordnen. Man zeigt, daß diese Felder kommutieren (bosonisch) oder antikommutieren (fermionisch), wenn ihre Lokalisierungsgebiete raumartig getrennt sind. Welche der beiden Möglichkeiten realisiert wird, hängt davon ab, ob der betrachtete Sektor der Observablenalgebra parabosonisch- oder fermionisch war.

An dieser Stelle möchte ich einfügen, daß alle die oben genannten Ergebnisse eine Eigenschaft des Vakuumsektors der Theorie benutzen, die man Haag-Dualität für

[1]Es gibt noch den Fall unendlicher Statistik, der jedoch hier nicht betrachtet werden soll und auch unter bestimmten Voraussetzungen ausgeschlossen werden kann.

Doppelkegel (oder raumartige Kegel, im Falle des Buchholz-Fredenhagen-Kriteriums) nennt. Diese Eigenschaft fordert, daß die Algebren zu einem Gebiet, unter der Nebenbedingung der Kausalität, maximal sein sollen. Es soll nämlich gelten: Jeder Operator, der mit allen Operatoren, die im kausalen Komplement eines Doppelkegels lokalisiert sind, vertauscht, ist selbst in dem Doppelkegel lokalisiert. Anders ausgedrückt: jede zu allen im kausalen Komplement eines Gebietes lokalisierten Messungen kompatible Messung, ist eine Messung in diesem Gebiet. Diese Eigenschaft ist für den Vakuumsektor einer Menge von Modellen nachgewiesen worden. Ich möchte jedoch betonen, daß die Haag-Dualität sowohl von dem betrachteten Zustand, als auch von der Topologie des Raum-Zeit-Gebietes abhängt. Ist die Haag-Dualität für topologisch triviale (d.h., für kontrahierbare Gebiete) in einem Sektor verletzt, so liegt in diesem Sektor Parastatistik vor [DHR 71]. Liegt eine spontan gebrochene Symmetrie vor, ist also die Eichgruppe größer als die Invarianzgruppe des Vakuums, so ist die Haag-Dualität sogar im Vakuum-Sektor verletzt [ROBERTS 74].

Ist dagegen ein Sektor gegeben, für den die Haag-Dualität für topologisch triviale Situationen gilt, so kann diese verletzt sein, wenn man Raum-Zeit-Gebiete betrachtet, die z.B. zwei Zusammenhangskomponenten besitzen. In diesem Fall kann man, falls die Theorie Ladungen (Superauswahlsektoren) besitzt, in einer Komponente des Gebietes eine Ladung erzeugen, in der anderen Komponente wieder vernichten. Der Effekt dieser Operation ist eine Observable, weil die Gesamtladung nicht geändert wird. Diese Observable ist (unter der Voraussetzung, daß die Felder lokal relativ zu den Observablen sind) kompatibel mit allen im raumartigen Komplement lokalisierten Observablen. Sie liegt aber nicht in der Algebra, die von den Observablen in den beiden Komponenten des Gebietes erzeugt wird! Ein Teil dieser Arbeit wird sich damit beschäftigen, diesen Sachverhalt in einem Modell quantitativ zu erfassen.

Viele der oben gemachten Aussagen gelten nur unter der Voraussetzung, daß die Dimension der Raum-Zeit größer oder gleich drei ist (Im Falle des Buchholz-Fredenhagen Kriteriums: größer oder gleich vier). Dies ist eine Folge der Tatsache, daß die Statistik von Sektoren in niedrigeren Dimensionen nicht mehr von der (Para-) Bose-Fermi-Alternative erschöpft wird. Anstelle der Permutationsgruppe, die im höherdimensionalen Fall die Statistik beschreibt, tritt hier die Zopfgruppe [FRE/RE/SCHR 89]. Insbesondere die Konstruktion der Feldalgebra und der Symmetriegruppe beruht jedoch in einem starken Umfang auf der Permutationsgruppenstatistik. Wie eine analoge Konstruktion im Falle der Anwesenheit von Zopfgruppen-Statistik auszusehen hat, ist noch weitgehend ungeklärt (das ist das sogenannte Problem der Quanten-Symmetrie). Ein besseres Verständnis dieses Problemes ist aber wahrscheinlich für ein besseres Verständnis freier Anyonen oder Plektonen (Teilchen mit Zopfgruppenstatistik) nötig. Davon wiederum verspricht man sich tiefere Einsichten in mögliche Anwendungen auf niederdimensionale Quantenphänomene, wie z.B. den (fraktionellen) Quanten-Hall-Effekt. Hier kann man elementare Anregungen über dem Grundzustand durch Teilchen mit fraktioneller Ladung und Statistik beschreiben, die also nicht dem üblichen Bild von Quasi-Teilchen fermionischer Natur entsprechen [STONE 92].

Dieser Sachverhalt ist eine Motivation, sich (a priori unrealistische) Modelle in $1+1$ Dimensionen anzuschauen. Es gibt aber auch eine andere Motivation. Dies ist die Tatsache, daß es in $1+1$ Dimensionen eine Vielzahl an nichttrivialen, "integrablen" Modellen gibt. Diese Modelle eignen sich besonders gut dafür, die strukturellen Eigenschaften, die oben angeführt wurden, an konkreten Beispielen zu überprüfen und noch offene Fragen allgemeiner Natur zu testen. Es ist eine bekannte Tatsache, daß in vielen dieser Modelle auch Sektoren mit Zopfgruppenstatistik auftreten. Man kann also sagen, daß die Zopfgruppenstatistik nicht nur irgendein pathologisches Phänomen ist, sondern eine generische Eigenschaft niederdimensionaler Theorien.

Eine große Klasse dieser integrablen Modelle ist die Klasse der konform invarianten Quantenfeldtheorien. Hier wird die Raum-Zeit-Symmetriegruppe der speziellen Relativitätstheorie zur Gruppe aller Möbiustransformationen erweitert. Dies sind neben den Poincaré-Transformationen noch alle gebrochen-linearen Transformationen, die die Metrik des Minkowski-Raumes nur um einen Skalenfaktor ändern. In dieser Gruppe sind Transformationen enthalten, die raumartige- und zeitartige Abstände ineinander überführen und endliche Punkte nach unendlich transformieren. Diese Gruppe "lebt" (operiert) also nicht auf dem Minkowski-Raum, sondern auf einer Kompaktifizierung davon. Solch eine Symmetrie ist generisch für Systeme, die masselose Teilchen beschreiben. Hat man eine klassisches System masseloser Teilchen, so stellt man fest, daß dieses System (z.B. die Lagrange-Funktion) eine viel größere Symmetriegruppe zuläßt, nämlich die Gruppe *aller* konformer Transformationen. Diese Gruppe ist bekanntermaßen in $1 + 1$ Dimensionen unendlich-dimensional. Der Erzeugende dieser Transformationen ist der Energie-Impuls-Tensor. Die Momente dieses Tensors bilden einen Satz an unabhängigen, erhaltenen Größen.

Aus der Positivität der Metrik im Hilbert-Raum und der Spektrumsbedingung für den Erzeugenden der Raum-Zeit-Translationen folgt jedoch, daß diese Gruppe in der Quantentheorie *keine* Symmetriegruppe sein kann. Dies wird durch eine Anomalie, die *konforme* Anomalie verhindert. Diese Anomalie macht sich als Schwingerterm in den Vertauschungsrelationen des Energie-Impuls-Tensors bemerkbar und sorgt dafür, daß der Vakuumzustand nicht invariant unter der gesamten konformen Gruppe ist. Dennoch lassen sich die konformen Transformationen unitär (und projektiv) in dem Hilbert-Raum implementieren. Eine weitere gute Eigenschaft dieser Theorien ist, daß sie in zwei eindimensionale Theorien "faktorisieren", die auf den Lichtkegeln $t = x$ und $t = -x$ des Minkowski-Raumes leben. Die Symmetriegruppe faktorisiert ebenfalls in das Produkt der Gruppen der gebrochen linearen Transformationen auf den Lichtkegel. Man kann also diese "chiralen Hälften" der Theorie getrennt betrachten. Wie in der vollen Theorie sieht man, daß die Symmetriegruppe auf dem kompaktifizierten Lichtkegel operiert, welcher topologisch äquivalent zur Kreislinie ist. Will man also die konforme Symmetrie der Theorie ausnutzen, so ist es natürlich, Observablen zu betrachten, die in einem beliebigen Gebiet auf der Kreislinie lokalisiert sind. Es ist dieses "Vergessen des Lichtkegels", welches viele technische Vereinfachungen ermöglicht. Ein wichtiges Resultat sagt zum Beispiel, daß der Vakuumsektor jeder chiralen, konformen Theorie auf der Kreislinie Haag-Dualität für Intervalle erfüllt. (Die Intervalle auf der Kreislinie ersetzen in ihrer Bedeutung die Doppelkegel in höheren Dimensionen.) Haag-Dualität für Intervalle kann dagegen durchaus verletzt sein, wenn man nur Observablen betrachtet, die in endlichen Raum-Zeit-Gebieten lokalisiert sind, wenn man die Theorie also wieder auf den Lichtkegel einschränkt.

Viele der technischen Vereinfachungen, die in einer Dimension auftreten, beruhen auf der Tatsache, daß die Tomita-Takesaki-Theorie der lokalen Algebren eine geometrische Bedeutung hat. Da diese Theorie in den neuesten Betrachtungen eine so große Rolle spielt, möchte ich die Objekte dieser Theorie und ihre physikalische Relevanz kurz vorstellen.

Eine diskrete Symmetrie, die in jeder (lokalen) Theorie existiert, ist die *PCT*-Symmetrie. Die *PCT*-Transformation besteht aus einer Ladungskonjugation, einer Raumspiegelung und einer Zeitspiegelung, also einer Spiegelung am Koordinatenursprung. Das *PCT*-Theorem besagt, daß sich diese Transformation immer durch einen *anti*-unitären Operator Θ im Hilbert-Raum implementieren läßt und der Vakuumvektor invariant unter Θ ist. Dieser Operator wirkt auf ein Quantenfeld dadurch, daß man das Feld durch sein adjungiertes ersetzt und gleichzeitig die Koordinaten invertiert. In einer Dimension (auf dem Kreis) gibt es natürlich keine Raum- oder Zeitkoordinaten mehr. Die Inversion bezieht sich hier auf ein beliebiges Intervall, welches als das Intervall $[0,\infty)$ auf dem Lichtkegel interpretiert wird. (Unter Ausnutzung der konformen Symmetrie läßt sich zeigen, daß die spezielle Wahl dieses Intervalles irrelevant ist.) Die Inversion ist nun eine Inversion an dem Endpunkt des Intervalles, der dem Punkt 0 entspricht. Diese Transformation hat folgende Eigenschaften: Sie ist antiunitär, sie läßt das Vakuum invariant und sie bildet die in dem betrachteten Intervall lokalisierten Observablen isomorph auf die im Komplement lokalisierten Observablen ab. Das sind aber genau die Eigenschaften, die die modulare Konjugation der Tomita-Takesaki-Theorie charakterisieren. Weiterhin kann man die Einparameter-Untergruppe der Möbiustransformationen betrachten, die die Endpunkte des Intervalles fest lassen. Identifiziert man das Intervall mit der reellen Halbgeraden, so entspricht diese Gruppe den Transformationen $d(\lambda) : x \mapsto e^{-2\pi\lambda}x$. Man sieht, daß die Transformation $d(\frac{i}{2})$ gerade der Inversion am Intervallende entspricht. Da die Theorie konform ist, sind die Dilatationen $d(t)$ durch unitäre Operatoren Δ^{it} implementiert. Es folgt mit den oben genannten Eigenschaften des *TCP*-Operators Θ, daß der Operator $S = \Theta\Delta^{\frac{1}{2}}$ antilinear ist und auf Vektoren wirkt wie

$$S A\Omega = A^*\Omega,$$

wenn A eine in dem Intervall lokalisierte Observable ist. Dies charakterisiert den *Tomita-Operator* der Algebra. Die Gruppe der Dilatationen ist dann die modulare Gruppe der Algebra bezüglich des Vakuum-Zustandes. Diese heuristischen Betrachtungen zeigen, daß die abstrakten, rein algebraisch-analytisch definierten Objekte der Tomita-Takesaki-Theorie der lokalen Observablen eine geometrische Interpretation zulassen. Es ist diese Eigenschaft, die eine konforme Quantenfeldtheorie auf der Kreislinie auszeichnet.

1.1 Modelle der konformen Quantenfeldtheorie

In den letzten 11 Jahren wurden bedeutende Fortschritte auf dem Gebiet der konformen Quantenfeldtheorie in $1+1$ Dimensionen erzielt. Grundlegend für diese Fortschritte war die Arbeit von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [BPZ 84]. Dort wurde gezeigt, daß Modelle durch die bereits oben erwähnte konforme Anomalie c, auch zentrale Ladung genannt, charakterisiert sind. Ferner wurde gezeigt, daß die volle konforme Gruppe nicht als Symmetrie des Modelles anzusehen ist, sondern als spektrumsgenerierende Algebra. Sie konnten eine Klasse von Modellen in dem Sinne explizit lösen, daß sie das Spektrum der auftretenden Darstellungen der Observablenalgebra bestimmen-, und eine prinzipielles Verfahren angeben konnten, um die (euklidischen) n-Punktfunktionen der Theorie zu berechnen. Diese Klasse ist heute bekannt als die Klasse der minimalen Modelle. Ihre zentrale Ladung c ist gegeben durch $c = c_m$, mit

$$c_m = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad m \geq 3.$$

Ein bekanntes Resultat [FRI/QIU/SHE 85] sagt, daß dies die einzigen Modelle der konformen Quantenfeldtheorie[2] sind, die alle gewünschten Eigenschaften haben und für die $c < 1$ ist. Diese einfache Klassifizierung aller $c < 1$ Theorien hegte die Hoffnung, *alle* Modelle der konformen QFT zu klassifizieren, bzw. exakt zu lösen. Dies ist jedoch für Theorien mit $c > 1$ (selbst wenn man die Einschränkung macht, daß c rational sein soll) noch nicht möglich. Ein Grund dafür ist, daß es für $c > 1$ immer unendlich viele irreduzible Sektoren der Algebra des Energie-Impuls-Tensors (Virasoro-Algebra) gibt. Man versucht daher *lokale* Erweiterung der Virasoro-Algebra zu finden, die nur noch eine endliche Zahl irreduzibler Sektoren besitzen. Man unterscheidet dann zwei Fälle. Entweder enthält die Erweiterung eine zentrale Erweiterung einer Stromalgebra, oder sie tut dies nicht. Im zweiten Fall nennt man diese Erweiterung eine $\mathcal{W}$-Algebra. Die Darstellungstheorie, aber auch die allgemeine algebraische Struktur dieser Algebren ist leider noch nicht sehr gut verstanden. Ein Grund dürfte darin liegen, daß man die mächtigen Methoden der Darstellungstheorie von Lie-Algebren für diese Algebren nur zum Teil oder gar nicht zur Verfügung hat.

Auf der anderen Seite hat man die Stromalgebren. Besonders einfachen dieser Modelle ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Abstrakt sind die Stromalgebren durch ihre Vertauschungsrelationen definiert. Diese lauten in Lichtkegelkoordinaten:

$$[J^a(x), J^b(y)] = i f_c^{ab} J^c(x)\delta(x-y) - k\frac{i}{\pi} g^{ab}\delta'(x-y). \tag{1.1}$$

Hier sind die f_c^{ab} die Strukturkonstanten einer kompakten Liegruppe in einer festen Basis der Lie-Algebra, g^{ab} ist die Cartan-Killing-Metrik, k ist eine natürliche Zahl und $\delta(x-y)$ bezeichnet die Deltafunktion auf dem Lichtkegel, $\delta'(x-y)$ ihre Ableitung. Diese Vertauschungsregeln sind definierende Relationen für Algebren, die man in der Mathematik als affine Lie-Algebren bezeichnet. In der Physik treten diese Algebren in einer Vielzahl von Modellen auf. Ein Beispiel ist das nichtlineare Sigma-Modell mit Wess-Zumino Term [WITTEN 84], kurz WZNW-Modell (Wess-Zumino-Novikov-Witten). Die klassische Lagrange-Funktion dieses zweidimensionalen Modelles ist

$$L = \frac{1}{16\pi k}\int d^2x \partial_\mu g \partial^\mu g^{-1} + k\Gamma. \tag{1.2}$$

Hier ist g ein Feld mit Werten in der kompakten Lie-Gruppe G und Γ ist der Wess-Zumino-Term. Die Stromfelder kann man dann folgendermaßen definieren [WITTEN 84]: Bezeichnet man mit ∂ die Ableitung einer Größe im Minkowski-Raum nach der Lichtkegelkoordinate $x_+ = t + x$, dann ist $J = g^{-1}\partial g$ ein Lichtkegelfeld mit Werten in der Lie-Algebra von G. Ist t^a eine Basis der Lie-Algebra, so erfüllen die Felder J^a, definiert durch $J = \sum_a t^a J^a$, die Vertauschungsrelationen (1.1). Es ist bekannt, daß dieses Modell für den Fall $k = 1$ und $G = O(N)$ ($G = U(N)$) äquivalent zu einer Theorie freier Majorana (Dirac-) Fermionen auf dem Kreis ist. Ist G eine abelsche

[2] Ich betrachte hier nur noch die chiralen Hälften einer Theorie. Die Art und Weise, wie diese Theorien zu 1 + 1-dimensionalen QFTs zusammengesetzt werden, ist ein anderes Problem.

Gruppe, gilt also $f_c^{ab} \equiv 0$, so sind die Relationen eine Form von kanonischen Vertauschungsrelationen. Die Stromfelder J^a verhalten sich dann wie die chiralen Hälften von Ableitungen des masselosen, freien, skalaren Feldes in zwei Dimensionen.

Es ist nun eine Tatsache, daß sich die Theorien (1.1), für G eine Gruppe vom Typ A-D-E (insbesondere also nichtabelsch) und $k = 1$, alleine durch solche freien Theorien beschreiben lassen [SEGAL 81]. Weiter lassen sich die Theorien mit $k > 1$ durch "Tensorprodukte" von Theorien mit $k = 1$ konstruieren. Man kann also viele der Modelle (1.1) durch die Theorie *freier* Felder beschreiben, wenn auch diese Beschreibung mitunter etwas kompliziert ist[3]. Das läßt vermuten, daß schon die Modelle (1.1) mit verschwindenden Strukturkonstanten f_c^{ab}, ich nenne sie im folgenden abelsche Stromalgebren, viele nichttriviale Eigenschaften aufweisen. Diesen Modellen soll in der vorliegenden Arbeit Aufmerksamkeit gewidmet werden. Es wird sich herausstellen, daß sich diese Modelle einerseits so gut verhalten, daß man viele Eigenschaften explizit studieren kann, daß es aber andererseits viele Eigenschaften dieser Modelle gibt, die bisher noch nicht untersucht wurden und die auch nicht auf der Hand liegen.

1.2 Eine Übersicht

Ich möchte nun eine kurze Übersicht über die Motivation, Struktur und Ergebnisse der vorliegenden Arbeit geben. Wie schon im letzten Abschnitt erwähnt, sollen in dieser Arbeit abelsche Stromalgebren im Mittelpunkt stehen. Im Vordergrund steht dabei das Studium *lokaler* Eigenschaften. Diese sind in der Literatur weniger behandelt worden, erlauben jedoch ebenfalls interessante Einsichten. Es werden hauptsächlich Eigenschaften dieser Theorien untersucht, die nicht generisch für konforme oder allgemein niederdimensionale Quantenfeldtheorien sind, sich jedoch in den vorliegenden Modellen besonders einfach und elegant lösen lassen. Ich möchte dies an zwei Beispielen erläutern. Das erste Beispiel ist eine "klassische" Fragestellung, die in dem Rahmen der lokalen Algebren auftaucht [LAN/SCHR 67]. Man betrachte z.B. ein komplexes, freies, skalares Feld $\phi(x)$. Auf der Feldalgebra wirkt dann $U(1)$ als globale Eichgruppe, indem man das Feld ϕ mit einer Phase multipliziert. Die Observablen sind dann die Invarianten unter dieser Eichsymmetrie. Nach dieser Definition ist das *bilokale* Feld $\phi^*(y)\phi(x)$ eine Observable. Es fragt sich, ob dieses Feld eine Funktion des lokalen Stromfeldes $j_\mu(x) = i : \phi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi(x) :$ ist, —"Can current-operators determine a complete theory?" [LAN/SCHR 67]. Diese Frage läßt sich in der Tat positiv beantworten. Dabei benutzt man jedoch die Eigenschaft des massiven Feldes, daß sich die Nullstellen der Kommutatorfunktion im Vorwärtslichtkegel nicht allzusehr häufen [LAN/SCHR 67]. Eine ähnliche Frage läßt sich auch für die Modelle (1.1) stellen. Hier wirkt die Gruppe G selbst als globale Eichgruppe. Es fragt sich, ob es geeignete lokale "Stromoperatoren" gibt, die die Observablenalgebra erzeugen[4]. Die Frage läßt sich in der Tat in den vorliegenden Modellen (1.1) für $k = 1$ beantworten. Die Techniken, die

[3]Tatsächlich lassen sich auch die meisten anderen bekannten Modelle mit Hilfe von Stromalgebren beschreiben. Z.B. sind die minimalen Modelle sogenannte Coset-Theorien, die mit Hilfe einer $SU(2)$-Stromalgebra gebildet werden.

[4]Die Ergebnisse der Arbeit [JÖRSS 91] legen die Vermutung nahe, daß jedes lokale, konforme Netz auf S^1 von *lokalen* Feldern erzeugt wird. Aber selbst wenn man diese Aussage verifizieren könnte, bleibt die Aufgabe, diese Felder in konkreten Modellen zu identifizieren.

man dazu verwendet, sind überraschend einfach und bestehen darin, kombinatorische Argumente der Loopgruppen-Theorie mit *lokalen Gesichtspunkten* (z.B. der Tomita-Takesaki-Theorie) zu verbinden. Für den Fall $G = SU(2)$ wurde dies von Rehren durchgeführt [REHREN 94]. Das Ergebnis zeigt, daß in diesem Fall die eichinvarianten Felder von dem Energie-Impuls-Tensor erzeugt werden. In der vorliegenden Arbeit werde ich dieses Resultat auf den Fall verallgemeinern, daß G eine beliebige Gruppe vom Typ A-D-E ist. Die Algebra des Energie-Impuls-Tensors reicht in diesem Fall nicht mehr aus, um die gesamte eichinvariante Unteralgebra zu erzeugen. Sie ist um geeignete lokale "Casimir-Felder" zu erweitern.

Eine andere Fragestellung, die in Theorien beliebiger Dimension auftaucht, ist die nach der Verletzung der Haag-Dualität für topologisch nichttriviale Gebiete. Auch diese Frage läßt sich in den vorliegenden Modellen beantworten. Topologisch nichttrivial bedeutet in einer Dimension, daß das Gebiet nichtzusammenhängend ist. Genauer betrachte ich den Fall, daß das Gebiet eine Vereinigung zweier Intervalle ist. Eine Verallgemeinerung, in der das Gebiet eine *beliebige*, aber endliche Vereinigung von Intervallen ist, scheint mit den hier entwickelten Methoden ebenfalls möglich. Es wird sich zeigen, daß die Verletzung der Dualität eng mit der Superauswahlstruktur der betrachteten Modelle zusammenhängt.

Die dritte Frage mit der ich mich beschäftigt habe, ist die Neuformulierung der Superauswahltheorie für chirale, konforme Theorien auf dem Kreis mit Hilfe modularer Theorie. Diese Formulierung wurde von Wiesbrock [WIESBROCK 94] vorgeschlagen. In der üblichen Theorie der Superauswahlsektoren untersucht man die auftretenden Ladungen mit Hilfe sogenannter Endomorphismen, die man *indirekt* mit Hilfe der Haag-Dualität (für Intervalle) aus den gegebenen Darstellungen des Netzes erhält. Es besteht aber das Bedürfnis die Superauswahltheorie direkt mit Objekten zu untersuchen, die durch eine gegebene Darstellung bzw. einen Zustand kanonisch gegeben sind. Ein Ansatz stammt von Fredenhagen [FREDENHAGEN 92] und benutzt die Tatsache, daß man auf einer Klasse von Funktionalen über einem Netz eine Produktstruktur definieren kann, die die Komposition von Ladungen wiederspiegelt. Ein anderer Zugang von Wiesbrock benutzt die modulare Theorie lokaler Algebren, die dem gegebenen Zustand kanonisch zugeordnet ist. Es ist gezeigt worden, daß sich die gesamte Superauswahlstruktur mit diesem Ansatz rekonstruieren läßt [WIESBROCK 94]. In dieser Arbeit werde ich die Objekte dieses Zugangs in den hier betrachteten Modellen vorstellen und zeigen, wie sich tatsächlich (einige) Eigenschaften der Superauswahltheorie bestimmen lassen.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- Im zweiten Kapitel werde ich die grundlegenden Definitionen und Aussagen der algebraischen Quantenfeldtheorie einführen. Dies geschieht erstens, um die formale Grundlage für die folgenden Kapitel zu legen und zweitens, um einige Techniken zu erläutern, die für diese Theorie typisch sind.

- Im dritten Kapitel werden die abelschen Stromalgebren eingeführt. Ich analysiere ihre Superauswahlstruktur und zeige, daß die Sektoren des Modelles durch lokalisierte Automorphismen erzeugt werden. Danach diskutiere ich mögliche lokale Erweiterungen dieser Modelle. D.h. ich untersuche die Frage, ob es *lokale* Feldalgebren gibt, die diese Stromalgebren enthalten. Diese können dann ebensogut als Observablen angesehen werden, deren Superauswahlstruktur sich untersuchen läßt. Die Ergebnisse sind, wenn auch in einer anderen Formulierung, weitgehend bekannt (siehe z.B. [GOD/OLI 85]). Die Analyse in diesem Kapitel verläuft weitgehend analog zu der Analyse von Buchholz, Mack und Todorov über eindimensionale Stromalgebren [BMT 88]. Ich kann mich deshalb kurz fassen. Im Anschluß betrachte ich den Zusammenhang der Modelle mit der Darstellungstheorie bestimmter Loopgruppen.

- Im vierten Kapitel zeige ich quantitativ, wie die Haag-Dualität für nichtzusammenhängende Gebiete verletzt wird. Ich nutze in dieser Untersuchung aus, daß sich die abelschen Stromalgebren als freie Theorien im Fockraum realisieren lassen. Dies ermöglicht es die Resultate von Araki und anderen [LE/RO/TE 78] [ARAKI 63] zu benutzen. In diesem Kapitel werde ich auch die Wirkung der (orientierungserhaltenden) Diffeomorphismen der Kreislinie auf den lokalen Algebren genauer untersuchen. Desweiteren werden als "Abfallprodukt" der Fockraumdarstellung Zustandssummen berechnet. Diese werden in Kapitel 6 benötigt.

- Im fünften Kapitel behandele ich die modulare Theorie der abelschen Stromalgebren und ihrer lokalen Erweiterungen. Schwerpunkt wird dabei sein, die lokalisierten Connes-Kozykel zu berechnen, welche zu lokalisierten Automorphismen der Stromalgebra führen. Wie im dritten Kapitel erläutert, führen diese Automorphismen dann zu den Sektoren der Theorie. Die physikalische Interpretation dieser Kozykel ist, daß sie die Verschiebung einer Ladung von einem Intervall in ein anderes beschreiben. Da sie mit der modularen Gruppe der lokalen Algebren zusammenhängen (durch sie bestimmt sind), sind diese Operatoren auch vom mathematischen Gesichtspunkt aus sehr natürlich. Neben diesen strukturellen Einsichten möchte ich zeigen, wie sich die sonst eher abstrakten Begriffe der modularen Theorie lokaler Algebren in diesem konkreten Beispiel der abelschen Stromalgebren recht einfach handhaben lassen.

- Im sechsten Kapitel geht es um die oben erwähnte Frage, wie sich eichinvariante Algebren durch Quantenfelder charakterisieren lassen. Wie im zweiten Kapitel beschrieben, kann man mit Hilfe abelscher Stromalgebren lokale Netze konstruieren, die die Wirkung einer kompakten nichtabelschen Lie-Gruppe zulassen. Ich werde zeigen, daß das Netz der Invarianten unter dieser Wirkung von Casimir-Feldern erzeugt wird. Casimir-Felder [BAI/BOU/SCH/SUR 88] sind dabei natürliche Verallgemeinerungen des Sugawara-Energie-Impuls-Tensors. Der Schwerpunkt der Aussagen liegt auf den lokalen Aspekten. Dieses Kapitel stellt somit eine Verallgemeinerung eines Resultates von Rehren [REHREN 94] dar, der eine Vermutung von Schroer bewies.

- Im letzten Kapitel fasse ich die gewonnenen Einsichten und Ergebnisse zusammen.

Kapitel 2

Die mathematische Formulierung der physikalischen Prinzipien

In diesem Kapitel führe ich die grundlegenden Definitionen des Haag-Kastler-Programmes auf und stelle die wichtigsten Techniken vor. Ich beschränke mich von vornherein darauf, dies für den Fall einer chiralen Theorie auf dem Kreis durchzuführen, werde aber an gegebener Stelle auf Besonderheiten aufmerksam machen, die aus dieser Wahl der "Raum-Zeit" resultieren.

Im zweiten Abschnitt werde ich kurz darauf eingehen, wie sich solche Theorien im Rahmen des Wightman-Zugangs zur Quantenfeldtheorie darstellen. In diesem Abschnitt werde ich mich sehr kurz halten und stelle auch keinen Anspruch, dieses Thema in seiner Vollständigkeit wiederzugeben. Einige Resultate benötige ich jedoch in dem Kapitel über Casimir-Felder.

2.1 Chirale Netze auf dem Kreis

Es sei $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis. Die Gruppe $SU(1,1)$ ist die Gruppe aller 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad \text{mit } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

$SU(1,1)$ wirkt durch gebrochen-lineare Transformationen auf S^1:

$$SU(1,1) \ni g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow gz = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \in S^1.$$

Man sieht, daß zwei Elemente in $SU(1,1)$, die sich nur um ein Vorzeichen voneinander unterscheiden, dieselbe Wirkung haben. Bildet man die Quotientengruppe bezüglich der von den Matrizen ± 1 erzeugten Untergruppe, so erhält man die Möbiusgruppe[1] $PSU(1,1)$.

[1]Im strengen Sinne ist die Möbiusgruppe die Gruppe aller gebrochen linearen Transformationen der reellen Geraden. Die hier betrachtete Gruppe geht durch Cayley-Transformation aus dieser hervor.

Von besonderer Bedeutung im folgenden sind die Einparameteruntergruppen der Rotationen und der Dilatationen. Die Rotationen $r(t)$ sind gegeben durch die Matrizen:

$$r(t) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{2}} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r(t)z = e^{it}z.$$

Die Wirkung der Einparametergruppe der Dilatationen ist gegeben durch:

$$\Lambda_t z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh(t)z + \sinh(t)}{\sinh(t)z + \cosh(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Im Gegensatz zu den Rotationen besitzen diese Transformationen die beiden Fixpunkte $z = \pm 1$. Sie lassen weiterhin den oberen und den unteren Halbkreis invariant. Ich werde später noch ausführlicher auf diese Transformationen eingehen.

Ich betrachte im folgenden Intervalle I auf S^1, deren Komplement I^c ebenfalls nichtleere Intervalle sind. Notation: $I \Subset S^1$. Es sei $\mathcal{H}$ ein (komplexer) Hilbert-Raum. Die Algebra der beschränkten Operatoren in $\mathcal{H}$ bezeichne ich mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichne ich mit $\mathcal{A}'$ die *Kommutante* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \{A' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | A'A = AA' \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Der Zugang von Haag-Kastler zur Beschreibung der Quantenfeldtheorie, beruht auf der Annahme, daß die in einem Raum-Zeit-Gebiet meßbaren Größen eine Algebra beschränkter Operatoren bilden. Physikalische Eigenschaften, wie z.B. die Kausalität werden als Bedingungen an diese Algebren gestellt.

Definition 2.1.1: Ein chirales konformes Netz auf S^1 ist eine Abbildung, die jedem Intervall $I \Subset S^1$ eine von Neumann-Algebra beschränkter Operatoren $\mathcal{A}(I)$ auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ zuordnet, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $I \subset J \Rightarrow \mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(J)$ (Isotonie).

(ii)$I \subset J^c \Rightarrow \mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(J)'$ (Lokalität).

(iii) Es gibt eine unitäre, stark-stetige Darstellung U, der Möbiusgruppe $PSU(1,1)$ in $\mathcal{H}$, mit: $g \in PSU(1,1) \Rightarrow U(g)\mathcal{A}(I)U^*(g) = \mathcal{A}(gI)$. Ferner gibt es einen eindeutigen Vektor Ω in $\mathcal{H}$, invariant unter dieser Darstellung (Kovarianz).

(iv) Der Erzeugende H der Darstellung der Rotationsuntergruppe von $PSU(1,1)$ hat nichtnegatives Spektrum (Spektrumsbedingung).

Bemerkungen: (i) Die Enthaltenseins-Relation von Teilmengen von S^1 definiert eine kausale Struktur auf S^1: Zwei Intervalle I und J heißen kausal disjunkt, wenn ihre Schnittmenge leer ist. Die zugehörigen Raum-Zeit-Transformationen respektieren diese kausale Struktur, d.h. $I \cap J = \emptyset$ impliziert auch $gI \cap gJ = \emptyset$ für alle $g \in PSU(1,1)$. Dies rechtfertigt es, chirale Netze als eigenständige Modelle für eine Quantenfeldtheorie zu betrachten.
(ii) Im Gegensatz zu dem ursprünglichen Haag-Kastler-Programm nehme ich an, daß die lokalen Algebren konkret als von Neumann-Algebren auf einem ausgezeichneten

Hilbert-Raum (dem *Vakuumhilbertraum*), und nicht als abstrakte C^*-Algebren gegeben sind. Diskussionen, die diesen Standpunkt rechtfertigen, bzw. Argumente, wann dies eine Einschränkung ist, sind in dem Buch [HAAG 92] zu finden. Ich will hier lediglich bemerken, daß man durch dieses Vorgehen auch Eigenschaften über die Dynamik in die grundlegenden Definitionen aufnehmen kann.
(iii) Der Erzeugende H der Rotationen übernimmt die Rolle des Hamilton-Operators. Man kann zeigen, daß die Positivität von H äquivalent zur Positivität des Energie-Impulsspektrums in $1+1$ Dimensionen ist, falls die chirale Theorie die "chirale Hälfte" einer $1+1$ dimensionalen konformen Theorie ist.

Eine wichtige technische Voraussetzung für die Analyse der Superauswahlstruktur eines Netzes von von Neumann-Algebren ist die Haag-Dualität in der Vakuumdarstellung [DHR 71]. Auf den Fall chiraler Netze angewandt bedeutet Haag-Dualität, daß für alle Intervalle $I \Subset S^1$ gilt:

$$\mathcal{A}(I) = \mathcal{A}(I^c)'. \tag{2.1}$$

Das folgende Theorem zeigt, daß Haag-Dualität im Vakuum-Sektor eine generische Eigenschaft chiraler, konformer Netze auf S^1 ist ([FRÖ/GAB 92] [BRU/GUI/LO 93]):

Theorem 2.1.2: Ein chirales konformes Netz auf S^1 erfüllt Haag-Dualität (Gleichung (2.1)) im Vakuumsektor.

Haag-Dualität im Vakuumsektor kann verletzt sein, wenn man das Netz auf den punktierten Einheitskreis $S^1 \setminus \{\zeta\}$, $\zeta \in S^1$ einschränkt [BUCH/SCH-M 90].

Der allgemeinen Philosophie des Haag-Kastler-Programmes folgend, sollen physikalische Eigenschaften des Modelles durch Darstellungen des Netzes beschrieben werden. Es ist daher zunächst zu definieren, was eine Darstellung ist. Eine Darstellung des Netzes $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ ist eine *Familie* von Darstellungen π^I der einzelnen Algebren $\mathcal{A}(I)$, die verträglich mit der Isotonie des Netzes sind: Für $I \Subset S^1$ sei π^I eine Darstellung von $\mathcal{A}(I)$ in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}_\pi$ und es gelte:

$$I \subset J \;\Rightarrow\; \pi^J|_{\mathcal{A}(I)} = \pi^I.$$

Ein chirales konformes Netz auf S^1 beschreibt ein physikalisches System mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Es ist daher verständlich, daß ein Netz eine sehr große Zahl an inäquivalenten Darstellungen besitzt. Es gilt Bedingungen zu finden, die *physikalisch relevante* Darstellungen charakterisieren. Eine Minimal-Forderung ist die Bedingung, daß die Rotationen dargestellt werden und ihr Erzeugender nichtnegatives Spektrum hat. Von größerer Bedeutung sind aber die Fälle, in denen die Darstellung auch kovariant unter der gesamten Gruppe $PSU(1,1)$ ist:

Definition 2.1.3: Eine Darstellung $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ des Netzes $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ heißt kovariante Darstellung mit positiver Energie, wenn es eine Darstellung U_π der universellen Überlagerung $\widetilde{PSU}(1,1)$ gibt, mit:
(i)

$$\pi^{gI}(U(g)AU(g)) = U_\pi(\tilde{g})\pi^I(A)U_\pi^*(\tilde{g}),\; I \Subset S^1,\; g \in PSU(1,1).$$

Hier ist für $g \in PSU(1,1)$, $\tilde{g}$ ein Element in der universellen Überlagerung, dessen Bild in $PSU(1,1)$ unter der kanonischen Projektion gleich g ist.

(ii) Es gibt einen *positiven* Operator H_π in $\mathcal{H}_\pi$, so daß die Operatoren e^{itH_π}, $t \in \mathbb{R}$ die Rotationen in $\mathcal{H}_\pi$ implementieren:

$$\pi^{r(t)I}(U(r(t))AU^*(r(t))) = e^{itH_\pi}\pi^I(A)e^{-itH_\pi}\ \forall A \in \mathcal{A}(I), I \Subset S^1. \tag{2.2}$$

Diese Bedingung legt den Erzeugenden H_π noch nicht eindeutig fest. Ist nämlich V ein positiver Operator in $(\cup\pi^I(\mathcal{A}(I)))' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$, so erfüllt der Operator $H_\pi + V$ diese Bedingungen auch. Eine geeignete Wahl für diesen Operator ergibt sich oft aus anderen Bedingungen, wie z.B. der Forderung nach Kovarianz von implementierenden Feldern.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, spielen in höheren Dimensionen Lokalisierungseigenschaften von Darstellungen eine große Rolle. Dies war eine Folge der Annahme, daß Darstellungen lokalisierten Teilchenanregungen entsprechen. In weiter Entfernung von diesen Teilchen sollte deren meßbarer Effekt jedoch verschwindend gering sein. In den hier betrachteten konformen Theorien verlieren diese Motivationen teilweise ihren Sinn: Erstens beschreiben konforme Theorien keine massiven Teilchenanregungen, zweitens kann man sich in einer *kompakten* Raum-Zeit nicht beliebig weit von einem bestimmten Punkt entfernen. Die Forderung, daß eine beliebige physikalisch sinnvolle Darstellung unitär äquivalent zur Vakuumdarstellung ist, wenn man sie auf eine bestimmtes Raum-Zeit Gebiet einschränkt, ist aber auch technisch sehr wichtig. Durch sie kann man solche Darstellungen nämlich durch Morphismen der Observablenalgebra beschreiben [DHR 71]. Es ist daher beruhigend zu wissen, daß in chiralen, konformen Theorien auf S^1 Lokalisierungseigenschaften allein schon aus der Bedingung der positiven Energie folgen. Es gilt [BMT 88]:

Theorem 2.1.4: Es sei $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ ein chirales, konformes Netz auf S^1. Dann ist jede Darstellung π mit positiver Energie lokal äquivalent zur Vakuumdarstellung. Genauer: Für jedes Intervall $I \Subset S^1$ gibt es einen unitären Operator V von $\mathcal{H}_0$ nach $\mathcal{H}_\pi$, mit

$$\pi^I(A) = VAV^*\ A \in \mathcal{A}(I). \tag{2.3}$$

Wie oben bemerkt, kann man diese Aussage benutzen, um Darstellungen durch Morphismen zu beschreiben. Bevor ich zeige, wie man aus Darstellungen Morphismen erhält, möchte ich jedoch die sogenannte *universelle* Algebra einführen. Bis jetzt ist ein Netz eine Familie von Algebren, indiziert durch Intervalle $I \Subset S^1$. Darstellungen dieses Netzes sind somit auch Familien von Darstellungen, die gewissen Konsistenzbedingungen genügen. Man kann nun die Information dieses Netzes in eine einzige Algebra kodieren. Um die Schwierigkeiten dieser Konstruktion zu verdeutlichen, betrachte ich zunächst einmal alle (abgeschlossenen) Intervalle $I \Subset S^1$, die einen beliebigen Punkt ζ (den Punkt bei unendlich) *nicht* enthalten. Die Menge:

$$\bigcup_{I \subset S^1 \setminus \{\zeta\}} \mathcal{A}(I) \tag{2.4}$$

ist dann eine normierte $*$-Algebra. Denn zu je zwei Intervallen I_1 und I_2 gibt es ein drittes Intervall, das I_1 und I_2 enthält. Damit ist in der Menge (2.4) die Multiplikation wohldefiniert. Genauso sieht man, daß diese Menge eine natürliche Norm besitzt, die die C^*-Eigenschaft hat. Den C^*-Abschluß dieser Algebra nennt man die *quasilokale* Algebra. Alle Eigenschaften des Netzes $I \mapsto \mathcal{A}(I)$, $I \Subset S^1 \setminus \{\zeta\}$, kann man nun als Eigenschaften der quasilokalen Algebra formulieren. Man sieht jedoch, daß diese quasilokale Algebra nicht mehr die gesamte Gruppe $PSU(1,1)$ als Symmetriegruppe zuläßt. Man hat die konforme Kovarianz des ursprünglichen Netzes verloren.

Versucht man die obige Konstruktion auf das gesamte chirale Netz zu übertragen, d.h. betrachtet man auch Intervalle, die den Punkt ζ enthalten, so stößt man auf die Schwierigkeit, daß die Intervalle $I \Subset S^1$ keine gerichtete Menge bilden. Zu je zwei solcher Intervalle gibt es nicht immer ein drittes, welches die beiden anderen enthält[2].

Über eine universelle Konstruktion bestimmt ein chirales, konformes Netz dennoch eine eindeutige C^*-Algebra:

Theorem 2.1.5: Zu jedem chiralen, konformen Netz $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ gibt es eine eindeutige C^*-Algebra $\mathcal{A}_{\text{univ}}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(i) Für jedes Intervall $I \Subset S^1$ gibt es unitale Einbettungen i^I: $\mathcal{A}(I) \to \mathcal{A}_{\text{univ}}$, mit

$$i^J|_{\mathcal{A}(I)} = i^I \quad \text{falls } I \subset J \tag{2.5}$$

und $\mathcal{A}_{\text{univ}}$ wird von den Algebren $i^I(\mathcal{A}(I))$, $I \Subset S^1$, erzeugt.
(ii) Zu jeder kovarianten Familie von Darstellungen mit positiver Energie existiert eine eindeutig bestimmte Darstellung von $\mathcal{A}_{\text{univ}}$ in $\mathcal{H}_\pi$, mit

$$\pi \circ i^I = \pi^I. \tag{2.6}$$

Bemerkungen: (i) Dieses Theorem rechtfertigt es, von *einer* Darstellung eines chiralen, konformen Netzes auf S^1 zu sprechen. Ich werde in Zukunft einfach π für kovariante Darstellungen mit positiver Energie eines Netzes schreiben. Es ist dann z.B. $\pi(\mathcal{A}(I)) = \pi \circ i^I(\mathcal{A}(I))''$.

(ii) Die universelle Algebra gestattet es viele Eigenschaften des Netzes zu studieren, die in den einzelnen lokalen Algebren nicht zu erkennen sind. So enthält $\mathcal{A}_{\text{univ}}$ Operatoren, die *globalen* Ladungen entsprechen. Für solche Betrachtungen siehe z.B. [FRE/RE/SCHR 92].

(iii) Beweise dieses Theorems sind in [FREDENHAGEN 90] und [GUI/LON 92] zu finden.

Es sei nun π eine kovariante Darstellung des Netzes $\mathcal{A}(I)$ mit positiver Energie. Wie in der üblichen DHR-Theorie, kann man die lokale Äquivalenz zur Vakuumdarstellung (Theorem 2.1.4 oben) benutzen, um Darstellungen durch Morphismen, hier *Endomorphismen* der universellen Algebra zu beschreiben.

Proposition 2.1.6:[FRE/RE/SCHR 92] Zu jeder kovarianten Darstellung π mit positiver Energie des Netzes $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ gibt es einen Endomorphismus ρ der universellen Algebra, so daß

$$\pi \simeq \pi_0 \circ \rho. \tag{2.7}$$

Beweisskizze: Da in diesem Beweis das Konzept des Ladungstransporters zum ersten Mal auftaucht, möchte ich kurz skizzieren, wie man diese Proposition beweist. Einzelheiten sind in [FRE/RE/SCHR 92] zu finden.

[2]Damit ist das Netz auch kein Netz im technischen Sinne. Ich werde dieses Wort der Einfachheit halber trotzdem benutzen.

Es sind für jedes Intervall $J \Subset S^1$ Morphismen $\rho^J : i^J(\mathcal{A}(J)) \to \mathcal{A}_{\text{univ}}$ zu finden, die die Kohärenzeigenschaft:

$$\rho^J|_{i^K(\mathcal{A}(K))} = \rho^K, \quad \text{falls} \quad K \subset J \tag{2.8}$$

erfüllen. Es sei $I \Subset S^1$ beliebig. Nach Theorem 2.1.4 ist die Darstellung π^{I^c} von $\mathcal{A}(I^c)$ äquivalent zur Vakuumdarstellung. Es sei V ein unitärer Operator, der diese Äquivalenz implementiert. Es gilt also

$$\pi^{I^c}(A) = VAV^* \quad (A \in \mathcal{A}(I^c)). \tag{2.9}$$

Sei nun zunächst $J \Subset S^1$ ein Intervall, das I enthält: $I \subset J$. Dann definiert man, wie in der DHR-Theorie:

$$\tilde{\rho}^J(A) \stackrel{\text{def}}{=} V^*\pi^J(A)V \quad (A \in \mathcal{A}(J),\ I \subset J). \tag{2.10}$$

Wie üblich nutzt man die Haag-Dualität aus, um zu zeigen, daß $\tilde{\rho}^J(A)$ ein lokaler Operator ist: Ist $A' \in \mathcal{A}(K^c)$, $J \subset K$ und $A \in \mathcal{A}(J)$, dann folgt mit Gleichung (2.9):

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}^J(A)A' &= V^*\pi^J(A)VA' \\
&= V^*\pi^J(A)\pi^{K^c}(A')V \\
&= V^*\pi^{K^c}(A')VV^*\pi^J(A)V \\
&= A'\tilde{\rho}^J(A).
\end{aligned}$$

Für jedes $K \supset J$ ist also $\tilde{\rho}^J(A) \in \mathcal{A}(K^c)' = \mathcal{A}(K)$. Man kann also einen Morphismus definieren durch:

$$\rho^J(i^J(A)) \stackrel{\text{def}}{=} i^K(\tilde{\rho}^J(A)) \quad J \supset I,\ K \supset J,\ A \in \mathcal{A}(J). \tag{2.11}$$

Um einen Endomorphismus für ganz $\mathcal{A}_{\text{univ}}$ zu erhalten, muß man noch eine Vorschrift für Observablen A angeben, die in einem Intervall J, mit $J \supset I^c$ lokalisiert sind. Für solche Operatoren ist $\tilde{\rho}^J(A)$ (Gleichung (2.10)) i. a. kein lokaler Operator mehr. Es ist aber ein *Produkt* lokaler Operatoren. Dies kann man für die Definition des Endomorphismus ausnutzen.

Es sei $J \supset I^c$, $A \in \mathcal{A}(J)$, $g \in PSU(1,1)$, mit $gI^c = J$ und $B \in \mathcal{A}(I^c)$, mit $U(g)BU^*(g) = A$. Dann gilt aufgrund der Kovarianz der Darstellung π:

$$\begin{aligned}
\pi^J(A) = \pi^{gI^c}(U(g)BU^*(g)) &= U_\pi(\tilde{g})\pi^{I^c}(B)U_\pi^*(\tilde{g}) \\
&= U_\pi(\tilde{g})VBV^*U_\pi^*(\tilde{g}) \\
&= U_\pi(\tilde{g})VU^*(g)AU(g)VU_\pi^*(\tilde{g}),
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
V^*\pi^J(A)V &= V^*U_\pi(\tilde{g})VU^*(g)AU(g)V^*U_\pi^*(\tilde{g})V \\
&= V^*(\tilde{g})AV(\tilde{g}), \quad \text{mit} \quad V(\tilde{g}) = U(g)V^*U_\pi^*(\tilde{g})V.
\end{aligned}$$

Nun ist $V(\tilde{g}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein lokaler Operator: Es sei $A' \in \mathcal{A}(g^{-1}I^c)$. Dann folgt wegen $I^c \subset J = gI^c$: $A' \in \mathcal{A}(g^{-1}I^c) \subset \mathcal{A}(I^c)$. Mit Gleichung (2.9) erhält man:

$$A' = V^*(\tilde{g})A'V(\tilde{g}).$$

Mit der Haag-Dualität ist somit $V(\tilde{g}) \in \mathcal{A}(g^{-1}I^c)' = \mathcal{A}(g^{-1}I)$. Man definiert nun

$$\rho^J(i^J(A)) \stackrel{\text{def}}{=} i^{g^{-1}I}(V^*(\tilde{g}))i^J(A)i^{g^{-1}I}(V(\tilde{g})) \quad A \in \mathcal{A}(J),\ J \supset I^c. \tag{2.12}$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Definitionen (2.11) und (2.12) kompatibel sind und nicht von der Wahl des Intervalles J und damit von g bzw. dem Intertwiner $V(\tilde{g})$ abhängen. Dies ist in [FRE/RE/SCHR 92] getan und ich verweise auf diese Arbeit. □

Hat man erst einmal die Beschreibung von Darstellungen durch Endomorphismen zur Hand, so kann man viele Eigenschaften dieser Darstellungen anhand von Endomorphismen beschreiben. Insbesondere kann man das Produkt von Darstellungen durch das Hintereinanderausführen von Endomorphismen definieren. Sind $\pi_1 \simeq \pi_0 \circ \rho_1$ und $\pi_2 \simeq \pi_0 \circ \rho_2$ zwei "Einteilchendarstellungen", so beschreibt die Darstellung:

$$\pi_1 \times \pi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_0 \circ \rho_1 \circ \rho_2 \tag{2.13}$$

die Anwesenheit von zwei Teilchen. Viele physikalische Begriffe, wie z.B. die Statistik von Teilchen lassen sich so mit Hilfe von Endomorphismen verstehen [DHR 71, HAAG 92, FRE/RE/SCHR 89].

2.2 Wightman-Felder

Ich möchte noch auf die Beschreibung einer chiralen, konformen Quantenfeldtheorie durch Wightman-Felder im Rahmen von [STR/WIGH 64] [JOST 65] eingehen. Hier werden die physikalischen Freiheitsgrade durch operatorwertige Distributionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ beschrieben. Der Einfachheit halber nehme ich $n = 1$ an und nenne $\phi = \phi_1$. Es sei $\mathcal{S}(S^1)$ der Raum aller Testfunktionen auf S^1, $\mathcal{H}$ der Vakuumhilbertraum mit Vakuumvektor Ω. Für alle $f \in \mathcal{S}(S^1)$ ist also $\phi[f]$ ein unbeschränkter Operator in $\mathcal{H}$. Der gemeinsame, unter den Feldern $\phi[f]$ invariante Definitionsbereich $\mathcal{D}$ enthält den Unterraum $\mathcal{D}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(S^1)\Omega$, der entsteht, wenn man alle Polynome in den Feldern auf den Vakuumvektor anwendet. Es sei für ein beliebiges Wightman-Feld X in $\mathcal{H}$:

$$X[f]^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} X[f]^*|_{\mathcal{D}_0}. \tag{2.14}$$

Bezeichnet $f \mapsto \bar{f}$ den Übergang zur komplex konjugierten Funktion, so ist ein Feld X hermitesch, wenn $X[f]^\dagger = X[\bar{f}]$ gilt.

Die physikalischen Eigenschaften der Lokalität, Kovarianz und Energie-Positivität werden jetzt wie folgt formuliert:

(i) Es seien f und g Testfunktionen auf S^1, mit disjunktem Träger. Dann gilt:

$$[\phi[f], \phi[g]]\psi = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}_0. \tag{2.15}$$

(ii) Es gibt eine Darstellung U der Gruppe $PSU(1,1)$ in $\mathcal{H}$ und ein $s \in \mathbb{N}$ (den konformen Spin), so daß:

$$U(g)\Omega = \Omega \quad U(g)\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0 \quad \forall g \in PSU(1,1) \tag{2.16}$$

und

$$U(g)\phi[f]U^*(g) = \phi[f_g], \quad f_g(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{d(g^{-1}z)}{dz})^{-(s-1)} f(g^{-1}z). \tag{2.17}$$

(iii) Der Erzeugende der Rotationen $U(r(t))$ hat nichtnegatives Spektrum.

Es sei ϕ ein kovariantes Wightman-Feld auf S^1 mit Spin s. Man definiert Operatoren ϕ_n, $n \in \mathbb{Z}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_0$ durch:

$$\phi_n \stackrel{\text{def}}{=} \phi[z^n]. \tag{2.18}$$

Ist $f \in \mathcal{S}(S^1)$ eine Testfunktion mit Fourier-Zerlegung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^{-n}$, dann folgt aus dieser Formel: $\phi[f] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n f_{-n}$. Die Distribution $S^1 \ni z \mapsto \phi(z)$ läßt sich dann formal ebenfalls als Fourier-Reihe schreiben:

$$\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^{-(n+s)}, \quad \phi(z)^* = z^{2s}\phi(z).$$

Formal gilt dann: $\phi[f] = \int \phi(z) f(z) z^s \frac{dz}{2\pi i z}$. Diese Formeln werde ich in einem späteren Kapitel ausnützen. Ein unter der Darstellung U kovariantes Feld nennt man auch *quasiprimär*.

Aus der Spektrumsbedingung für den konformen Hamiltonian kann man folgende wichtige Eigenschaft für die Fourier-Moden ϕ_n des chiralen Feldes ableiten.

Proposition 2.2.1: Es sei $\Omega \in \mathcal{H}$ der Vakuumvektor. Dann gilt für die Fourier-Moden des Feldes ϕ:

$$\phi_{-k_n} \cdots \phi_{-k_1}\Omega \neq 0 \Rightarrow \sum_{r=1}^{j} k_j \geq 0 \; \forall j = 1, \ldots, n. \tag{2.19}$$

Insbesondere ist $\phi_n\Omega = 0$, falls $n > 0$.

Ich möchte noch diskutieren, wie man aus Wightman-Feldern ein lokales Netz konstruieren kann. Eine naheliegende Möglichkeit, einem Feld X lokale Algebren zuzuordnen wäre, beschränkte Funktionen der Operatoren $X(f)$ zu betrachten, wobei f über alle Testfunktionen läuft, die Träger in einem gegebenen Intervall von S^1 besitzen. Diese Definition setzt jedoch Kenntnisse über die Selbstadjungiertheit der Operatoren $X(f)$ voraus, die im allgemeinen für Wightman-Felder nicht bekannt sind und oft auch nicht gelten. Auch tritt die Schwierigkeit auf, daß die so gewonnenen Algebren nicht unbedingt das Prinzip der Lokalität erfüllen müssen. Es gibt durchaus wesentlich selbstadjungierte Operatoren mit gemeinsamen dichten Definitionsbereich, die auf diesem Bereich im Sinne von (2.15) kommutieren, deren beschränkte Funktionen jedoch nicht alle miteinander kommutieren [RE/SI 80].

Eine Definition, die zumindest die erste dieser Schwierigkeiten umgeht, kann man folgendermaßen motivieren. Es sei $\mathcal{A}_X(I)$ eine lokale Algebra, die in einer Weise dem Feld X zugeordnet sei. Sinnvollerweise sollte diese Algebra aus beschränkten Operatoren bestehen, die mit den Operatoren $X(f)$ vertauschen, falls f Träger im Komplement I^c von I hat. Es liegen nun zwei Möglichkeiten auf der Hand, lokale Algebren zu definieren. Die erste ist, daß sie aus *allen* beschränkten Operatoren besteht, die mit solchen $X(f)$ vertauschen. Es ist jedoch nicht klar, ob diese Menge überhaupt eine Algebra bildet. Die zweite Möglichkeit besteht darin, daß man in einem gewissen Sinne die Doppelkommutante nimmt:

Definition 2.2.2: Es sei I ein Intervall auf S^1 und X ein Wightmanfeld in $\mathcal{H}$. Die *lokalisierte* schwache Kommutante ist

$$\mathcal{P}_X(I) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | (A\phi, X(f)\psi) = (AX(f)^\dagger\phi, \psi) \tag{2.20}$$

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}_0, \text{ und } \operatorname{supp}(f) \subset I\Big\}. \tag{2.21}$$

Algebren, die dem Gebiet I zugeordnet sind, werden definiert durch:

$$\mathcal{A}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_X(I)'. \tag{2.22}$$

Es bleibt wiederum die Frage zu klären, wann die Zuordnung $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ ein lokales Netz von von Neumann-Algebren definiert, d.h. wann die Inklusion

$$\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(I^c)'$$

gilt. Lokalität gilt auf alle Fälle dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind [DRI/SUM/WICH 86]:

1. Die $\mathcal{P}_X(I)$ sind Algebren.

2. Es gibt ein Intervall $I \Subset S^1$, so daß $\mathcal{A}(I)\Omega$ dicht in $\mathcal{H}_X$, dem Hilbert-Raum der Wightman-Theorie ist[3].

Für das erste Kriterium gibt es eine hinreichende Bedingung, die im allgemeinen gut nachzuprüfen ist. Eine auf unseren Fall angepaßte und etwas abgeschwächte Form dieser Bedingung lautet [DRI/SUM/WICH 86]:

> **Lemma 2.2.3:** Es sei H der konforme Hamiltonoperator. Dann ist $\mathcal{P}_X(I)$ eine Algebra, wenn für alle f mit $\text{supp}(f) \Subset I$ und alle $\psi \in \mathcal{D}_0$ Konstanten $c_f^k > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existieren, mit
>
> $$\|X(f)\psi\| \leq c_f^k \|(H + \text{id})^n \psi\|.$$

Man sagt dann, das Feld erfüllt eine polynomiale Energie-Abschätzung. Solche Abschätzungen sind in der Regel erfüllt, d.h. die schwachen Kommutanten sind normalerweise Algebren. Die zweite Bedingung ist im allgemeinen sehr viel schwieriger nachzuprüfen. Ich möchte dazu nur bemerken, daß für den Fall *linearer* Energie-Abschätzungen noch relativ handliche Kriterien existieren, wann die Algebren $\mathcal{A}(I)$ lokal sind [DRIE/FRÖ 77] (siehe auch [BOR/YNG 90] und [BUCHHOLZ 90] für den allgemeinen Fall).

[3]Das ist der Unterraum von $\mathcal{H}$ der aus der Wightman-Rekonstruktion mit dem Feld X hervorgeht.

Kapitel 3

Abelsche Stromalgebren auf dem Kreis und ihre lokalen Erweiterungen

In diesem Kapitel stelle ich abelsche Stromalgebren über einem euklidischen Vektorraum vor. Im allgemeinen versteht man unter einer chiralen Stromalgebra auf dem Kreis Modelle, die von Wightman-Feldern J^a erzeugt werden, die den Vertauschungsrelationen (1.1) genügen. Um Schwierigkeiten der Definition solcher Distributionen zu umgehen, werde ich den Ideen des Haag-Kastler-Programmes folgend diese Modelle abstrakt als *-Algebren definieren. Anschließend wird die Darstellungstheorie der entsprechenden lokalen Netze bzw. der universellen Algebra untersucht. Es wird sich zeigen, daß es eine *überabzählbare* Menge inäquivalenter irreduzibler Darstellungen der universellen Algebra gibt. Eine treue Darstellung kann nur auf einem nichtseparablen Hilbert-Raum gefunden werden. Um zu Modellen zu gelangen, deren physikalischer Hilbert-Raum separabel ist, betrachte ich *lokale* Erweiterungen solcher Stromalgebren. Derartige Erweiterungen lassen sich in einer einfachen Weise durch integrale gerade Gitter klassifizieren. Dies führt dann unter anderem zu Modellen der chiralen konformen Quantenfeldtheorie, die von Darstellungen einer Loopgruppe erzeugt werden. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind im wesentlichen in der Literatur zu finden, lediglich die Betonung auf die lokalen Algebren ist neu und knüpft an die Ergebnisse von Buchholz, Mack und Todorov [BMT 88] an. Viele der Ergebnisse können direkt aus dieser Arbeit übernommen werden, so daß ich mich oft kurz fasse. Die gesamte Analyse kann auch als Spezialfall der Superauswahlanalyse für *einfache* Sektoren á la DHR [DHR 69 I, DHR 69 II] angesehen werden. Unter diesem Gesichtspunkt lassen sich die lokalen Erweiterungen als DHR-Feldalgebra *bosonischer* Sektoren zur Stromalgebra auffassen. Diesen Zusammenhang werde ich kurz skizzieren. Daraus ergibt sich vor allem, daß die Stromalgebra der eichinvariante Anteil der lokalen Erweiterung unter der Wirkung einer kompakten, abelschen Eichgruppe (1. Art) ist.

3.1 Abelsche Stromalgebren

Abelsche Stromalgebren auf S^1 sind durch die erzeugenden Felder J^i, $i = 1, \ldots, n$, mit folgenden Relationen definiert:

$$[J^i(z_1), J^j(z_2)] = -g^{ij}\delta'(z_1 - z_2).$$

Dabei ist g^{ij} eine positive, symmetrische Matrix (d.h. eine Metrik) und $\delta'(z_1 - z_2)$ ist die Ableitung der Delta-Distribution auf dem Kreis: $\int \frac{dz}{2\pi i} f(z)\delta'(z - z') = -f'(z')$.

Das Attribut abelsch kommt daher, daß man die rechte Seite in den Vertauschungsrelationen als Schwinger-Term ansehen kann (siehe auch Gleichung (1.1)). Da diese Objekte selbst nach Verschmierung mit glatten Testfunktionen noch unbeschränkte Operatoren sind, ist es ratsam nur beschränkte Funktionen dieser Operatoren zu betrachten. Es sei $J^i[f] = \int \frac{dz}{2\pi i} J^i(z) f(z)$. Dann liefert die formale Rechnung mit der BCH-Formel für die Operatoren $e^{iJ^k[f]}$ die Relationen:

$$e^{iJ^k[f]}e^{iJ^l[g]} = e^{-\frac{1}{2}g^{kl}\int \frac{dz}{2\pi i} f' g}\, e^{i(J^k[f]+J^l[g])}.$$

Dies sind im wesentlichen die Relationen, auf die ich die Theorie der Stromalgebren aufbauen möchte. Es ist jedoch nützlich die Metrik koordinatenfrei zu schreiben. Ich beginne mit einigen Definitionen.

Es sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n < \infty$ mit (*euklidischem*) inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ich bezeichne mit LV den Vektorraum aller glatten Funktionen von S^1 nach V (das sind die Loops in V). Ein Element $f \in LV$ besitzt die Fourier-Entwicklung $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^{-n}$, wobei die Koeffizienten in $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, der Komplexifizierung von V liegen und die Realitätsbedingung $f_n{}^* = f_{-n}$ erfüllen. Dabei ist $V_{\mathbb{C}} \ni v \mapsto v^* \in V_{\mathbb{C}}$, die (kanonisch definierte) antilineare Involution (komplexe Konjugation) auf $V_{\mathbb{C}}$. Die hermitesche Fortsetzung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nach $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}}$, die linear in dem zweiten Argument ist, wird im folgenden ebenfalls mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Auf LV seien eine schiefsymmetrische Bilinearform A und eine Halbnorm $\| \cdot \|$ definiert durch:

$$\|f\|^2 = \sum_{n \geq 1} n |f_{-n}|^2, \qquad A(f, h) = \int \frac{dz}{2\pi i} \langle f'(z), h(z) \rangle,$$

wobei $|f_{-n}|^2$ durch $\langle f_{-n}, f_{-n} \rangle$ $(= \langle f_n, f_n \rangle)$ gegeben ist.

Bemerkung: Ich benutze mit $\frac{dz}{2\pi i}$ ein komplexes Maß auf S^1. Weiterhin bildet die Ableitung $\frac{d}{dz}$ LV nicht in sich selber ab. Es läßt sich jedoch leicht nachrechnen, daß die Kombination, die in A auftaucht, so gewählt ist, daß iA auf $LV \times LV$ reellwertig ist.

Bezeichnet man die Wirkung der Möbiusgruppe $PSU(1,1)$ auf S^1 wieder mit $z \mapsto gz$, dann operiert die Spin-1 Darstellung von $PSU(1,1)$ auf LV:

$$u(g)f(z) \equiv f_g(z) := f(g^{-1}z).$$

Sei nun ρ eine glatte Testfunktion auf S^1 mit Werten in $V_{\mathbb{C}}$, so daß $z\rho(z) \in V$ ist, für $z \in S^1$. Solch eine Funktion induziert ein stetiges, lineares und reellwertiges Funktional $\rho[\cdot]$ auf LV, via: $\rho[f] = \int \frac{dz}{2\pi i} \langle \rho(z), f(z) \rangle$. Es ist dann $\rho(z)dz$ eine (V-wertige) Eins-Form, und ich werde der Kürze wegen ρ selbst Eins-Form nennen. Eine Eins-Form ρ heißt lokalisiert in einem Intervall $I \subset S^1$, wenn der Träger von ρ in I enthalten ist.

Bezeichnet $\tilde{u}$ die zu u duale (oder kontragrediente) Darstellung, so wirkt diese folgendermaßen auf den Eins-Formen:

$$\tilde{u}(g)\rho(z) = \frac{d(g^{-1}z)}{dz} \cdot \rho(g^{-1}z).$$

Nach diesen Vorbereitungen möchte ich die abelsche Stromalgebra $\mathcal{U}$ über dem Vektorraum V definieren. Abweichend von dem Vorgehen im zweiten Kapitel, führe ich das Netz durch eine Definition mittels Erzeugenden und Relationen ein. Dieses Netz besteht dann also nicht aus konkreten Algebren in einem Hilbert-Raum, sondern aus abstrakt definierten $*$-Algebren. Mit Hilfe der Vakuum-Darstellung erhält man die lokalen von Neumann-Algebren.

Sei also V wie oben fest gewählt. Die abelsche Stromalgebra $\mathcal{U}$ über V ist definiert als $*$-Algebra mit Erzeugenden $W(f)$, $f \in LV$, und Relationen

$$W(f)W(h) = e^{-\frac{1}{2}A(f,h)}W(f+h) \tag{3.1}$$
$$W^*(f) = W(-f). \tag{3.2}$$

Die lokale Struktur ist auf folgende kanonische Weise definiert: $\mathcal{U}(I)$ sei die Unteralgebra von $\mathcal{U}$, die von allen $W(f)$ mit $\text{supp}(f) \subset I$ erzeugt wird. Offensichtlich gilt die Isotonie: $\mathcal{U}(I) \subset \mathcal{U}(J)$ für $I \subset J$. Die Lokalität folgt aus (3.1):

$$A \in \mathcal{U}(I),\ B \in \mathcal{U}(I^c) \Rightarrow [A, B] = 0.$$

Weiterhin hat man eine natürliche Wirkung von $PSU(1,1)$ auf $\mathcal{U}$: $PSU(1,1) \ni g \mapsto \alpha_g \in \text{Aut}(\mathcal{U})$, $\alpha_g(W(f)) = W(u(g)f)$. Diese Wirkung ist lokal: $\alpha_g(\mathcal{U}(I)) = \mathcal{U}(gI)$.

Ich möchte nun die Darstellungstheorie der Algebra $\mathcal{U}$ bzw. des Netzes $I \mapsto \mathcal{U}(I)$ untersuchen. Die wichtigsten physikalische Auswahlkriterien wurden dabei schon im letzten Kapitel diskutiert.

Es sei $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ eine kovariante Darstellung der Algebra $\mathcal{U}$, mit positiver Energie. Dann lassen sich die Automorphismen α_g, $g \in PSU(1,1)$, durch unitäre Operatoren $U_\pi(g)$ in $\mathcal{H}_\pi$ implementieren. Die Rotationen werden dabei durch eine Einparametergruppe $U_\pi(r(t)) = e^{iH_\pi t}$ implementiert, deren Erzeugender H_π nichtnegatives Spektrum hat. Dies führt zu einer wichtigen Konsequenz.

> **Proposition 3.1.1**: Jede kovariante Darstellung $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ der Algebra $\mathcal{U}$ mit positiver Energie ist direkte Summe von Grundzustandsdarstellungen. D.h., es gibt Vektoren $\Omega_i \in \mathcal{H}_\pi$, i aus einer Indexmenge ι, so daß die Unterräume $\mathcal{H}_i = \pi(\mathcal{U})\Omega_i$ paarweise orthogonal sind, $\mathcal{H}_\pi = \sum_i \mathcal{H}_i$ gilt, und Ω_i ein Eigenvektor von H_π mit minimalem Eigenwert in $\mathcal{H}_i$ ist.

Für einen Beweis dieser Aussage siehe z.B. [BMT 88] (für den Fall $\dim(V) = 1$).

Ein zusätzliches Auswahlkriterium an die Darstellungen von $\mathcal{U}$ resultiert daraus, daß bisher keine topologischen Bedingungen an die Algebra $\mathcal{U}$ gestellt wurden: Man verlangt, daß für jede Grundzustandsdarstellung $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$, mit Grundzustand $\omega_\pi(\cdot) = (\Omega, \pi(\cdot)\Omega)$, die Abbildung: $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \omega_\pi(W(\lambda f))$ stetig bei Null ist, für alle $f \in LV$. ω_π heißt dann *regulär*. Diese Eigenschaft impliziert, daß die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \pi(W(tf)), \quad f \in LV$$

stark-stetig bei $t = 0$ ist und die Stromfelder $J[f] = \frac{d}{d\lambda}\pi\left(W(\lambda f)\right)|_{\lambda=0}$ als unbeschränkte Operatoren mit den gewünschten Kommutatoreigenschaften existieren.

Das Zentrum, $Z(\mathcal{U})$, von $\mathcal{U}$ wird erzeugt von den Operatoren $W(c)$, wobei c über alle konstanten Testfunktionen mit Werten in V läuft. Um die Möglichkeiten des Spektrums dieser Operatoren in einer Darstellung einzuschränken, mache ich noch die zusätzliche Einschränkung, daß eine Darstellung lokal durch Felder erzeugt wird. Genauer gesagt, soll für die hier betrachteten Darstellungen $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ gelten:

Zu jedem abgeschlossenen Intervall $I \subset S^1 \setminus \{-1\}$ existiert eine (von Neumann) Algebra $\mathcal{F}(I) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$, mit:

1.
$$\pi(\mathcal{U}(I)) \subset \mathcal{F}(I) \subset \pi(\mathcal{U}(I^c))'.$$
Das heißt, daß die Observablen in den Feldern enthalten sind, und diese relativ lokal zu den Observablen sind.

2. Es gibt eine Darstellung e^{itL_0} der Zeittranslationen, so daß
$$e^{itL_0}\mathcal{F}(I)e^{-itL_0} \subset \mathcal{F}(J),$$
falls nur der Abschluß von I in dem Inneren von J enthalten ist, und t genügend klein ist. Ferner sei $L_0 \geq 0$ und habe 0 als einfachen Eigenwert. Der zugehörige Eigenvektor Ω ist das Vakuum.

3. Die Feldalgebren $\mathcal{F}(I)$ haben die Reeh-Schlieder-Eigenschaft. D.h. der Vakuumvektor Ω ist zyklisch und separierend für jede Algebra $\mathcal{F}(I)$ mit $I \Subset S^1$.

4. Die Operatoren $\pi(W(c))$, c eine konstante Funktion in LV, haben reines Punktspektrum.

Ich will nun einige Konsequenzen aus diesen Eigenschaften ziehen. Eine irreduzible Grundzustandsdarstellung $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ mit Grundzustand Ω ist über die GNS-Konstruktion vollständig durch das Funktional $\omega_\pi(\cdot) = (\Omega, \pi(\cdot)\Omega)$ bestimmt. Wie im Fall $\dim(V) = 1$ zeigt man nun, daß die irreduziblen Grundzustandsdarstellungen durch Vektoren in V parametrisiert sind. Genauer: Für jedes $\alpha \in V$ induziert der Zustand ω_α:
$$\omega_\alpha(W(f)) = e^{i(\alpha, f_0) - \frac{1}{2}\|f\|}, \quad \text{mit} \quad f_0 = \int \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z}f(z), \tag{3.3}$$
eine irreduzible Grundzustandsdarstellung $(\pi_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ von $\mathcal{U}$. Die Darstellungen zu verschiedenen α sind paarweise inäquivalent. Von besonderer Bedeutung ist der Fall $\alpha = 0$. Das ist die Vakuumdarstellung. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß die Automorphismen α_g, $g \in PSU(1,1)$, durch unitäre Operatoren $U(g)$ implementiert werden, die den Grundzustand (3.3) (für $\alpha = 0$) invariant lassen. Im nächsten Kapitel werde ich zeigen, wie man diese Darstellung im Fockraum realisieren kann.

Wie oben bemerkt, sind alle positiven Energie-Darstellungen direkte Summen solcher irreduzibler Darstellungen. Die Bedingung, daß eine Darstellung $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ lokal durch Felder erzeugt wird, macht Einschränkungen darüber, *welche* irreduziblen Darstellungen in dieser Zerlegung vorkommen können und mit welcher Vielfachheit.

Schreibt man die Zerlegung einer positiven-Energie-Darstellung $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ nach den irreduziblen Grundzustandsdarstellungen $(\pi_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ als:

$$\mathcal{H}_\pi = \sum_{\alpha \in V_0} d(\alpha)\mathcal{H}_\alpha,$$

wobei V_0 eine Teilmenge von V ist und $d(\alpha)$ die Vielfachheit von $\mathcal{H}_\alpha$ in $\mathcal{H}$ zählt, so implizieren 1.,2.,3. und 4., wie im Fall $\dim(V) = 1$ [BMT 88]:

- Es existiert ein $\alpha_0 \in V$ und eine Untergruppe $L \subset V$, so daß $V_0 - \alpha_0 = L$, und
- $d(\alpha) = 1$, für alle α in V_0.

Die Forderung nach Implementierbarkeit durch Felder führt also dazu, daß die relevanten Darstellungen durch *Untergruppen* des Vektorraumes V charakterisiert werden. Die heuristische Begründung dieses Sachverhaltes ist, daß man die ladungstragenden Felder multiplizieren kann und ihre Ladungen sich dabei addieren.

Lokalisierte Automorphismen und geladene Felder. Nach der allgemeinen Aussage von Satz 2.1.4 sind alle kovarianten Darstellungen von $\mathcal{U}$ mit positiver Energie lokal äquivalent zur Vakuumdarstellung. Es gibt also, falls π eine positive-Energie-Darstellung ist, ein Intervall $I \Subset S^1$, so daß

$$\pi|_{\mathcal{U}(I^c)} \simeq \pi_0|_{\mathcal{U}(I^c)}.$$

Ich will zeigen, wie solche lokalisierten Darstellungen durch lokalisierte Automorphismen von $\mathcal{U}$ induziert werden und diese sich durch geladene Felder in einer treuen Darstellung von $\mathcal{U}$ implementieren lassen.

Sei, für $\alpha \in V$, γ_α ein Automorphismus von $\mathcal{U}$, definiert durch

$$\gamma_\alpha(W(f)) = e^{i\langle\alpha, f_0\rangle}W(f).$$

Die γ_α erfüllen $\gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2} = \gamma_{\alpha_1+\alpha_2}$ und $\omega_\alpha = \omega_0 \circ \gamma_\alpha$. Weil die irreduziblen Darstellungen durch das Funktional ω_α vollständig bestimmt sind, folgt aus dieser Formel auch: $\pi_\alpha \simeq \pi_0 \circ \gamma_\alpha$. Die irreduziblen positiven-Energie-Darstellungen von $\mathcal{U}$ lassen sich also durch Automorphismen in der Vakuumdarstellung implementieren.

Es sei nun ρ eine lokalisierte Eins-Form mit Träger in $I \Subset S^1$, $\rho[\cdot]$ das durch ρ induzierte lineare Funktional auf LV. Durch die Vorschrift $\gamma_\rho(W(f)) = e^{i\rho[f]}W(f)$ wird ein Automorphismus der Algebra $\mathcal{U}$ definiert. Dieser Automorphismus ist in I lokalisiert: $\gamma_\rho(W) = W$, falls $W \in \mathcal{U}(I^c)$. Bezeichnet $\alpha_\rho \in V$ die Ladung von ρ, d.h. $\alpha_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dz}{2\pi i}\rho$, dann ist weiterhin die Darstellung $\pi_0 \circ \gamma_\rho$ von $\mathcal{U}$ äquivalent zur Darstellung π_{α_ρ}. Ist nämlich $\alpha(z) = \frac{\alpha_\rho}{z}$, dann gilt $\rho[f] - \langle\alpha_\rho, f_0\rangle = \rho[f] - \alpha[f]$, und die Funktion $\tilde{\rho}(z) = \rho(z) - \alpha(z)$ hat Gesamtintegral 0: $\int \frac{dz}{2\pi i}\tilde{\rho} = 0$. Es existiert also eine Funktion $\bar{\rho} \in LV$ mit $i\frac{d}{dz}\bar{\rho}(z) = \tilde{\rho}(z)$. Es folgt

$$\gamma_{\tilde{\rho}} \circ \gamma_{\alpha_\rho}^{-1}(W(f)) = e^{i\tilde{\rho}[f]}W(f) = W(\bar{\rho})W(f)W^*(\bar{\rho}).$$

Damit ist für $W \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \pi_0 \circ \gamma_\rho(W) &= \pi_0\left(\gamma_\rho \circ \gamma_{\alpha_\rho}^{-1}\left(\gamma_{\alpha_\rho}(W)\right)\right) \\ &= \pi_0\left(\mathrm{Ad}\left(W(\bar{\rho})\right)\gamma_{\alpha_\rho}(W)\right) \\ &= \mathrm{Ad}\left(\pi_0\left(W\left(\bar{\rho}\right)\right)\right)\pi_{\alpha_\rho}(W), \end{aligned}$$

und der unitäre Operator $\pi_0(W(\bar{\rho}))$ liefert eine Äquivalenz zwischen π_{α_ρ} und $\pi_0 \circ \gamma_\rho$.

Geladene Sektoren können also in dieser Weise durch lokalisierte Automorphismen der Observablen-Algebra erzeugt werden. Ziel ist es nun, diese Automorphismen durch geladene Felder in einem geeigneten Hilbert-Raum zu implementieren. Man sucht also einen Hilbert-Raum und unitäre Operatoren ψ_ρ in diesem Hilbert-Raum mit $\psi_\rho^* W \psi_\rho = \gamma_\rho(W)$ $(W \in \mathcal{U})$.

Um dies zu tun, definiert man folgende *universelle* Darstellung $(\hat{\pi}, \hat{\mathcal{H}})$: Die Elemente von $\hat{\mathcal{H}}$ sind Folgen $\Phi = \{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in V}$, deren Komponenten Φ_α für $\alpha \in V$ Elemente in $\mathcal{H}_0$ sind, so daß Φ_α nur für abzählbar viele α von Null verschieden ist und so, daß die Norm in $\hat{\mathcal{H}}$:

$$\|\Phi\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in V} \|\Phi_\alpha\|_0^2,$$

endlich ist. (Hier ist $\|\cdot\|_0$ die Norm in $\mathcal{H}_0$.) Die Darstellung $\hat{\pi}$ ist definiert durch die Vorschrift:

$$(\hat{\pi}(W)\Phi)_\alpha = \pi_0(\gamma_\alpha(W))\Phi_\alpha, \quad W \in \mathcal{U}.$$

Im Gegensatz zu den irreduziblen Darstellungen π_α, $\alpha \in V$, ist die Darstellung $\hat{\pi}$ treu, d.h. aus $\hat{\pi}(W) = 0$ folgt $W = 0$.

Ist $t \mapsto e^{itH_0}$ die Darstellung der starren Rotationen in $\mathcal{H}_0$, so definiert man die unitären Zeitentwicklungsoperatoren $\hat{R}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ in $\hat{\mathcal{H}}$, durch:

$$\left(\hat{R}(t)\Phi\right)_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{i}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle t} e^{iH_0 t}\Phi_\alpha. \tag{3.4}$$

Die Abbildung $t \mapsto \hat{R}(t)$ ist somit eine unitäre Darstellung der universellen Überlagerung $\mathbb{R}$ von $U(1)$.

Weiterhin führt man unbeschränkte Ladungs-Operatoren $\langle Q, \gamma\rangle$, $\gamma \in V$, ein:

$$(\langle Q, \gamma\rangle\Phi)_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \langle\alpha, \gamma\rangle\Phi_\alpha.$$

Die unitären Operatoren $\exp(i\langle Q, \gamma\rangle) = \hat{\pi}(W(\gamma))$ erzeugen dann das Zentrum von $\hat{\pi}(\mathcal{U})$.

Es wird sich als nützlich erweisen, noch folgende Notation einzuführen: Ist $V_0 \subset V$ eine additive Untergruppe des Vektorraumes V, so sei $\mathcal{H}_{V_0} \subset \hat{\mathcal{H}}$ der Unterraum von $\hat{\mathcal{H}}$, der aus Vektoren Φ besteht, deren Komponenten Φ_α nur für $\alpha \in V_0$ ungleich Null sind:

$$\Phi \in \mathcal{H}_{V_0} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_\alpha = 0 \text{ falls } \alpha \notin V_0. \tag{3.5}$$

Man kann nun, vollkommen analog zum Fall $\dim(V) = 1$, Ladungserzeuger Γ_α $(\alpha \in V)$ in $\hat{\mathcal{H}}$ einführen durch: $(\Gamma_\alpha\Phi)_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\beta-\alpha}$. Die Γ_α sind unitär und erfüllen die Relationen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_1}\Gamma_{\alpha_2} &= \Gamma_{\alpha_1+\alpha_2} \\ \Gamma_\alpha^*\hat{\pi}(W)\Gamma_\alpha &= \hat{\pi}(\gamma_\alpha(W)), \quad W \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Mehr als das: definiert man für $W_\alpha \in \mathcal{U}$, $\alpha \in V$, einen Operator $\oplus_{\alpha \in V}\pi_\alpha(W_\alpha)$ in $\hat{\mathcal{H}}$ durch

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in V}\pi_\alpha(W_\alpha)\Phi\right)_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \pi_0(\gamma_\beta(W_\beta))\Phi_\beta,$$

so gilt offensichtlich:

$$\Gamma^*_\beta \bigoplus_{\alpha\in V} \pi_\alpha(W_\alpha)\Gamma_\beta = \bigoplus_{\alpha\in V} \pi_\alpha(W_{\alpha-\beta}). \tag{3.6}$$

Die Operatoren Γ_α implementieren also die Automorphismen γ_α. Die Automorphismen γ_ρ, mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho = \alpha$ sind aber äquivalent zu diesen. Man macht nun für die ladungstragendenden Felder den Ansatz $\psi_\rho = \hat{\pi}(W(u)) \cdot \Gamma_\alpha$, für $u \in LV$ und bestimmt u durch Konsistenzbedingungen. Die explizite Konstruktion für den Fall $V = \mathbb{R}$ wurde in [BMT 88] durchgeführt. Diese Konstruktion kann man fast wortwörtlich übernehmen, so daß ich nicht auf die Details eingehen möchte, sondern, nach einigen notwendigen Definitionen, das Ergebnis angeben werde.

Sei als erstes eine lokalisierte Eins-Form ρ, mit $\text{supp}(\rho) \subset I \Subset S^1$ fest vorgegeben. Für einen Punkt $\zeta \in I^c$ bezeichne ich mit $\ln_\zeta(z)$ den Zweig der komplexen Logarithmus-Funktion, der einen Schnitt entlang der Geraden $\{\lambda\zeta | \, \lambda \geq 0\}$ hat und der folgenden Bedingung genügt:

$$\zeta = e^{i\theta_0} \quad (-\pi \leq \theta_0 < \pi) \;\Rightarrow\; \ln_\zeta(z) = \ln|z| + i\theta \quad \text{mit} \quad \theta_0 \leq \theta < 2\pi + \theta_0.$$

Ist $\rho(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_{-n} z^{n-1}$ und $\rho_0 = \alpha_\rho$, dann sei das Element $\bar{\rho} \in LV$ definiert als

$$\bar{\rho}(z) = i \sum_{n\neq 0} \rho_{-n} \frac{z^n}{n} + i \int \frac{dz}{2\pi i}\rho(z) \ln_\zeta(z).$$

Diese Funktion ist eine Stammfunktion von $i\left(\rho(z) - \frac{\alpha_\rho}{z}\right)$:

$$\frac{d}{dz}\bar{\rho}(z) = i\left(\rho(z) - \frac{\alpha_\rho}{z}\right). \tag{3.7}$$

Für zwei lokalisierte Eins-Formen ρ_1 und ρ_2 mit $\text{supp}(\rho_i) \subset S^1 \setminus \{\zeta\}$ und Ladungen α_{ρ_i} $(i = 1, 2)$ sei das bilineare Funktional $\mathcal{T}$ definiert durch:

$$\mathcal{T}(\rho_1, \rho_2) = -A(\bar{\rho_1}, \bar{\rho_2}) - \int \frac{dz}{2\pi i}[\langle\alpha_{\rho_1}, \rho_2(z)\rangle - \langle\alpha_{\rho_2}, \rho_1(z)\rangle] \ln_\zeta(z). \tag{3.8}$$

Die explizite Abhängigkeit von ζ ist dabei nicht notiert. Wie in [BMT 88, Lemma 3.3] sieht man:

> **Lemma 3.1.2:** Sind die Träger von ρ_1 und ρ_2 disjunkt, so hängt $\mathcal{T}$ nur von $\alpha_{\rho_i} = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_i$ $(i = 1, 2)$ und der relativen Lage von $\text{supp}(\rho_i)$ $(i = 1, 2)$ und ζ ab. Es gilt dann:
>
> $$\mathcal{T} = \pm\pi\langle\alpha_{\rho_1}, \alpha_{\rho_2}\rangle, \tag{3.9}$$
>
> wobei das Vorzeichen + ist, wenn man von $\text{supp}(\rho_1)$ nach $\text{supp}(\rho_2)$ in der mathematisch positiven Richtung über ζ läuft, − sonst.

Ich führe weiterhin Phasenfaktoren ein, die sicherstellen daß die Feldoperatoren kovariant unter der Darstellung $\hat{R}(t)$ der Zeittranslationen auf S^1 sind (siehe Theorem 3.1.3 (c) unten):

$$\eta_\zeta(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(\frac{i}{2}\int \frac{dz}{2\pi i}\langle\alpha_\rho, \rho\rangle \ln_\zeta(z)\right).$$

Es gilt

Theorem 3.1.3: (a) Es sei $\zeta \notin \operatorname{supp}\rho$ und $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho = \alpha_\rho$. Dann implementiert der Operator

$$\psi_\rho^\zeta \overset{\text{def}}{=} \eta_\zeta(\rho)\hat{\pi}\left(W(\bar{\rho}_\zeta)\right)\Gamma_{\alpha_\rho} \tag{3.10}$$

den Automorphismus γ_ρ in $\hat{\mathcal{H}}$: $\gamma_\rho(W) = \psi_\rho^{\zeta *} W \psi_\rho^\zeta$, $W \in \hat{\pi}(\mathcal{U})$. Insbesondere sind die Felder ψ_ρ lokal zu den Observablen. Definiert man für $I \subset S^1 \setminus \{\zeta\}$, $\mathcal{F}(I)$ als die von den ψ_ρ^ζ, mit $\operatorname{supp}(\rho) \subset I$, erzeugte $*$-Algebra, so ist

$$\hat{\pi}\left(\mathcal{U}(I)\right) \subset \mathcal{F}(I) \subset \hat{\pi}\left(\mathcal{U}(I^c)\right)'.$$

(b) Sind ρ_1 und ρ_2 lokalisierte Eins-Formen mit Träger in I_1 und I_2, so daß $I_1, I_2 \subset S^1 \setminus \{\zeta\}$ ist, dann gilt die Fusionsregel:

$$\psi_{\rho_1}^\zeta \psi_{\rho_2}^\zeta = e^{\frac{\mathcal{T}}{2}} \psi_{\rho_1+\rho_2}, \tag{3.11}$$

mit der in (3.8) definierten Bilinearform $\mathcal{T}$. Insbesondere gilt also, wenn $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ist:

$$\psi_{\rho_1}^\zeta \psi_{\rho_2}^\zeta = e^{\pm i\pi\langle\alpha_{\rho_1},\alpha_{\rho_2}\rangle} \psi_{\rho_2}^\zeta \psi_{\rho_1}^\zeta.$$

Dabei ist ein positives Vorzeichen für den Fall zu nehmen, daß der Weg von I_1 nach I_2 über ζ in der positiven Richtung durchlaufen wird, ein negatives Vorzeichen sonst.

(c) Die Felder ψ_ρ^ζ sind kovariant unter den Zeittranslationen $\hat{R}(t)$. Genauer: Ist t so, daß $\operatorname{supp}(r(\tau)\rho) \subset S^1 \setminus \{\zeta\}$, für alle $0 \leq \tau \leq t$, dann gilt

$$\hat{R}(t)\psi_\rho^\zeta \hat{R}^*(t) = \psi_{r(t)\rho}^\zeta.$$

(d) Ist der Träger von ρ in einem Intervall $I \subset S^1 \setminus \{\zeta_1, \zeta_2\}$ enthalten, so gilt

$$\psi_\rho^{\zeta_2}\left(\psi_\rho^{\zeta_1}\right)^* = e^{-\sigma i\pi\langle\alpha_\rho,\alpha_\rho\rangle} e^{2\pi i\langle Q,\alpha_\rho\rangle}, \tag{3.12}$$

wobei: $\sigma = 0$, wenn der Weg, der ζ_1 mit ζ_2 verbindet und über I läuft, auch über -1 läuft, $\sigma = 1$, wenn er nicht über -1 läuft und positiv orientiert ist, und $\sigma = -1$ sonst.

Bemerkungen: (a) Wie oben schon bemerkt, ist der Faktor η in der Definition (3.10) der Feldoperatoren eingeführt worden, um die Kovarianz unter den Rotationen zu gewährleisten. Die Kovarianz legt weiterhin das Spektrum des konformen Hamiltonoperators auf $\hat{\mathcal{H}}$, der ja die Rotationen erzeugt, eindeutig fest. Bezeichne ich diesen mit L_0, dann hat L_0 auf $\mathcal{H}_\alpha$ Spektrum $\frac{1}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle + \mathbb{N}_0$.

(b) Wegen der Einschränkung $\operatorname{supp}\rho \subset S^1 \setminus \{\zeta\}$ leben die Felder ψ_ρ^ζ auf dem punktierten Einheitskreis. Gleichung (3.12) zeigt, wie die Wahl der Felder von dem Punkt ζ im Komplement des Trägers von ρ abhängen. In gewisser Weise verhalten sich die Felder wie Schnitte in einem Feldbündel über dem Kreis.

(c) Die erzeugenden Felder sind nur bis auf *Klein-Transformationen* eindeutig. Eine Klein-Transformation ändert die relativen Phasen in den verschiedenen Sektoren der Theorie, vertauscht jedoch mit den Observablen. Man überzeugt sich daher leicht, daß eine solche Transformation zwar die Vertauschungsrelationen von Feldern mit der gleichen Ladung nicht ändert, die von Feldern mit unterschiedlicher Ladung jedoch sehr wohl verändern kann. Dies wird sich in der Konstruktion der lokalen Erweiterungen als sehr nützlich erweisen.

Wie oben erwähnt, hat die Stromalgebra $\mathcal{U}$ eine überabzählbare Menge an Superauswahlsektoren, der physikalische Hilbert-Raum $\hat{\mathcal{H}}$ ist nicht separabel. Um zu realistischeren Situationen zu gelangen, betrachtet man lokale Erweiterungen der Stromalgebra. Man sucht also Algebren $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}_0$, die lokal sind: $\mathcal{F}_0(I) \subset \mathcal{F}_0(I^c)'$. Neben der Lokalität muß man weitere Einschränkungen an die Art der Erweiterungen machen. Zum Beispiel möchte man das Produkt $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ als Erweiterung ausschließen, da es ebenfalls überabzählbar viele Superauswahlsektoren besitzt. Solche Situationen kann man vermeiden, wenn man fordert, daß sich die Dynamik beim Übergang zur Erweiterung nicht ändert. Genauer fordert man, daß eine Erweiterung $\mathcal{F}_0$ von $\mathcal{U}$ durch ein lokales kovariantes Netz $I \mapsto \mathcal{F}_0(I)$ erzeugt wird, so daß sich die Zeittranslationen auf $\mathcal{U}$ als implementierbare Automorphismen nach $\mathcal{F}_0$ fortsetzen lassen und die implementierenden Operatoren in dem schwachen Abschluß von $\mathcal{U}$ liegen.

Wie in [BMT 88] überzeugt man sich, daß sich eine derartige Erweiterung realisieren läßt als Unteralgebra der Algebra aller Feldoperatoren ψ_ρ^ζ in $\hat{\mathcal{H}}$, eingeschränkt auf einen Unterraum von $\hat{\mathcal{H}}$. Es sind also diejenigen Felder ψ_ρ^ζ (ρ aus einer Untermenge aller lokalisierter Eins-Formen) zu finden, für die $\psi_{\rho_1}^\zeta \psi_{\rho_2}^\zeta = \psi_{\rho_2}^\zeta \psi_{\rho_1}^\zeta$ gilt, falls die ρ_i disjunkten Träger in $S^1 \setminus \{\zeta\}$ haben[1]. Seien zunächst ρ_1 und ρ_2, mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho_1 = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_2 = \alpha$ und disjunktem Träger gegeben. Aus der Formel (3.11) sieht man:

$$\begin{aligned} \psi_{\rho_1}^\zeta \psi_{\rho_2}^\zeta &= e^{\pm i\pi\langle\alpha,\alpha\rangle}\psi_{\rho_2}^\zeta \psi_{\rho_1}^\zeta \\ (\psi_{\rho_1}^\zeta)^* \psi_{\rho_2}^\zeta &= e^{\mp i\pi\langle\alpha,\alpha\rangle}\psi_{\rho_2}^\zeta (\psi_{\rho_1}^\zeta)^*. \end{aligned}$$

Somit ist die Forderung: $\frac{1}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}$, eine notwendige Bedingung dafür, daß die Felder ψ_ρ, mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho = \alpha$ und supp$\rho \subset I$, eine *lokale* Erweiterung, $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}\alpha}(I)$, von $\mathcal{U}(I)$ definieren. Weiter sieht man, daß dann auch die Felder $(\psi_\rho^\zeta)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) zueinander lokal sind. Die von solchen Feldern erzeugte Algebra lebt aber nach wie vor auf dem punktierten Kreis $S^1 \setminus \{\zeta\}$. Es folgt nämlich aus der Formel (3.12):

$$\psi_\rho^{\zeta_2} \left(\psi_\rho^{\zeta_1}\right)^* = e^{2\pi i\langle Q,\alpha\rangle}. \tag{3.13}$$

Es sei nun $\mathbb{Z}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{n \cdot \alpha \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, die von $\alpha \in V$ erzeugte Untergruppe in V, sowie $(\mathbb{Z}\alpha)^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\beta \in V \,|\langle\alpha,\beta\rangle \in \mathbb{Z}\}$ die dazu duale Untergruppe von V. Die Unterräume $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}\alpha}$ und $\mathcal{H}_{(\mathbb{Z}\alpha)^*}$ sind also wohldefiniert (siehe (3.5)). Weiterhin ist die Einschränkung der rechten Seite von (3.13) auf den Unterraum $\mathcal{H}_{(\mathbb{Z}\alpha)^*}$ identisch Eins. Bezeichne ich also die Einschränkung der Felder ψ_ρ^ζ auf $\mathcal{H}_{(\mathbb{Z}\alpha)^*}$ mit ψ_ρ, so ist diese Definition für $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho = \alpha$ und $\langle\alpha,\alpha\rangle \in 2\mathbb{Z}$ tatsächlich unabhängig von $\zeta \in S^1$. Die Felder ψ_ρ mit den angegebenen Bedingungen an $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho$ sowie supp$(\rho) \subset I$ erzeugen also für jedes Intervall $I \subset S^1$ eine lokale Erweiterung $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}\alpha}(I)$ von $\hat{\pi}(\mathcal{U}(I))|_{\hat{\mathcal{H}}_{(\mathbb{Z}\alpha)^*}}$.

Die zu diesem Netz gehörende universelle Algebra, die also von allen Operatoren ψ_ρ, mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho \in \mathbb{Z}\alpha$ erzeugt wird, bezeichne ich mit $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}\alpha}$. $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}\alpha}$ besitzt nach wie vor eine

[1]Da die Feldalgebren nur bis auf Klein-Transformationen eindeutig sind, erwarten wir diese Relationen nur für Klein-Transformierte der Felder ψ_ρ, siehe unten.

überabzählbare Menge von Superauswahlsektoren (außer für $\dim(V) = 1$ [BMT 88]). Die Vakuumdarstellung ist $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}\alpha}$ und besitzt den Vakuumvektor $\Omega \in \mathcal{H}_0$ als zyklischen Vektor. Das Zentrum, $Z(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}\alpha})$, wird erzeugt von den Operatoren $e^{i\langle Q,\lambda\rangle}$, mit $\langle\alpha,\lambda\rangle \in \mathbb{Z}$. Jedes $\lambda \in (\mathbb{Z}\alpha)^*$ definiert also eine irreduzible positive-Energie-Darstellung auf $\mathcal{H}_{\lambda+\mathbb{Z}\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_{\lambda+n\alpha}$. Man überzeugt sich, daß zwei dieser Darstellungen, gegeben durch λ_1 und λ_2, äquivalent sind, falls $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}\alpha$. Die irreduziblen Superauswahlsektoren der Algebra $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}\alpha}$ werden also durch die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}\alpha)^*/(\mathbb{Z}\alpha)$ parametrisiert. Diese Gruppe ist aber (außer für $\dim(V) = 1$) wieder überabzählbar! Man muß also das so gewonnene Netz wiederum durch lokale Felder erweitern, um zu realistischen Modellen mit einer endlichen Anzahl an Superauswahlsektoren zu kommen. Ich beschränke mich im folgenden auf diesen Fall. Mit derselben Methode lassen sich auch alle anderen Erweiterungen klassifizieren, die die oben genannten Bedingungen erfüllen.

Das Ergebnis läßt sich am leichtesten mit Hilfe von integralen Gittern formulieren. Dies sind die oben erwähnten Untergruppen von V. Ich möchte deshalb an dieser Stelle einige Definitionen und Eigenschaften dieser Gitter einfügen (siehe z.B. [CON/SLO 88]).

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Ein integrales Gitter L in V ist eine Untergruppe (bezüglich der Addition in V), so daß für $\alpha, \beta \in L$ das Skalarprodukt $\langle\alpha,\beta\rangle$ eine ganze Zahl ist. Ein integrales Gitter heißt gerade, falls $\langle\alpha,\alpha\rangle \in 2\mathbb{Z}$ ist, für $\alpha \in L$. Eine Basis von L ist eine Teilmenge $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ von linear unabhängigen Elementen von L, so daß sich jedes Element in L als $\mathbb{Z}$-Linearkombination der α_i schreiben läßt. Im folgenden gehe ich davon aus, daß es eine Basis gibt, die auch eine Basis von V ist (das Gitter hat dieselbe Dimension wie V, es hat maximalen Rang). Das duale Gitter L^* ist die Menge aller Vektoren $\lambda \in V$, für die $\langle\alpha,\lambda\rangle \in \mathbb{Z}$ ist für alle $\alpha \in L$. L^* ist auch ein Gitter, i.a. jedoch kein integrales. Es gilt jedoch $L \subset L^*$, und es ist eine bekannte Tatsache, daß die Quotientengruppe L^*/L eine endliche Gruppe ist. Ist $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ eine Basis von L, so ist die duale Basis $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ definiert durch:

$$\langle\alpha_i,\lambda_j\rangle = \delta_{ij} \quad i,j = 1,\ldots,n \tag{3.14}$$

Die λ_i, $i = 1,\ldots,n$, bilden eine Basis des dualen Gitters.

Nach diesen Vorbetrachtungen kann ich die Klassifizierung lokaler Erweiterungen mit endlich vielen Superauswahlsektoren angeben.

Theorem 3.1.4: Es sei L ein integrales, gerades Gitter in V mit Basis $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ $(n = \dim(V))$. Die Vektoren $\mu_i \in L^*$ $(i = 1,\ldots,n)$ seien definiert durch:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_i = \sum_{k=1}^{i-1}\langle\alpha_i,\alpha_k\rangle\lambda_k, \quad i = 2,\ldots,n. \tag{3.15}$$

Weiter sei für $\alpha \in L$:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} n_i\alpha_i \;\Rightarrow\; \mu_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} n_i\mu_i. \tag{3.16}$$

Für jede lokalisierte Eins-Form ρ, mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho = \alpha_\rho \in L$, definiert man Operatoren ϕ_ρ auf $\mathcal{H}_{L^*}$ durch:

$$\phi_\rho \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\pi\langle Q,\mu_\alpha\rangle}\psi_\rho^\zeta|_{\mathcal{H}_{L^*}} \quad \zeta \in S^1. \tag{3.17}$$

Dann gilt:

(a) Die Definition (3.17) ist unabhängig von $\zeta \in S^1$.

(b) Die Operatoren ϕ_ρ, mit $\text{supp}(\rho) \subset I \subset S^1$ und $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho \in L$, erzeugen eine lokale Erweiterung $\mathcal{F}_L(I)$ von $\mathcal{U}(I)$. Genauer: Ist π_{L^*} die Einschränkung der Darstellung $\hat{\pi}$ von $\mathcal{U}$ auf den Unterraum $\mathcal{H}_{L^*}$, dann gilt $\pi_{L^*}(\mathcal{U}(I)) \subset \mathcal{F}_L(I)$, und $\mathcal{F}_L(I) \subset \mathcal{F}_L(I^c)'$.

(c) Jede lokale Erweiterung, die den oben diskutierten Bedingungen genügt, ist von dieser Form.

Beweis: Wie oben folgt die Aussage (a) unmittelbar aus der Formel (3.12). Der Operator, der dort auf der rechten Seite steht, ist auf dem Unterraum $\mathcal{H}_{L^*}$ identisch Eins. Die Aussage (c) folgt ebenfalls sehr schnell. Aus der oben gemachten Bemerkung, daß sich alle lokalen Erweiterungen durch die (möglicherweise Klein-transformierten) Felder ψ_ρ^ζ erzeugen lassen folgt, daß man lediglich zu prüfen hat, welche Forderungen an die Gesamtladungen der Eins-Formen ρ zu stellen hat. Sind zwei solche Eins-Formen ρ_1 und ρ_2 gegeben, mit $\alpha_i = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_i$, so folgt als erstes, daß jeweils $\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle$ $(i = 1,2)$ gerade ganze Zahlen seien müssen. Da weiterhin mit ψ_{ρ_1} und ψ_{ρ_2} auch $\psi_{\rho_1}\psi_{\rho_2} \sim \psi_{\rho_1+\rho_2}$ ein lokales Feld sein muß, folgt, daß auch $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ eine ganze Zahl ist. Es bleibt also zu zeigen, daß die angegebenen Felder tatsächlich auch lokal zueinander sind. Seien dazu $\alpha, \beta \in L$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i, \tag{3.18}$$

Elemente des Gitters L, $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho_1 = \alpha$, $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho_2 = \beta$ sowie: $\text{supp}(\rho_1) \cap \text{supp}(\rho_2) = \emptyset$. Benutzt man die Vertauschungsrelationen (3.11), so folgt mit der fundamentalen Relation $(\alpha_\rho = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho)$ $\psi_\rho e^{i\pi\langle Q,\mu\rangle} = e^{i\pi\langle\alpha_\rho,\mu\rangle}e^{i\pi\langle Q,\mu\rangle}\psi_\rho$:

$$\begin{aligned}
\phi_{\rho_1}\phi_{\rho_2} &= e^{i\pi\langle Q,\mu_\alpha\rangle}\psi_{\rho_1}e^{i\pi\langle Q,\mu_\beta\rangle}\psi_{\rho_2} \\
&= e^{i\pi\langle\alpha,\mu_\beta\rangle}e^{i\pi\langle Q,\mu_\beta\rangle}e^{i\pi\langle Q,\mu_\alpha\rangle}\psi_{\rho_1}\psi_{\rho_2} \\
&= e^{i\pi\langle\alpha,\mu_\beta\rangle}e^{i\pi\langle Q,\mu_\beta\rangle}e^{i\pi\langle Q,\mu_\alpha\rangle}e^{\pm i\pi\langle\alpha,\beta\rangle}\psi_{\rho_2}\psi_{\rho_1} \\
&= e^{i\pi(\langle\alpha,\mu_\beta\rangle-\langle\beta,\mu_\alpha\rangle)}e^{\pm i\pi\langle\alpha,\beta\rangle}\phi_{\rho_2}\phi_{\rho_1}.
\end{aligned}$$

Mit (3.18) und der Definition der μ_α, μ_β, sieht man:

$$\langle\alpha,\mu_\beta\rangle - \langle\beta,\mu_\alpha\rangle \pm \langle\alpha,\beta\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} k_im_j\left(\langle\alpha_i,\mu_j\rangle - \langle\alpha_j,\mu_i\rangle \pm \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\right). \tag{3.19}$$

Benutzt man noch die Definition (3.15), so folgt für $i,j = 1,\ldots,n$:

$$\langle\alpha_i,\mu_j\rangle - \langle\alpha_j,\mu_i\rangle \equiv \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle \pmod 2. \tag{3.20}$$

Mit Gleichung (3.19) ist dann die Phase in der Vertauschungsrelation gleich Eins, und es folgt, daß die Felder (3.17) tatsächlich eine lokale Erweiterung erzeugen. □

Lokale Erweiterungen einer abelschen Stromalgebra über dem Vektorraum V lassen sich also durch integrale, gerade Gitter in V beschreiben. Wie in dem Fall einer Erweiterung durch *ein* Feld sieht man, daß die irreduziblen Darstellungen mit positiver

Energie der Algebra $\mathcal{F}_L$ durch die Gruppe L^*/L parametrisiert werden: Die Vakuumdarstellung der Algebra $\mathcal{F}_L$ ist $\mathcal{H}_L$ und wird im folgenden wie ihre Einschränkung auf die Stromalgebra $\mathcal{U}$, mit π_L bezeichnet. Diese Darstellung ist irreduzibel. Für jedes $\lambda \in L^*$ ist die Darstellung $\pi_{\lambda+L}$ auf dem Raum

$$\mathcal{H}_{\lambda+L} \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{\alpha\in L}\mathcal{H}_{\lambda+\alpha}, \tag{3.21}$$

definiert durch die Einschränkung der Algebren $\mathcal{F}_L(I)$ auf den entsprechenden Unterraum von $\mathcal{H}_{L^*}$, irreduzibel. Wegen $\mathcal{H}_{\alpha+L} = \mathcal{H}_L \;\forall \alpha \in L$ (siehe 3.21) sind diese Darstellungen genau dann inäquivalent, wenn die Nebenklasse $[\lambda]$ von λ in L^*/L nicht Null ist. Die Gruppe L^*/L ist eine endliche Gruppe, so daß das Modell nur noch eine endliche Anzahl von Superauswahlsektoren hat. Diese Sektoren lassen sich wieder durch lokalisierte Automorphismen erzeugen, deren Einschränkung auf die Stromalgebra $\mathcal{U}$ durch γ_ρ, mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho \in L^*$, gegeben ist. Tatsächlich lassen sich diese Automorphismen auf $\mathcal{H}_{L^*}$ durch Kleintransformierte der Felder ψ_ρ^ζ implementieren. Man definiert analog zu (3.15) Vektoren $\nu_i \in V$ $(i = 1, \ldots, n)$ durch:

$$\nu_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{n}\langle\lambda_j, \mu_i\rangle\lambda_j \tag{3.22}$$

(λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ ist die duale Basis). Für $\lambda = \sum_{i=1}^n n_i\lambda_i \in L^*$ definiert man weiter $\nu_\lambda = \sum_{i=1}^n n_i\nu_i$. Die unitären Operatoren $\hat{\phi}_\rho^{\,\zeta}$ mit $\zeta \in S^1$, $\mathrm{supp}(\rho) \subset I \subset S^1 \setminus \{\zeta\}$ und $\alpha_\rho \in L^*$:

$$\hat{\phi}_\rho^{\,\zeta} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\pi\langle Q, \nu_{\alpha_\rho}\rangle}\psi_\rho^\zeta|_{\mathcal{H}_{L^*}} \tag{3.23}$$

implementieren dann die irreduziblen Darstellungen und sind lokal zu den Operatoren ϕ_ρ, $\alpha_\rho \in L$.

Ein Spezialfall tritt ein, wenn das Gitter selbstdual ist: $L^* = L$. Beispiele dafür sind das Wurzelgitter der kompakten Lie-Gruppe E_8, ($\dim(V) = 8$), oder das sogenannte Leech-Lattice Λ_{24} ($\dim(V) = 24$). Allgemein existieren integrale, gerade und selbstduale Gitter in V nur, wenn die Dimension von V ein ganzzahliges Vielfaches von 8 ist [CON/SLO 88]. In diesen Fällen hat die Theorie keine nichttrivialen Superauswahlsektoren bzw. Ladungen.

Zusammenhang mit der DHR-Konstruktion: Die Vakuumdarstellung $(\pi_L, \mathcal{H}_L)$ des Netzes $I \mapsto \mathcal{F}_L(I)$ läßt sich als DHR-Feldalgebra über der Stromalgebra $\mathcal{U}$ auffassen [DHR 69 II]: Tatsächlich ist L als Gruppe eine Untergruppe aller Sektoren von $\mathcal{U}$, und $\mathcal{H}_L = \oplus_{\alpha\in L}\mathcal{H}_\alpha$ ist die direkte Summe der zugehörigen Darstellungen, mit einfacher Multiplizität. Die Feldoperatoren ϕ_ρ, $\alpha_\rho \in L$, sind Intertwiner zwischen verschiedenen dieser irreduziblen Darstellungen. Die zu L duale Gruppe $\hat{L}$, das ist die Gruppe aller Charaktere von L: $\hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} (V/L^*)$, wirkt in $\mathcal{H}_L$ auf kanonische Weise:

$$V/L^* \ni [v] \mapsto U([v]) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi i\langle Q, v\rangle}|_{\mathcal{H}_L}. \tag{3.24}$$

Hier bezeichnet $[v] \in V/L^*$ die Klasse von $v \in V$, und der entsprechende Charakter von L ist gegeben durch: $\chi_{[v]}(\alpha) = e^{2\pi i\langle\alpha, v\rangle}$. Aus der Regularität des Zustandes ω_0

folgt, daß die Darstellung $[v] \mapsto U([v]) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_L)$ stark stetig ist. Es sei $d\mu([v])$ das (normierte) Haar-Maß auf V/L^* und für $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_L)$:

$$m(F) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\hat{L}} \alpha_{[v]}(F)\, d\mu([v]), \quad \alpha_{[v]}(F) = U([v])FU^*([v]). \tag{3.25}$$

Dann gilt (siehe [DHR 69 I, Lemma 3.1], [DHR 69 II, Proposition 4.5]:

Proposition 3.1.5: (a) m ist eine bedingte Erwartung von $\mathcal{B}(\mathcal{H}_L)$ in die Kommutante $U(\hat{L})'$ der Darstellung U von $\hat{L}$.
(b) $\pi_L(\mathcal{U}(I))'' = \mathcal{F}_L(I)'' \cap U(\hat{L})'$, für jedes Intervall $I \Subset S^1$.

3.2 Level-1-Darstellungen von Loopgruppen

Lokale Erweiterungen der Stromalgebra $\mathcal{U}$ über einem Vektorraum V lassen sich durch integrale, gerade Gitter L in diesem Vektorraum klassifizieren. Eine spezielle Klasse dieser Gitter sind die Wurzelgitter der Lie-Algebren vom Typ A, D oder E (z.B.: $su(n) = A_{n-1}$) [HUMPHREYS 72]. Es stellt sich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen den lokalen Erweiterungen und den entsprechenden kompakten Lie-Algebren besteht. Es zeigt sich, daß die lokale Erweiterung, die zu einem dieser Gitter gehört, eine *unitäre*, projektive Darstellung mit positiver Energie der Gruppe aller glatten Abbildungen von S^1 in einen maximalen Torus der zugehörigen Gruppe definiert. Eine Standardkonstruktion (die Vertexoperator-Konstruktion) zeigt, daß diese Darstellungen in kanonischer Weise auch Darstellungen der Stromalgebra (1.1) sind, die zu dieser Gruppe gehören (siehe z.B. [PRE/SEG 86, SEGAL 81]). Weiterhin kann man die so gewonnenen Darstellungen der Lie-Algebra (1.1) "exponentieren" und erhält die projektiven Darstellungen der Loopgruppe LG bei Level 1. Die Vertexoperator-Konstruktion ist ausführlich in der Literatur diskutiert (z.B. [PRE/SEG 86]), so daß ich mich hier darauf beschränke zu zeigen, daß man aus den lokalen Erweiterungen der abelschen Stromalgebra tatsächlich projektive Darstellungen der Loopgruppe des maximalen Torus erhält. Die Vertexoperator-Konstruktion ist dann nur kurz erwähnt.

Projektive Darstellungen und zentrale Erweiterungen: In der Quantenphysik spielen projektive- oder Strahldarstellungen von Gruppen eine herausragende Rolle. Ich will hier kurz den Zusammenhang mit zentralen Erweiterungen von Gruppen erläutern, soweit dies für das weitere wichtig ist. Sei π projektive Darstellung einer Gruppe G. Man hat also für $g, h \in G$:

$$\pi(g)\pi(h) = c(g,h)\pi(fg) \qquad |c(f,g)| = 1.$$

Die Abbildung c, die hier auftaucht, heißt Kozykel. Ein Kozykel muß bestimmte Relationen erfüllen, die sich aus der Assoziativität der Multiplikation ergeben. Zwei Kozykel c_1 und c_2 heißen äquivalent, wenn es eine Funktion b von G nach $\mathbb{C}$, mit $|b(g)| = 1\ \forall g \in G$ gibt, so daß:

$$c_2(g,h) = \frac{b(g)b(h)}{b(gh)} c_1(g,h) \qquad \forall g, h \in G.$$

Für die zugehörigen projektiven Darstellungen π_1 und π_2 gilt dann:

$$\pi_2(g) = b(g)\pi_1(g), \quad g \in G.$$

Sie unterscheiden sich also nur um eine (physikalisch unwichtige) globale Phase.

Ist ein Kozykel c gegeben, so kann man eine zentrale Erweiterung $\tilde{G}$ von G definieren. $\tilde{G}$ ist als Menge gegeben durch Paare (λ, g), $\lambda \in U(1)$, $g \in G$. Die Gruppenmultiplikation in $\tilde{G}$ ist definiert durch:

$$(\lambda, g)(\mu, h) = (\lambda\mu c(g,h), gh).$$

Man überzeugt sich, daß die Bedingungen, daß c eine projektive Darstellung definiert hat, hinreichend dafür sind, daß diese Formel in der Tat $\tilde{G}$ zu einer Gruppe machen. Das wichtige an zentralen Erweiterungen ist nun, daß man jede projektive Darstellung als (echte) Darstellung der zugehörigen zentralen Erweiterung auffassen kann. Ist nämlich π eine projektive Darstellung von G, dann definiert die Zuordnung:

$$\tilde{\pi}\left((\lambda, g)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\pi(g)$$

eine Darstellung von $\tilde{G}$.

Es sei G eine einfach-zusammenhängende, halbeinfache Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Ich wähle eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{t}$. $\mathfrak{t}$ ist ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum: $n \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathfrak{t})$. Die Cartan-Killing-Form von $\mathfrak{g}$ induziert ein positives Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathfrak{t}$. Das innere Produkt auf $\mathfrak{t}^*$ bezeichne ich ebenfalls mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Haben alle einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}$ gleiche Länge (bezüglich dieser Metrik), so heißt die Lie-Algebra und die Gruppe *simply laced*. Durch eine geeignete Normierung erreicht man, daß alle Wurzeln α die Länge Zwei haben: $\langle\alpha,\alpha\rangle = 2$. Die einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}$ erzeugen dann ein integrales gerades Gitter $\check{L}$ in $\mathfrak{t}^*$, die Kowurzeln erzeugen ein solches Gitter L in $\mathfrak{t}$. Die zu $\mathfrak{t}$ gehörige maximal abelsche Untergruppe T kann ich über die Exponentialabbildung mit $\mathfrak{t}/2\pi L$ identifizieren. Mit dieser Identifizierung kann man L als die Gruppe der Homomorphismen von $U(1)$ nach T realisieren. Ich bezeichne die Gruppe aller glatten Abbildungen von S^1 nach T mit LT, die Loopgruppe von T. Identifiziere ich S^1 mit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, so lassen sich die Elemente von LT schreiben als Funktionen e^{if}, wobei f eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathfrak{t}$ ist, mit $\frac{1}{2\pi}(f(\theta+2\pi) - f(\theta)) \in L$.

Das Kowurzelgitter L kann man über die oben gemachte Identifizierung mit $\mathrm{Hom}(U(1),T)$ als Untergruppe von LT auffassen. Bezeichnet man mit $(LT)_0$ die Zusammenhangskomponente der Eins in LT (das ist die Untergruppe der Loops mit Windungszahl Null), so ist $LT = (LT)_0 \times L$. Eine zentrale Erweiterung $\widetilde{LT}$ ist dann (bis auf die oben erwähnte Äquivalenz) vollständig durch ihre Einschränkungen $(\widetilde{LT})_0$ auf $(LT)_0$ und $\tilde{L}$ auf L, sowie die adjungierte Wirkung von L auf $(\widetilde{LT})_0$ bestimmt [PRE/SEG 86]. Um die Einschränkung der hier betrachteten zentralen Erweiterungen auf L zu untersuchen, benötigt man noch folgendes Ergebnis, dessen Beweis z.B. in [KAC 90] oder [PRE/SEG 86] zu finden ist.

Lemma 3.2.1: Es gibt eine Bilinearform b: $L \times L \to \mathbb{Z}_2$, mit

$$b(\alpha,\alpha) = \frac{1}{2}\langle\alpha,\alpha\rangle \pmod 2 \quad \forall\alpha \in L. \tag{3.26}$$

Weil $\langle\alpha,\alpha\rangle$ für alle α aus L in $2\mathbb{Z}$ liegt, ist die Gleichung (3.26) tatsächlich sinnvoll.

Für ein Element $e^{if} \in LT$ führe ich folgende Notationen ein: Es ist $\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f(\theta)$, $\Delta_f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}(f(\theta+2\pi) - f(\theta))$. Gilt $\Delta_f = 0$, dann sei $\tilde{f}(e^{i\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\theta)$. Ferner notiere ich die Zusammenhänge:

$$z = e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\theta} = iz\frac{d}{dz}, \quad \int \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z} = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{3.27}$$

Proposition 3.2.2: Es sei c der Kozykel:

$$c(e^{if}, e^{ig}) = (-1)^{b(\Delta_f,\Delta_g)} e^{iS(f,g)}, \tag{3.28}$$

auf LT mit

$$S(f,g) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\langle f(\theta), g'(\theta)\rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{f}, \Delta_g\rangle + \langle \Delta_f, \hat{g} - g(0)\rangle, \tag{3.29}$$

und b eine Bilinearform von $L \times L$ nach $\mathbb{Z}_2$, wie in (3.26). Es gibt genau $|L^*/L|$ unitäre Darstellungen der entsprechenden zentralen Erweiterung $\widetilde{LT}$, die kovariant unter den Rotationen ist, so daß der Erzeugende der Rotationen nichtnegatives Spektrum hat und ein Element $(\lambda, 1)$ durch $\lambda \cdot \mathrm{id}$ dargestellt ist (Level 1). Eine Darstellung ist eindeutig dadurch bestimmt, daß sie einen Vakuumvektor Ω besitzt, der invariant unter den Rotationen ist (Basisdarstellung). Eine andere Bilinearform $\tilde{b}$, die die Bedingung (3.26) erfüllt, führt zu einem äquivalenten Kozykel und damit zu einer äquivalenten Darstellung.

Der Beweis dieser Aussage ist in [SEGAL 81, Theorem 3.1] zu finden. Mit den Formeln (3.28) und (3.29) kann nun die Einschränkungen der zentralen Erweiterung, die zu dem Kozykel gehört, auf die Untergruppen $\tilde{L}$ und $(\widetilde{LT})_0$ berechnen. Dazu wählt man Repräsentanten: e^{if_j}, e^{ig_j}, $(j = 0, 1)$, mit $f_0(\theta) = \Delta_f\theta$, $g_0(\theta) = \Delta_g\theta$ und $\Delta_{f_1} = \Delta_{g_1} = 0$. Es ist dann:

$$\begin{aligned} e^{if_0}e^{ig_0} &= (-1)^{b(\Delta_f,\Delta_g)}e^{i(f_0+g_0)} && (3.30)\\ e^{if_1}e^{ig_1} &= \exp(i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}f(\theta)g'(\theta))e^{i(f_1+g_1)}. && (3.31)\end{aligned}$$

Ferner berechnet sich die adjungierte Wirkung von L auf $(\widetilde{LT})_0$ zu

$$e^{if_0}e^{if_1}e^{-if_0} = e^{i\langle\Delta_f,\hat{f}\rangle}e^{if_1}. \tag{3.32}$$

Die Relation (3.31) stimmt genau mit den abelschen Stromalgebrarelationen überein, wenn man für $\Delta_f = 0$ die Identifizierung $W(\hat{f}) \leftrightarrow e^{if}$ vornimmt. Weiter stimmt (3.32) mit der Wirkung der Ladungserzeuger Γ_{Δ_f} überein.

Es ist nun überraschend, daß die in (3.17) eingeführte Klein-Transformation genau auf die Relationen (3.30) führt:

Lemma 3.2.3: Es seien $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ die einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}$ und $(h_1, \ldots, h_n)$ die entsprechenden Kowurzeln. Die Γ_α seien wie im letzten Abschnitt die Ladungserzeuger in $\hat{\mathcal{H}}$ und die μ_i wie in (3.15) definiert. Ich schreibe die Identifizierung von L mit $\mathrm{Hom}(U(1), T)$ explizit: $L \ni h \quad \Leftrightarrow \quad e_h(\theta) = e^{i\theta h}$. Für die einfachen Kowurzeln h_i $(i = 1, \ldots, n)$ definiert man[2]

$$\pi_B(e_{h_i}) = \tilde{\Gamma}_i \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\pi\langle Q,\mu_i\rangle}\Gamma_{\alpha_i}, \tag{3.33}$$

[2]Hier und im folgenden schränke ich alle Operatoren auf den Unterraum $\mathcal{H}_L$ ein.

und, falls $h \in L$ die Zerlegung $h = \sum_{i=1}^n m_i h_i$ hat, so daß alle m_i ganze Zahlen sind,

$$\pi_B(e_h) \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{m_1} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{m_n}. \tag{3.34}$$

Dann ist π_B eine projektive Darstellung von L mit einem Kozykel, der zu (3.30) äquivalent ist.

Beweis: Als erstes bemerke ich, daß diese Zuordnungen tatsächlich eine projektive Darstellung von L definieren. Das folgt daraus, daß die Ladungserzeuger Γ_α additiv sind: $\Gamma_\alpha \Gamma_{\tilde{\alpha}} = \Gamma_{\alpha+\tilde{\alpha}}$. Weiter kann man zeigen, daß eine projektive Darstellung der abelschen Gruppe L vollständig durch den antisymmetrischen Teil des Kozykels bestimmt ist (siehe z.B. den Beweis von Lemma A.1.2 in [DHR 69 II]). Es ist also zu zeigen, daß für $\alpha, \tilde{\alpha} \in L$:

$$\tilde{\Gamma}_\alpha \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}} \tilde{\Gamma}_\alpha^{-1} \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}}^{-1} = (-1)^{b(h,\tilde{h})+b(\tilde{h},h)}. \tag{3.35}$$

(Hier ist $\alpha = \sum m_i \alpha_i$, $\tilde{\alpha} = \sum k_i \alpha_i$ und $h = \sum m_i h_i$, $\tilde{h} = \sum k_i h_i$.) Ich zeige diese Eigenschaft als erstes, wenn $\alpha = \alpha_i$ und $\tilde{\alpha} = \alpha_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ einfache Wurzeln sind. Aus der Bilinearität von b und der Eigenschaft (3.26) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle h_i + h_j, h_i + h_j \rangle &\equiv b(h_i + h_j, h_i + h_j) \pmod 2 \\
&\equiv b(h_i, h_i) + b(h_i, h_j) + b(h_j, h_i) + b(h_j, h_j) \pmod 2 \\
&\equiv b(h_i, h_j) + b(h_j, h_i) + \frac{1}{2}\langle h_i, h_i \rangle + \frac{1}{2}\langle h_j, h_j \rangle \pmod 2 \\
\Rightarrow b(h_i, h_j) + b(h_j, h_i) &\equiv \langle h_i, h_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \pmod 2.
\end{aligned}$$

Wiederum aus der Bilinearität folgert man für beliebige Linearkombinationen der Wurzeln- und Kowurzeln: $b(h, \tilde{h}) + b(\tilde{h}, h) = \langle \alpha, \tilde{\alpha} \rangle$. Benutzt man nun die Eigenschaft (3.20), so folgt für einfache Wurzeln:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha_i} \tilde{\Gamma}_{\alpha_j} = e^{i\pi(\langle \alpha_i, \mu_j \rangle - \langle \alpha_j, \mu_i \rangle)} \tilde{\Gamma}_{\alpha_j} \tilde{\Gamma}_{\alpha_i},$$

und mit Gleichung (3.19) erhält man die Behauptung (3.35). Für beliebige $\alpha = \sum k_i \alpha_i$ und $\tilde{\alpha} = \sum m_i \alpha_i$ $(k_i, m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots n)$ erhält man die Behauptung dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_\alpha \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}} &= (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{k_1} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{k_n} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{m_1} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{m_n} \\
&= (-1)^{m_1 \sum_{i=2}^n k_i \langle \alpha_1, \alpha_i \rangle} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{m_1} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{k_1} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{k_n} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_2})^{m_2} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{m_n} \\
&= (-1)^{m_1 \langle \alpha_1, \alpha \rangle} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{m_1} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{k_1} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{k_n} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_2})^{m_2} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{m_n} \\
&\quad (\text{weil } \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2) \\
&= \vdots \\
&= (-1)^{\sum_i m_i \langle \alpha_i, \alpha \rangle} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{m_1} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{m_n} (\tilde{\Gamma}_{\alpha_1})^{k_1} \cdots (\tilde{\Gamma}_{\alpha_n})^{k_n} \\
&= (-1)^{\langle \alpha, \tilde{\alpha} \rangle} \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}} \tilde{\Gamma}_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Wie oben bereits bemerkt, liefert für $e^{if} \in (LT)_0$, d.h. $\Delta_f = 0$, die Zuordnung

$$\pi_B(e^{if}) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_L(W(\tilde{f}))$$

eine projektive Darstellung von $(LT)_0$ in $\mathcal{H}_L$, deren Kozykel wiederum mit dem in (3.29) definierten übereinstimmt. Ich berechne nun noch die Wirkung von $\pi_B(e_h)$ auf einen Operator $W(\tilde{f})$:

$$\tilde{\Gamma}_\alpha W(\tilde{f})(\tilde{\Gamma}_\alpha)^{-1} = e^{i\langle\alpha,\tilde{f}\rangle}W(\tilde{f}),$$

was mit (3.32) übereinstimmt. Man erhält also:

Proposition 3.2.4: Durch die Vorschrift:

$$\begin{aligned} \pi_B(e_h) &= \tilde{\Gamma}_{\alpha_h} \quad h \in L \quad \text{und} \\ \pi_B(e^{if}) &= \pi_L(W(\tilde{f})) \quad \Delta_f = 0 \end{aligned}$$

wird eine unitäre projektive Darstellung von LT in $\mathcal{H}_L$ definiert, deren Kozykel äquivalent zu (3.28) ist. Diese Darstellung ist irreduzibel und mit positiver Energie. Aus $\Omega \in \mathcal{H}_L$ folgt, daß sie die eindeutig bestimmte Vakuumdarstellung zu diesem Kozykel ist.

Die Irreduzibilität von $\mathcal{H}_L$ ergibt sich aus der Tatsache, daß die von den Darstellenden erzeugte Algebra gerade $\mathcal{F}_L$ ist. Diese Algebra ist in $\mathcal{H}_L$ irreduzibel dargestellt.

Weiterhin kann man sich überzeugen, daß das natürliche Lokalisierungskonzept in LT mit dem Lokalisierungskonzept in $\mathcal{F}_L$ übereinstimmt. Insbesondere stellen die Felder ϕ_ρ, mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho = \alpha \in L$ und $\text{supp}(\rho) = I \subset S^1$, bis auf eine Phase Loops in T dar, die außerhalb des Intervalles I identisch Eins sind. Bezeichnet man also die Untergruppe in LT, die von solchen Loops erzeugt wird mit $L_I T$, so gilt: $\pi_L(\mathcal{F}_L(I))'' = \pi_B(L_I T)''$.

Abschließend möchte ich kurz die Vertexoperator-Konstruktion erwähnen, mit der man aus diesen Darstellungen von LT Darstellungen einer zentralen Erweiterung der Loopalgebra $\widetilde{L\mathfrak{g}}$, und damit auch projektive Darstellungen (die Darstellungen bei Level-1) der Loopgruppe LG erhält.

Dazu wählt man sich zu jeder Wurzel α eine Folge von lokalisierten Eins-Formen ρ_n, die gegen die Deltafunktion bei $z_0 \in S^1$ konvergieren:

$$\int \frac{dz}{2\pi i}\rho_n(z) = \alpha \quad \forall n \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \rho_n[f] = \langle \alpha, f(z_0)\rangle.$$

Man kann dann zeigen, daß Regularisierungskonstanten R_n^α existieren, so daß für jedes α die Operatoren $R_n^\alpha \phi_{\rho_n}$ gegen eine operatorwertige Distribution $E_\alpha(z_0)$ auf S^1 konvergieren. Man kann geeignete Linearkombinationen $J^a(z)$ dieser Distributionen finden, die, wenn man sie mit reellen Testfunktionen verschmiert, auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_0$, den man durch anwenden von Polynomen in diesen Feldern auf den Vakuumvektor erhält wesentlich selbstadjungiert sind und die Vertauschungsrelationen

$$[J^a(z_1), J^b(z_2)] = if_c^{ab}J^c(z_1)\delta(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}g^{ab}\delta'(z_1 - z_2). \tag{3.36}$$

erfüllen. Hier sind f_c^{ab}, die Strukturkonstanten in einer Orthonormalbasis der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und g^{ab} ist die Cartan-Killing-Form in dieser Basis. Dies sind gerade definierende Relationen einer zentralen Erweiterung $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ der Loopalgebra von $\mathfrak{g}$. Die Level-1

Darstellungen der Loopgruppe erhält man dann durch Exponentieren dieser Darstellungen. Bezeichnet man mit $L_I G$ die Untergruppe der Loops in LG, die außerhalb des Intervalles I gleich der Identität der Gruppe sind, so gilt:

$$\pi_B(L_I G)'' = \pi_B(L_I T)'' = \pi_L(\mathcal{F}_L(I))''. \tag{3.37}$$

Mit der Definition der schwachen Kommutanten (Definition 2.2.2) und der Tatsache, daß die Felder J^a *lineare* Energie-Abschätzungen (siehe [BUCH/SCH-M 90] und Lemma 2.2.3) ergibt sich folgende Charakterisierung der lokalen Algebren:

$$\mathcal{F}_L(I)'' = \pi_B(L_I G)'' = \left(\bigcap_{a=1}^{\dim G} \mathcal{P}_{J^a}(I)\right)' \tag{3.38}$$

(**Skizze:** In Kapitel 6 wird die Inklusion $\left(\bigcap_{a=1}^{\dim G} \mathcal{P}_{J^a}(I)\right)' \subset \pi_B(L_I G)''$ benötigt, so daß ich mich darauf beschränke nur das zu zeigen. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich jedoch leicht mit den dort verwendeten Methoden. Es sei $\mathcal{B}(I) = \left(\bigcap_{a=1}^{\dim G} \mathcal{P}_{J^a}(I)\right)'$ und $\mathcal{C}(I) = \{e^{iJ^a[f]} \,|\, \mathrm{supp}(f) \subset I, a = 1, \ldots, \dim(G)\}''$. Weil die Felder lineare Energie-Abschätzungen erfüllen, sind die Algebren $\mathcal{C}(I)$ lokal [DRIE/FRÖ 77] und es gilt $\pi_B(L_I G)'' = \mathcal{C}(I)$. Weiter folgt aus diesen Tatsachen, daß ein Operator $e^{iJ^a[f]}$, $\mathrm{supp}(f) \subset I^c$ schwach mit $J^b[g]$ $(a, b = 1, \ldots, \dim(G))$ kommutiert, falls $\mathrm{supp}(g) \subset I$. Es folgt mit der Haag-Dualität für $I \mapsto \mathcal{C}(I)$ [WASSERMANN 89]:

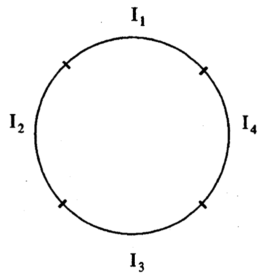
$$\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{C}(I^c)' = \mathcal{C}(I),$$

für jedes Intervall $I \Subset S^1$.)

Kapitel 4

Verletzung der Haag-Dualität für disjunkte Vereinigungen von Intervallen

In diesem Kapitel betrachte ich die Vakuumdarstellung $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ der abelschen Stromalgebra $\mathcal{U}$ über einem Vektorraum V. Ich werde die Frage nach der Verletzung der Haag-Dualität für Vereinigungen von (zwei) disjunkten Intervallen beantworten. Genauer gesagt werde ich folgende Situation betrachten: es seien I_k, $k = 1, \ldots, 4$, vier disjunkte Intervalle, deren Vereinigung dicht in dem Einheitskreis S^1 ist.



Bezeichnet man mit $\mathcal{A}_{ik}$, $i \neq k = 1, \ldots, 4$, die von Neumann-Algebren, die von allen Observablen erzeugt werden, die entweder in I_i oder I_k lokalisiert sind, so gilt aufgrund der Lokalität:

$$\mathcal{A}_{13} \subset \mathcal{A}'_{24}. \tag{4.1}$$

Es wird sich herausstellen, daß man die Algebra $\mathcal{A}'_{24}$ beschreiben kann, durch *Felder*, die in dem Intervall I_1 eine beliebige Ladung erzeugen und in dem Intervall I_3 diese Ladung wieder vernichten. Daß solche Feldoperatoren tatsächlich in der Kommutante doppelt lokalisierter Observablen (in der Vakuumdarstellung) liegen, ist evident: Die Gesamtladung wird durch diese Operatoren nicht geändert, also sind sie observabel. Außerdem sind die Felder relativ lokal zu den Observablen, so daß sie mit den Observablen in $\mathcal{A}_{13}$ tatsächlich vertauschen. Dieser Sachverhalt ist seit längerem bekannt (siehe [LE/RO/TE 78], sowie die Diskussionen in [SCHROER 92, WASSERMANN 89]). Ich werde hier zeigen, daß diese Operatoren die Kommutante tatsächlich auch ausschöpfen.

Die Relevanz dieses Ergebnisses liegt unter anderem darin, daß man mit Hilfe der Inklusion (4.1) in kanonischer Weise die Superauswahlstruktur einer Theorie analysieren kann. Z.B. läßt sich zeigen, daß in dem hier diskutierten Fall die "Eichgruppe" V auf der Algebra $\mathcal{A}'_{24}$ wirkt, und die Unteralgebra $\mathcal{A}_{13}$ genau von den invarianten Elementen aufgespannt wird. Die Verallgemeinerung ähnlicher Aussagen auf sogenannte nichtabelsche Theorien mit Hilfe der Subfaktor-Theorie von Jones [GHJ] ist Gegenstand neuerer Untersuchungen (z.B. [LO/REH 94] und dort zitierte Arbeiten).

Bei dem vorliegenden Beweis verwende ich die Tatsache, daß sich die Vakuumdarstellung der Stromalgebra als Darstellung einer Weyl-Algebra im (bosonischen) Fock-Raum realisieren läßt. Das ermöglicht es, abstrakte Dualitätsaussagen im Fock-Raum, wie sie von Araki [ARAKI 63], oder auch in der Arbeit [LE/RO/TE 78] gezeigt werden, zu benutzen. Mit den gleichen Methoden wurde in [SCH-MIR89] die Haag-Dualität für zusammenhängende Intervalle gezeigt. Ich will im ersten Abschnitt diese abstrakten Dualitätsaussagen diskutieren. Im zweiten Abschnitt werde ich die Realisierung der Vakuumdarstellung im Fock-Raum angeben. Danach diskutiere ich eine spezielle Klasse von Diffeomorphismen von S^1, deren Wirkung im Einteilchen-Raum benötigt wird. Der vierte Abschnitt dieses Kapitels ist dann dem Beweis der oben erwähnten Aussage gewidmet. Im letzten Abschnitt zeige ich, wie man entsprechende Aussagen auch für die im letzten Kapitel betrachteten lokalen Erweiterungen gewinnen kann.

4.1 Abstrakte Dualität im Fock-Raum

Es sei H ein komplexer Hilbert-Raum, mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Der *bosonische Fock-Raum*, e^H, ist die direkte Summe über die symmetrisierten Tensorprodukte von H mit sich selber:

$$e^H \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} H^{\otimes n}_{\text{sym}}. \tag{4.2}$$

Ich notiere im folgenden das Skalarprodukt in e^H ebenfalls mit $(\cdot,\cdot)$, das Skalarprodukt in $H^{\otimes n}_{\text{sym}}$ mit $(\cdot,\cdot)_{\text{sym}}$. Für $h \in H$ sei e^h derjenige Vektor in e^H, dessen Komponente im n-Teilchenraum $(n!)^{-\frac{1}{2}} h \otimes \cdots \otimes h$ ist. Die Vektoren e^h, $h \in H$ sind linear unabhängig und endliche Linearkombinationen dieser Vektoren bilden einen dichten Unterraum in e^H. Es gilt:

$$\left(e^h, e^k\right) = e^{(h,k)}. \tag{4.3}$$

Die Formel:

$$\widetilde{W}(h)e^k \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{(h,h)}{2}} e^{-(h,k)} e^{h+k} \quad h \in H \tag{4.4}$$

definiert einen auf einem dichten Unterraum isometrischen, und damit einen unitären Operator in e^H. Diese Operatoren (die *Weyl-Operatoren*) erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$\widetilde{W}(h)\widetilde{W}(k) = e^{-i\text{Im}(h,k)} \widetilde{W}(h+k) \quad h, k \in H. \tag{4.5}$$

Die von den Operatoren $\widetilde{W}(h)$, $(h \in H)$, erzeugte $*$-Algebra heißt *Weyl-Algebra*.

Definition 4.1.1: Sei M eine Teilmenge von H. Das *symplektische Komplement* M' von M in H ist die Menge aller $k \in H$, für die $\text{Im}(h,k) = 0$ ist, für alle $h \in M$.

Ich zitiere folgende Resultate aus [LE/RO/TE 78] (siehe auch [ARAKI 63]):

Proposition 4.1.2:
(i) M' ist ein abgeschlossener reeller Unterraum von H.
(ii) $M \subset N \;\Rightarrow\; N' \subset M'$.
(iii) $M'' = \overline{M}$ ist der kleinste, abgeschlossene reelle Unterraum von H, der M enthält.
(iv) $(M + iM)' = M' \cap iM' = M^{\perp}$, das orthogonale Komplement von M in H.
(v) $M' = \{0\}$, falls M dicht in H ist.

Ich möchte noch einmal betonen, daß das symplektische Komplement einer Menge immer ein *reeller* Unterraum in H ist. Nach diesen Vorbereitungen kann ich die von einer Teilmenge $M \subset H$ erzeugte von Neumann-Algebra in e^H definieren.

Definition 4.1.3: Für $M \subset H$, eine beliebige Teilmenge, sei:

$$R(M) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\widetilde{W}(h) | h \in M\right\}'' \subset \mathcal{B}(e^H). \tag{4.6}$$

Dabei bezeichne ich für eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(e^H)$, mit $\mathcal{M}'$ die Kommutante von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{B}(e^H)$.

Ich komme nun zu dem Hauptresultat dieses Abschnittes (siehe [LE/RO/TE 78, Theorem I.3.2])

Theorem 4.1.4: (*Abstrakte Dualität im Fock-Raum*) Es sei H ein komplexer Hilbert-Raum, M und N reelle Unterräume von H. Ich bezeichne mit $\overline{M} = M''$ den Abschluß von M. Dann gilt:
(i) $R(M) = R(\overline{M})$.
(ii) e^0 ist zyklisch für $R(M)$ genau dann, wenn $M + iM$ dicht in H ist.
(iii) e^0 ist separierend für $R(M)$ genau dann, wenn $\overline{M} \cap i\overline{M} = \{0\}$ ist.
(iv) $R(M)' = R(M')$.
(v) $(R(M) \cup R(N))'' = R(M + N)$.
(vi) $R(M) \cap R(N) = R(\overline{M} \cap \overline{N})$, so daß $R(M)$ genau dann ein Faktor ist, wenn $\overline{M} \cap M' = \{0\}$ ist.

4.2 Die Realisierung der Vakuumdarstellung im Fock-Raum

Ich möchte nun die Realisierung der Darstellung $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ von $\mathcal{U}$ im Fock-Raum angeben. Als erstes bemerkt man, daß wenn f_1 und f_2 zwei reelle Testfunktionen sind, die sich nur um eine Konstante unterscheiden, dann $\pi_0(W(f_1)) = \pi_0(W(f_2))$ gilt. Es sei $(LV)_0 \stackrel{\text{def}}{=} LV/V$. $(LV)_0$ besteht also aus Äquivalenzklassen von glatten Testfunktionen auf S^1 mit Werten in V, wobei zwei Funktionen äquivalent sind, wenn sie sich nur um eine Konstante unterscheiden. Falls dies keinen Anlaß zu Mißverständnissen gibt, werde ich im folgenden in der Notation keine Unterscheidung zwischen Elementen von $(LV)_0$ und ihren Repräsentanten in LV machen. Die Fourier-Transformation auf S^1

liefert einen Isomorphismus zwischen LV und dem Raum aller Folgen f_n ($n \in \mathbb{Z}$), mit: (a) $f_n \in V_\mathbb{C}$, $f_0 \in V$, (b) $f_{-n} = f_n^*$ und (c) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+n^{2k})\langle f_n, f_n\rangle < \infty \; \forall k \in \mathbb{N}_0$. Die Notationen sind wie im dritten Kapitel. Ich identifiziere im folgenden LV und den durch die Bedingungen (a), (b) und (c) festgelegten Folgenraum. $(LV)_0$ trägt in natürlicher Weise die Struktur eines komplexen Vektorraumes: Man definiert die Multiplikation mit i in LV durch:

$$(if)_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} if_n & \text{falls } n > 0, \\ f_0 & \text{falls } n = 0, \\ -if_n & \text{falls } n < 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Auf der rechten Seite dieser Definition steht dabei die Multiplikation mit der komplexen *Zahl* i in dem komplexen Vektorraum $V_\mathbb{C}$. Man sieht schnell, daß die so definierte Multiplikation mit i den Raum LV invariant läßt: $f \in LV \Rightarrow if \in LV$ und auf $(LV)_0$ eine wohldefinierte komplexe Struktur bestimmt, d.h. reell-linear ist und $i^2 = -1$ erfüllt. Weiter kann man ein (komplexes) Skalarprodukt auf diesem komplexen Vektorraum angeben: $(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k\langle f_k, g_k\rangle$. Diese Definitionen machen $(LV)_0$ zu einem komplexen Prä-Hilbertraum. Ich bezeichne den Abschluß von $(LV)_0$ in der so definierten Hilbertraummetrik mit H. Wiederum mit der Fourier-Transformation, läßt sich H realisieren als der Hilbert-Raum aller Äquivalenzklassen von Folgen $\{f_n\}$, ($f_n \in V_\mathbb{C}$), mit den Eigenschaften (a) und (b) oben, sowie $\sum_{k=1}^{\infty} k\langle f_k, f_k\rangle < \infty$. Bemerkt man nun noch die Eigenschaften:

$$f, g \in (LV)_0 \;\Rightarrow\; -i\mathrm{Im}(f,g) = -\frac{1}{2}A(f,g), \tag{4.8}$$

$$f \in (LV)_0 \;\Rightarrow\; (e^0, \widetilde{W}(f)e^0) = \omega_0(W(f)), \tag{4.9}$$

so sieht man, daß sich die Vakuumdarstellung von $\mathcal{U}$ in e^H realisieren läßt. Die Vorschrift:

$$U\pi_0(W(f))\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{W}(f)e^0 \quad f \in (LT)_0 \tag{4.10}$$

liefert einen unitären Operator U von $\mathcal{H}_0$ nach e^H, der gleichzeitig ein (schwach stetiger) $*$-Algebren-Isomorphismus ist und es gilt:

$$U\pi_0(\mathcal{U}(I))''U = \{\widetilde{W}(f) | \mathrm{supp}(f) \subset I\}'' \quad I \Subset S^1. \tag{4.11}$$

Ich werde fortan diese Identifizierung benutzen und $W(f)$ statt $\widetilde{W}(f)$ für einen Weyl-Operator in $\mathcal{B}(e^H)$ schreiben.

4.2.1 Stromfelder als unbeschränkte Operatoren, Rotationen und Zustandssummen

Ich will nun noch einige Resultate diskutieren, die zwar in diesem Kapitel keine Rolle spielen, aber in dem Kapitel über Casimir-Felder benötigt werden.

Wie schon in der Diskussion der Auswahlkriterien der Zustände für $\mathcal{U}$ erwähnt, lassen sich in der Vakuumdarstellung von $\mathcal{U}$ die Stromoperatoren:

$$J[f] = -i\frac{d}{d\lambda}\pi_0(W(\lambda f))|_{\lambda=0}$$

als unbeschränkte Operatoren definieren. Die Fock-Raum-Realisierung der Vakuumdarstellung liefert ~~nun~~ eine einfache (und wohlbekannte) Beschreibung dieser unbeschränkten Operatoren.

Es sei $\mathcal{F}_0$ der Unterraum von Vektoren in e^H, deren Komponenten in $H_{\text{sym}}^{\otimes m}$ nur für endlich viele m von Null verschieden ist (Unterraum der Zustandsvektoren mit endlicher Teilchenzahl). Ich definiere für $f \in (LV)_0$, zwei Operatoren $J^{\pm}[f]$, durch $\mathrm{dom}(J^{\pm}[f]) = \mathcal{F}_0$, und

$$\begin{aligned} J^+[f](g_1 \otimes \cdots \otimes g_m)_{\text{sym}} &= \sqrt{(m+1)!}(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_m)_{\text{sym}} \\ J^-[f](g_1 \otimes \cdots \otimes g_m)_{\text{sym}} &= \sqrt{m!}\left(\sum_{k=1}^{m}(f, g_k)(g_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{g_k} \otimes \cdots \otimes g_m)_{\text{sym}}\right). \end{aligned}$$

(Der Hut über einem Element bedeutet das Weglassen dieses Elementes.) Dann sind $J^{\pm}[f]$ abschließbare Operatoren mit $J^{\pm}[f] = J^{\mp}[f]^*|_{\mathcal{F}_0}$, und die Operatoren $J[f] \stackrel{\text{def}}{=} J^+[f] + J^-[f]$ erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$[J[f], J[g]] = \int \frac{dz}{2\pi i}\langle f', g\rangle \quad f, g \in LV. \tag{4.12}$$

Für die speziellen Funktionen $\epsilon_m^{\alpha}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(z^m + z^{-m})$, $(n \geq 1, \alpha \in V)$ und mit der Notation $j_m^{\alpha} = J[\epsilon_m^{\alpha}]$, $j_{-m}^{\alpha} = J[i\epsilon_m^{\alpha}]$, $m \geq 0$, nehmen diese die Form:

$$\left[j_k^{\alpha}, j_m^{\beta}\right] = k\delta_{k,-m}\langle\alpha, \beta\rangle, \quad k, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{4.13}$$

an. Ich wähle nun eine feste Orthonormalbasis e_i, $(i = 1, \dots n)$ in V und notiere die Operatoren $j_m^i \stackrel{\text{def}}{=} j_m^{e_i}$ $(i = 1, \dots, n,\ m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$. Man sieht, daß die Operatoren j_{-m}^i für $m \geq 1$ und $i = 1, \dots, n$, miteinander kommutieren. Aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\epsilon_m^{e_i}$ folgt weiter, daß die Vektoren:

$$j_{-n_1}^{i_1} j_{-n_2}^{i_2} \cdots j_{-n_k}^{i_k} \Omega \tag{4.14}$$

linear unabhängig sind, falls die Indizes den Bedingungen: $n_r > 0$; $i_r \geq i_{r+1}$ und $n_r \geq n_{r+1}$ wenn $i_r = i_{r+1}$ ist, genügen. Mehr als das: Ist $\mathcal{P}(V) = \mathbb{C}[j_{-m}^i]_{m>1}^{i=1,\dots,n}$ die Polynomalgebra in den Unbestimmten j_{-n}^i, dann ist $\mathcal{P}(V)\Omega$ ein freier $\mathcal{P}(V)$-Modul und $\mathcal{H}_0$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{P}(V)\Omega$ in $\mathcal{H}_0$ [SEGAL 81].

Zustandssummen und Rotationen: Zustandssummen werden im weiteren Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle spielen, deshalb möchte ich sie hier in einer möglichst allgemeinen Form definieren. Sei dazu $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum, mit einer unitären starkstetigen Darstellung der Rotationsgruppe $U(1)$. Der Erzeugende dieser Darstellung, L_0, habe nichtnegatives diskretes Spektrum und sei weiterhin so, daß für alle $t \geq 0$, e^{-tL_0} ein Spurklasseoperator ist. Die Zustandssumme $Z_{\mathcal{H}}(t)$ (oder einfach $Z(t)$, wenn keine Mißverständnisse entstehen können), ist definiert als:

$$Z_{\mathcal{H}}(t) = \mathrm{tr}(e^{-tL_0}).$$

Die Funktion Z ist eine Verallgemeinerung der Dimensionsfunktion, sie erfüllt:

$$Z_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}(t) = Z_{\mathcal{H}_1}(t) \cdot Z_{\mathcal{H}_2}(t), \quad Z_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}(t) = Z_{\mathcal{H}_1}(t) + Z_{\mathcal{H}_2}(t). \tag{4.15}$$

In dieser Arbeit ist der Fall am wichtigsten, in der das Spektrum von L_0 aus den nichtnegativen ganzen Zahlen $\mathbb{N}_0$ besteht. Bezeichnet man in diesem Fall mit $\mathcal{H}(m)$ den Eigenraum von L_0 zum Eigenwert m, so gilt:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{H}(m); \qquad Z_{\mathcal{H}}(t) = \sum_{m\geq 0} \dim\mathcal{H}(m)e^{-tm}.$$

Ich möchte nun die Zustandssumme $Z_{\mathcal{H}_0}(t)$ berechnen, wenn $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ die Vakuumdarstellung von $\mathcal{U}$ ist. Die Darstellung der starren Rotationen ist in diesem Fall gegeben durch

$$U\left(r\left(\phi\right)\right)\pi_0(W(f))U^*\left(r\left(\phi\right)\right) = \pi_0(W(u(r(-\phi))f))$$

und $U(r(\phi))\Omega = \Omega$. Ist L_0 der Erzeugende dieser Einparametergruppe, so überzeugt man sich, daß die Vertauschungsrelationen von L_0 und j^i_m durch:

$$[L_0, j^i_m] = -mj^i_m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

gegeben sind: Die Anwendung des Operators j^i_{-m} erzeugt die Energie m. Der Eigenraum $\mathcal{H}_0(m)$ der Energie m besteht also gerade aus den Vektoren (4.14), für die $\sum_{j=1}^k n_j = m$ ist. Da diese Vektoren unter den nach (4.14) gegebenen Bedingungen linear unabhängig sind, folgt, daß die Dimension von $\mathcal{H}_0(m)$ durch $P(m)^n$ gegeben ist, wenn $n = \dim V$ ist und $P(m)$ die Anzahl der Partitionen von m in nichtnegative ganze Zahlen ist. Benutzt man elementare Ergebnisse der Zahlentheorie (siehe z.B. [NIV/ZUCK 60]), so erhält man:

$$Z_{\mathcal{H}_0}(t) = \left(\prod_{m\geq 0}(1-e^{-tm})^{-1}\right)^n = \pi_0(q)^n,$$

mit $q = e^{-t}$ und $\pi_0(q) = \left(\prod_{m\geq 1}(1-q^m)\right)^{-1}$. Aus der Definition der Rotationen in $\mathcal{H}_L$ (siehe (3.4)) und den Formeln (4.15), folgt für die Vakuumdarstellung, $\mathcal{H}_L$, der lokalen Erweiterung $\mathcal{F}_L$, von $\mathcal{U}$:

$$Z_{\mathcal{H}_L}(t) = (\pi_0(q))^n \sum_{\alpha\in L} q^{\langle\alpha,\alpha\rangle}, \quad (q = e^{-t}). \tag{4.16}$$

4.3 Die Wirkung von Diffeomorphismen in H

Ich will nun beschreiben, wie die Diffeomorphismen von S^1 in H wirken und Eigenschaften von bestimmten Einparametergruppen ableiten. Diese werden bei dem Beweis über die Verletzung der Dualität benötigt.

Ein Diffeomorphismus[1] von S^1 ist eine invertierbare, glatte (d.h. C^∞) Abbildung von S^1 auf S^1, deren Inverse ebenfalls glatt ist. Sind für $i = 1, 2$, Φ_i: $z \mapsto \Phi_i z$ Diffeomorphismen, so ist deren Hintereinanderausführung, $\Phi_1\Phi_2$: $z \mapsto \Phi_1(\Phi_2 z)$ ebenfalls ein Diffeomorphismus. Die Diffeomorphismen von S^1 bilden eine Gruppe, Diff(S^1),

[1] Ich betrachte hier nur orientierungserhaltende Diffeomorphismen.

mit der Hintereinanderausführung als Gruppenmultiplikation. Schreibt man $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \arg\theta < 2\pi$, so bekommt man eine glatte Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ durch:

$$\Phi(e^{i\theta}) = e^{i\hat{\Phi}(\theta)}. \tag{4.17}$$

Die so definierte Funktion erfüllt die Quasiperiodizitäts-Bedingung $\hat{\Phi}(\theta + 2\pi) = 2\pi + \hat{\Phi}(\theta)$. Umgekehrt definiert jeder Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$, der diese Quasiperiodizitäts-Bedingung erfüllt, einen Diffeomorphismus von S^1. Ich werde des öfteren zwischen diesen beiden äquivalenten Beschreibungen von Diffeomorphismen wechseln. Dabei sind dann die Regeln (3.27) zu beachten.

Die Diffeomorphismen von S^1 wirken in LV durch reell-lineare Operatoren:

$$\begin{aligned} \mathrm{Diff}(S^1) \ni \Phi \mapsto u(\Phi), \quad & (u(\Phi)f)(z) = f\left(\Phi^{-1}(z)\right) \\ u(\Phi)(f_1 + f_2) = u(\Phi)f_1 + u(\Phi)f_2, \quad & u(\Phi)\lambda f = \lambda u(\Phi)f, \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weil die konstanten Funktionen in LV invariant unter dieser Wirkung sind, erhält man durch die Operatoren $u(\Phi)$, $\Phi \in \mathrm{Diff}(S^1)$, auch eine Wirkung auf $(LV)_0$. Wiederum mache ich in der Notation keine Unterscheidung zwischen diesen beiden Wirkungen. Wichtig ist, daß die Wirkung sowohl auf LV, als auch auf $(LV)_0$ geometrisch ist:

$$\mathrm{supp}(f) \subset I \Rightarrow \mathrm{supp}(u(\Phi)f) \subset \Phi(I). \tag{4.18}$$

Die Operatoren $u(\Phi)$, $\Phi \in \mathrm{Diff}(S^1)$, erhalten die symplektische Form, d.h. für $f, g \in (LV)_0$ gilt:

$$A(u(\Phi)f, u(\Phi)g) = A(f, g). \tag{4.19}$$

Formal folgt diese Gleichung aus der Relation:

$$\left(u(\Phi^{-1})f\right)'(z)\left(u(\Phi^{-1})g\right)(z)dz = f'(\Phi(z))g(\Phi(z))\frac{d\Phi}{dz}(z)dz = f'(\Phi)g(\Phi)d\Phi.$$

Ist für einen Diffeomorphismus Φ, $u(\Phi)$ sogar eine komplex-lineare Abbildung (mit der in (4.7) definierten komplexen Struktur), gilt also:

$$u(\Phi)i = iu(\Phi), \tag{4.20}$$

so kann man mit (4.19) zeigen, daß der Operator $u(\Phi)$ isometrisch ist:

$$\begin{aligned} (u(\Phi)f, (u(\Phi)g) &= \mathrm{Re}(u(\Phi)f, (u(\Phi)g) + i\mathrm{Im}(u(\Phi)f, u(\Phi)g) \\ &= \mathrm{Re}(u(\Phi)f, u(\Phi)g) + i\mathrm{Im}(f, g) \ \text{(wg. (4.8 und (4.19))} \\ &= \mathrm{Im}(u(\Phi)f, iu(\Phi)g) + i\mathrm{Im}(f, g) \\ &= \mathrm{Im}(u(\Phi)f, u(\Phi)ig) + i\mathrm{Im}(f, g) \\ &= \mathrm{Re}(f, g) + i\mathrm{Im}(f, g) = (f, g). \end{aligned}$$

Solche Operatoren lassen sich somit eindeutig zu unitären Operatoren in H fortsetzen. Man kann zeigen, daß die einzigen Diffeomorphismen Φ, die (4.20) erfüllen, die Elemente der Möbiusgruppe $PSU(1,1) \subset \mathrm{Diff}(S^1)$ sind. $\mathrm{Diff}(S^1)$ wirkt also nicht durch beschränkte komplex-lineare Operatoren in H! Diffeomorphismen wirken jedoch durch Bogoljubov-Automorphismen. Das heißt, daß für $\Phi \in \mathrm{Diff}(S^1)$, $u(\Phi)$ ein reell-linearer beschränkter Operator ist, der Gleichung (4.19) erfüllt, und so daß der (komplex-lineare) Operator:

$$u(\Phi) - iu(\Phi)i \tag{4.21}$$

ein Hilbert-Schmidt-Operator ist [SEGAL 81]. Das führt dazu, daß man eine unitäre projektive Darstellung von Diff(S^1) im Fock-Raum e^H erhält [SHALE 62]. Erwähnt sei auch, daß die Unitarität der Möbius-Gruppe in H dazu führt, daß sich diese Transformationen im Fock-Raum unitär implementieren lassen und den Vakuumzustand invariant lassen. Man sieht so, daß die Vakuumdarstellung der Stromalgebra $\mathcal{U}$ tatsächlich ein chirales konformes Netz auf S^1 definiert.

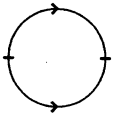
Ich möchte nun eine spezielle Einparametergruppe von Diffeomorphismen studieren, deren Darstellung die Bedingung (4.20) *nicht* erfüllt. Zur Motivation betrachte ich als erstes noch einmal die Einparameteruntergruppe der Dilatationen Λ_t von $PSU(1,1)$:

$$\Lambda_t(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh(t)z + \sinh(t)}{\sinh(t)z + \cosh(t)}. \tag{4.22}$$

Aus (4.22) macht man sich schnell folgende Beziehung klar:

$$\text{Im}z \neq 0 \Rightarrow \text{Re}\Lambda_t z > \text{Re}z \;\forall t > 0.$$

Weiterhin sind die Punkte $z = \pm 1 \in S^1$ Fixpunkte der Transformationen (4.22). Diesen Sachverhalt kann man sich bildlich so veranschaulichen ($t > 0$):



Die Einparametergruppe definiert also einen Fluß auf S^1. Um diesen Fluß genauer zu untersuchen, betrachtet man am besten den infinitesimalen Erzeugenden D der Gruppe $u(\Lambda_t)$. Dieser ist durch die Gleichung: $D = \frac{d}{dt}u(\Lambda_t)|_{t=0}$ definiert. Es ist:

$$\frac{1}{i}\log(\Lambda_t z) = \frac{1}{i}\log(z) + \frac{1}{i}\log(1 + z^{-1}\tanh t) - \frac{1}{i}\log(1 + z\tanh t).$$

Schreibt man wie oben: $\theta = \frac{1}{i}\log(z)$, und $\hat{\Lambda}_t(\theta) = \frac{1}{i}\log(\Lambda_t z)$, so folgt aus dieser Gleichung, mit $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n, t < 1$:

$$\hat{\Lambda}_t(\theta) = \theta - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(\tanh t)^n \sin(n\theta).$$

Es ergibt sich: $\frac{d}{dt}\hat{\Lambda}_t(\theta)|_{t=0} = -2\sin\theta$. Für D rechnet man dann nach:

$$(Df)(e^{i\theta}) = 2\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}f(e^{i\theta}).$$

Die Eigenschaften der Einparametergruppe Λ_t kann man jetzt sehr gut an dem Vektorfeld $X(\theta) = 2\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}$ ablesen[2]: Für $0 < \theta < \pi$ ist die Funktion $\sin(\theta)$ positiv, für

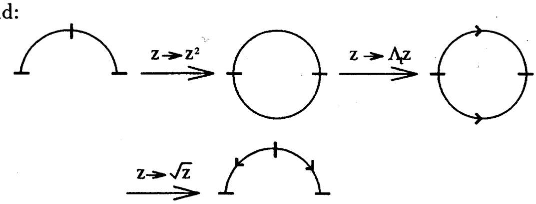
[2] Hier identifiziere ich in naheliegender Weise Funktionen auf S^1 mit 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

$\pi < \theta < 2\pi$ ist sie negativ und für $\theta = 0, \pi$ ist sie Null. Interpretiert man $X(\theta)$ als das Geschwindigkeitsvektorfeld auf S^1 (für die Gruppe Λ_t, bzw. $\hat{\Lambda}_t$), so ergibt sich gerade **Bild** 1. Das wichtige ist, daß man viele Eigenschaften der Gruppe $u(\Lambda_t)$ mit Hilfe ihres Erzeugenden D diskutieren kann.

Die Einparametergruppe von Diffeomorphismen, die ich genauer untersuchen will, die auch (4.20) nicht mehr erfüllt, ist gegeben durch:

$$\Phi_t(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\cosh(t)z^2 + \sinh(t)}{\sinh(t)z^2 + \cosh(t)}}. \tag{4.23}$$

In dieser Definition nehme ich für $\mathrm{Im}(z) > 0$ den Zweig der Wurzel, der positiven Imaginärteil hat, für $\mathrm{Im}(z) < 0$ nehme ich den Zweig, der negativen Imaginärteil hat. Weiterhin definiere ich für die Punkte $z = \pm 1$: $\Phi_t(\pm 1) = \pm 1$. Man überzeugt sich leicht, daß diese Vorschriften in der Tat eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen definieren. Mit den oben angegebenen Eigenschaften der Dilatationen ergibt sich folgendes Bild:



Ziel wird es sein, folgende Proposition zu beweisen:

Proposition 4.3.1: Für $t \geq 0$ definieren die $u(\Phi_t)$ eine stark-stetige und gleichförmig beschränkte Halbgruppe von reell-linearen Operatoren. Insbesondere gilt für alle $f \in H$: $\lim_{t\to 0} u(\Phi_t)f = f$ und $\|u(\Phi_t)\| \leq e^{\alpha t}$, für eine reelle Konstante $\alpha > 0$.

Bemerkungen: (a) In dieser Aussage benutze ich die Tatsache, daß H mit der Definition $(f,g)_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(f,g) \forall f,g \in H$, ein reeller Hilbert-Raum ist.
(b) Um die Notationen zu vereinfachen, beweise ich dieses Theorem nur für den Fall $\dim(V) = 1$. Der allgemeine Fall verläuft vollkommen analog.
(c) Man könnte versuchen, die starke Stetigkeit direkt zu zeigen, in dem man die Norm der Operatoren (4.21) für $\Phi = \Phi_t$ abschätzt. Es ist jedoch einfacher, das Hille-Yosida-Theorem zu benutzen. Ich zitiere dieses Theorem in einer für das hier vorliegende Problem geeigneten Form [YOSIDA 71, Seite 246 ff.].

Theorem 4.3.2: (*Hille-Yosida*) Es sei H ein reeller Hilbert-Raum, A ein linearer Operator in H mit Definitionsbereich $\mathrm{dom}(A)$, dicht in H und Bildbereich $\mathrm{rg}(A)$. Existieren Konstanten $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$, so daß für alle $n \geq N$ die Operatoren $(1 - \frac{A}{n})^{-1}$ beschränkt sind, mit

$$\|(1 - \frac{A}{n})^{-1}\| \leq (1 - \frac{\alpha}{n})^{-1}, \quad n \geq N, \tag{4.24}$$

dann gibt es genau eine stark-stetige Halbgruppe T_t, $t \geq 0$, mit

$$\|T_t\| \leq e^{\alpha t} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}T_t f = Af,$$

für eine dichten Unterraum von Vektoren f.

Um das Theorem anzuwenden, definiere ich einen unbeschränkten Operator in H, der die Bedingungen des Theorems erfüllt und zeige, daß die Halbgruppe von Operatoren, die nach dem Theorem eindeutig ist, durch die Halbgruppe der Operatoren $u(\Phi_t)$ gegeben wird.

Beweis der Proposition: Die formale Definition des Erzeugenden macht keine Schwierigkeiten. Wie in der Diskussion der Gruppe Λ_t, sieht man, daß: $\frac{d\Phi_t}{dt}(\theta)|_{t=0} = -\sin(2\theta)$ ist. Um einen wohldefinierten Operator in H zu bekommen, bemerkt man, daß die Elemente c_n, s_n $(n \geq 1)$ mit $c_n(e^{i\theta}) = \cos n\theta$ und $s_n(e^{i\theta}) = \sin n\theta$ eine orthogonale Basis des reellen Hilbert-Raumes H bilden mit:

$$\|c_n\|^2 = \|s_n\|^2 = \frac{n}{2}. \tag{4.25}$$

Man rechnet nach:

$$\sin 2\theta \frac{d}{d\theta} \cos n\theta = \begin{cases} \frac{n}{2}(\cos(n+2)\theta - \cos(n-2)\theta) & n > 2 \\ \cos 4\theta - 1 & n = 2 \\ \frac{1}{2}(\cos 3\theta - \cos\theta) & n = 1. \end{cases}$$

Analoge Formeln gelten für die Ableitungen der Sinus-Funktion. Das legt folgende Definitionen nahe: Es sei H_0 der Unterraum von H, der aus endlichen Linearkombinationen der c_n und s_n besteht:

$$f \in H_0 \Leftrightarrow f = \sum_{i=1}^{n_1} f_i c_i + \sum_{i=1}^{n_2} \tilde{f}_i s_i \quad f_i, \tilde{f}_i \in V.$$

Ich definiere zwei unbeschränkte Operatoren D_2 und $\widetilde{D_2}$ in H durch: $\mathrm{dom}(D_2) = \mathrm{dom}(\widetilde{D_2}) = H_0$, und:

$$D_2 c_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{n}{2}(c_{n+2} - c_{n-2}) & n > 2 \\ c_4 & n = 2 \\ \frac{1}{2}(c_3 - c_1) & n = 1 \end{cases} \tag{4.26}$$

$$D_2 s_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{n}{2}(s_{n+2} - s_{n-2}) & n > 2 \\ s_4 & n = 2 \\ \frac{1}{2}(s_3 + s_1) & n = 1 \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\widetilde{D_2} c_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\frac{n}{2}(c_{n+2} - c_{n-2}) & n > 2 \\ -c_4 & n = 2 \\ -\frac{1}{2}(c_3 + c_1) & n = 1 \end{cases} \tag{4.28}$$

$$\widetilde{D_2} s_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\frac{n}{2}(s_{n+2} - s_{n-2}) & n > 2 \\ -s_4 & n = 2 \\ -\frac{1}{2}(s_3 + c_1) & n = 1, \end{cases} \tag{4.29}$$

sowie durch lineare Fortsetzung auf ganz H_0. Somit sind D_2 und $\widetilde{D_2}$ unbeschränkte, dicht definierte lineare Operatoren in H.

Bemerkung: An dieser Stelle sieht man genau, wo die komplexe Linearität der Einparametergruppe Φ_t verletzt wird: Es ist $ic_n = -s_n$. Mit dieser Formel überzeugt man sich schnell, daß $D_2 ic_n = iD_2 c_n$ für $n \geq 2$ gilt. Für $n = 1$ gilt aber: $D_2 ic_1 - iD_2 c_1 = -c_1 \neq 0$!

Durch eine einfache Rechnung sieht man, daß $\widetilde{D_2} = D_2^*|_{H_0}$, d.h. für alle $f, g \in H_0$ gilt:

$$(\widetilde{D_2}f, g)_{\mathbb{R}} = (f, D_2 g)_{\mathbb{R}}.$$

Daraus folgt, daß die adjungierten Operatoren $(D_2)^*$ und $(\widetilde{D_2})^*$ dicht definiert sind und damit D_2 und $\widetilde{D_2}$ abschließbare Operatoren sind. Weiter sieht man anhand der Definitionen (4.26), daß, wenn f in der linearen Hülle der Vektoren c_n, s_n $n \geq 2$ liegt, die Formel

$$(D_2)^* f = -D_2 f \tag{4.30}$$

gilt. Für solche f und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|(D_2 - \lambda)f\|^2 &= \|D_2 f\|^2 + \lambda^2\|f\|^2 - \lambda(f, D_2 f)_0 - \lambda(D_2 f, f)_0 \\ &= \|D_2 f\|^2 + \lambda^2\|f\|^2 - \lambda(D_2^* f, f)_0 - \lambda(D_2 f, f)_0 \\ &= \|D_2 f\|^2 + \lambda^2\|f\|^2 \quad \text{wg. } (4.30) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Ich führe nun die Unterräume $H_0^{\pm}$ ein durch: $H_0^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H | f = \sum f_i c_i,\ f_i \in \mathbb{R}\}$ und $H_0^- \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H | f = \sum f_i s_i,\ f_i \in \mathbb{R}\}$. H_0^+ besteht also aus (Äquivalenzklassen von) geraden, H_0^- aus ungeraden Funktionen. $H_0^{\pm}$ sind zueinander orthogonale Unterräume, die unter den Operatoren D_2 und $\widetilde{D_2}$ invariant sind. Schreibt man für $f \in H_0^+$: $f = f_1 c_1 + \tilde{f}$, $f_1 = 2(f, c_1)_{\mathbb{R}}$, so gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \|(2\tilde{D}_2 - \lambda)f\|^2 &= \|(2D_2 - \lambda)\tilde{f}\|^2 + f_1^2\|(2D_2 - \lambda)c_1\|^2 \\ &+ 2f_1\left((2D_2 - \lambda)\,c_1, (2D_2 - \lambda)\,\tilde{f}\right)_{\mathbb{R}} \\ &= \|2D_2\tilde{f}\|^2 + \lambda^2\|\tilde{f}\|^2 + f_1^2\|(1+\lambda)c_1 - c_3\|^2 \\ &+ 2f_1\,(c_3 - (1+\lambda)c_1, (-5f_5 - \lambda f_3)c_3 - 3f_3 c_1)_{\mathbb{R}} \\ &= \|2D_2\tilde{f}\|^2 + \lambda^2\|f\|^2 + f_1^2((1+2\lambda)\|c_1\|^2 + \|c_3\|^2) \\ &+ 6f_1 f_3\|c_1\|^2 - 10 f_1 f_5\|c_3\|^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dabei wurden die Identitäten $\|c_n\|^2 = \frac{n}{2}$, $(n \in \mathbb{N})$, sowie Gleichung (4.31) benutzt. Bemerkt man nun noch die Ungleichungen $\|2D_2\tilde{f}\|^2 \geq 0$ und, für $n \in \mathbb{Z}$: $f_1 f_n \geq -|f_1 f_n| \geq -\frac{1}{2}(f_1^2 + f_n^2)$, $\frac{n}{2}f_n^2 \leq \|f\|^2$, und dividiert Gleichung (4.32) durch 4, so erhält man die folgende Abschätzung ($\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in H_0^+$):

$$\|(D_2 - \lambda)f\|^2 \geq (\lambda^2 - 4)\|f\|^2 \quad f \in H_0^+.$$

Durch eine vollkommen analoge Rechnung erhält man eine etwas schlechtere Abschätzung für $f \in H_0^-$:

$$\|(D_2 - \lambda)f\|^2 \geq (\lambda^2 - \lambda - 4)\|f\|^2 \quad f \in H_0^-. \tag{4.33}$$

Mit der Orthogonalität und Invarianz der Räume $H_0^{\pm}$ folgt, daß die Ungleichung (4.33) sogar für alle $f \in H_0$ gilt. Weiter sieht man, daß man die gleichen Rechenschritte auch für den Operator $\widetilde{D_2}$ durchführen kann, mit dem Ergebnis:

> Es existiert eine natürliche Zahl n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ und $f \in H_0 = \text{dom}(\widetilde{D_2})$ die Ungleichung
>
> $$\|(1 - \frac{\widetilde{D_2}}{n})f\|^2 \geq \frac{1}{2}\|f\|^2 \tag{4.34}$$
>
> gilt.

Aus diesen Ungleichungen sieht man, daß für $n \geq \max(n_0, 3)$, der Operator $1 - \frac{D_2}{n}$ eine beschränkte Inverse, $(1 - \frac{D_2}{n})^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, besitzt. Denn zunächst stellt man fest, daß für $n \geq 3$ der Vorfaktor in (4.33) positiv ist. Somit gilt, für $n \geq 3$ und $f \in \mathrm{rg}(1 - \frac{D_2}{n})$, $f = (1 - \frac{D_2}{n})g$:

$$\|(1 - \frac{D_2}{n})^{-1} f\|^2 = \|g\|^2 \leq (1 - \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2})^{-1} \|(1 - \frac{D_2}{n}) g\|^2 = (1 - \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2})^{-1} \|f\|^2. \quad (4.35)$$

$\mathrm{rg}(1 - \frac{D_2}{n})$ ist aber dicht in H_0 für $n \geq n_0$, denn mit Ungleichung (4.34) folgt, daß $(1 - \frac{(D_2)^*}{n})$ injektiv ist, für solche n, und somit: $\overline{\mathrm{rg}(1 - \frac{D_2}{n})} = \ker(1 - \frac{(D_2)^*}{n})^\perp = H$ ist. Benutzt man noch die Ungleichung:

$$(1 - n^{-1} - 4n^{-2})^{-\frac{1}{2}} \leq (1 - 2n^{-1})^{-1},$$

gültig für $n \geq 3$, so sieht man, daß die Voraussetzungen des Hille-Yosida Theorems mit $\alpha = 2$ und $N = \max(3, n_0)$ erfüllt sind. Der Operator D_2 erzeugt also eine eindeutige Einparameter(halb-)gruppe T_t. Um die Gleichheit $T_t = u(\Phi_t)$, $t \geq 0$, zu zeigen, benötigt man nur noch, daß für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d}{dt} \cos n\Phi_{-t}(\theta)|_{t=0} = \sin 2\theta \frac{d}{d\theta} \cos n\theta \quad (\text{analog } \sin n\theta).$$

Mit der Definition von D_2 folgt die Gleichheit aus der Eindeutigkeitsaussage des Hille-Yosida-Theorems. □

Ich habe mich hier darauf beschränkt, die Stetigkeit der Halbgruppe $u(\Phi_t)$, $t \geq 0$ zu zeigen. Vollkommen analog dazu kann man auch ähnliche Resultate für die Gruppe $u(\Phi_t^{-1}) = u(\Phi_{-t})$, $t \geq 0$ erhalten. Auch eine Verallgemeinerung auf geeignet gewählte Untergruppen mit $2n > 4$ Fixpunkten scheint möglich.

4.4 Lokale Algebren und ihre Kommutanten

Ich komme nun zu den Hauptaussagen dieses Kapitels. Ich werde die Kommutanten lokaler Algebren $R(M)$ berechnen (siehe (4.6)), wenn M geeignet gewählte Unterräume des Einteilchenraumes sind. Dabei werde ich die abstrakte Dualität (Theorem 4.1.4(iv)) benutzen.

Ich definiere zunächst lokale Unterräume des Einteilchenraumes H und die entsprechenden lokalen Algebren im Fock-Raum. Es sei $I \subset S^1$ eine endliche Vereinigung von nichtleeren disjunkten Intervallen[3], so daß auch das Komplement von I, I^c eine solche Vereinigung ist: $I = \cup_n I_{2n+1}$, $I^c = \cup_n I_{2n}$. Es seien Unterräume $S_0(I)$ und $S(I)$ von H, definiert durch:

$$S_0(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in (LV)_0 | \mathrm{supp} f \subset I\}$$
$$S(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in (LV)_0 | \mathrm{supp} f' \subset I\}.$$

Bemerkungen: (a) Die Bedingungen an den Träger der Testfunktionen sind natürlich als Bedingungen an *Repräsentanten* in LV zu verstehen. $S_0(I)$ besteht also aus Elementen, deren Repräsentanten in I^c gleich einer Konstanten sind, $S(I)$ aus Elementen,

[3]Die Frage ob diese Intervalle offen oder abgeschlossen sind, spielt keine Rolle.

deren Repräsentanten konstant auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplementes sind.
(b) Daraus folgt, wenn $I \subset S^1$ ein zusammenhängendes Intervall ist, die Gleichheit $S_0(I) = S(I)$. Weiter sieht man, wenn $I = \cup_{i=0}^{m} I_{2i+1}$ die Zerlegung in zusammenhängende Intervalle ist, daß:

$$S_0(I) = \sum_{i=0}^{m} S_0(I_{2i+1}). \tag{4.36}$$

Es sei nun wie oben, I eine Vereinigung disjunkter Intervalle. Ich definiere die lokalen Algebren $\mathcal{A}_0(I)$ und $\mathcal{A}(I)$ durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(I) &\stackrel{\text{def}}{=} R(S_0(I)) \\ \mathcal{A}(I) &\stackrel{\text{def}}{=} R(S(I)) \end{aligned}$$

Bemerkungen: (a) Ist $I \subset S^1$ ein Intervall, so sieht man mit der in Abschnitt (4.2) gemachten Realisierung der Vakuumdarstellung von $\mathcal{U}$:

$$\pi_0(\mathcal{U}(I))'' = \mathcal{A}_0(I) = \mathcal{A}(I).$$

(b) Ist I wieder Vereinigung der disjunkten Intervalle I_{2i+1}, $0 \leq i \leq m$, so folgt mit (4.36) und Theorem 4.1.4(v):

$$\mathcal{A}_0(I) = \left(\bigcup_{i=0}^{m} \mathcal{A}_0(I_{2i+1}) \right)''.$$

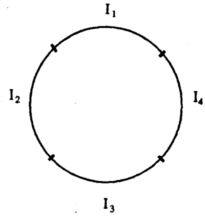
Ich beweise folgendes Theorem.

Theorem 4.4.1: Es sei $I = I_1 \cup I_3$ die Vereinigung zweier nichtleerer disjunkter Intervalle auf S^1, so daß das Komplement $I^c = I_2 \cup I_4$ ebenfalls die Vereinigung von nichtleeren Intervallen ist. Dann gilt:

$$\mathcal{A}_0(I)' = \mathcal{A}(I^c) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}(I)' = \mathcal{A}_0(I^c). \tag{4.37}$$

Bemerkung: Die Verallgemeinerung dieser Aussage, falls I eine beliebige Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle auf S^1 ist, scheint ebenfalls mit den folgenden Techniken möglich. Dabei sind jedoch andere Einparametergruppen von Diff(S^1) zu untersuchen. Ist I ein zusammenhängendes Intervall, so gilt $\mathcal{A}_0(I)' = \mathcal{A}_0(I^c)$. Dies folgt aus allgemeinen Resultaten [FRÖ/GAB 92][BRU/GUI/LO 93]. Für das hier vorliegende Modell wurde diese Aussage z.B. in [SCH-MIR89] bewiesen. In diesem Fall sind, wie oben bemerkt, die Algebren $\mathcal{A}_0(I)$ und $\mathcal{A}(I)$ gleich. Eine natürliche Verallgemeinerung des Theorems wäre also die Gültigkeit der Formel (4.37) für beliebige disjunkte Vereinigungen von endlich vielen Intervallen.

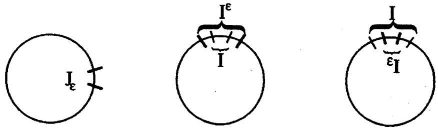
Beweis: Ich beweise zunächst die erste Formel in (4.37) für die spezielle Wahl der Intervalle: $I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in S^1 | \frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi\}$, $I_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in S^1 | \frac{5}{4}\pi < \arg z < \frac{7}{4}\pi\}$. Die Lage der Intervalle I_k, $k = 1, \ldots, 4$ auf S^1 ist in folgendem Bild dargestellt.



Mit der abstrakten Dualität (Theorem 4.1.4(iv)) und den Definitionen der lokalen Algebren, ist zu zeigen:

$$S_0(I)' = \overline{S(I^c)}. \tag{4.38}$$

(Hier ist $S_0(I)'$ das *symplektische* Komplement von $S_0(I)$ und $\overline{S(I)}$ der Abschluß von $S(I^c)$ in H.) Zunächst einige Definitionen: Es sei ϵ eine positive reelle Zahl, $\epsilon < \frac{\pi}{8}$. Für solche ϵ definiere ich ein Intervall $J_\epsilon \Subset S^1$, durch $J_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in S^1 | 0 \leq \arg z < \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{z \in S^1 | 2\pi - \frac{\epsilon}{2} < \arg z < 0\}$. J_ϵ ist also eine $\frac{\epsilon}{2}$-Umgebung von 1 in S^1. Falls $I \Subset S^1$ ein Intervall ist, definiere ich $I^\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} I \cdot J_\epsilon = \{z \cdot z' | z \in I, z' \in J_\epsilon\}$ und ${}^\epsilon I \stackrel{\text{def}}{=} ((I^c)^\epsilon)^c$. I^ϵ ist also eine $\frac{\epsilon}{2}$-Umgebung von I in S^1 und I ist eine $\frac{\epsilon}{2}$-Umgebung von ${}^\epsilon I$ in S^1, bildlich:



Weiter führe ich die Faltung eines Elementes $f \in H$ mit einer reellen Testfunktion ρ, $\rho(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho_n z^{-n}$ ein, durch:

$$(f * \rho)_n \stackrel{\text{def}}{=} f_n \rho_{-n}. \tag{4.39}$$

Es gilt

Lemma 4.4.2:
(i) Für $f \in H$ ist $f * \rho \in (LV)_0$.
(ii) Für $f \in (LV)_0$ gilt $(f * \rho)(\tilde{z}) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} f(z\tilde{z}) \rho(z)$.
(iii) Definiert man $\hat{\rho}$ durch $\hat{\rho}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(z^{-1})$ (bzw. $\hat{\rho}_n = \rho_{-n}$), dann gilt für $f, g \in H$: $(f * \rho, g) = (f, \hat{\rho} * g)$.
(iv) Ist $I \Subset S^1$ ein Intervall und $\operatorname{supp}(f) \subset I$, $\operatorname{supp}(\rho) \subset J_\epsilon$, dann ist $\operatorname{supp}(f * \rho) \subset I^\epsilon$.

Alle Aussagen sind, wie immer, modulo konstanter Funktionen zu verstehen. Der Beweis dieses Lemmas ist einfach, und für den Fall $V = \mathbb{R}$ in [SCH-MIR89] zu finden. Ich beschränke mich deshalb auf einige Bemerkungen. (i) Folgt aus der Tatsache, daß mit der Folge ρ_n schnell abfallender komplexer Zahlen, für $f \in H$, auch die Folge $\langle f_n \rho_{-n}, f_n \rho_{-n} \rangle$ schnell abfallend ist. (ii) Ist eine einfache Rechnung. (iii) Folgt aus der Eigenschaft $\rho_n^* = \rho_{-n}$, und der Hermitizität des inneren Produktes in $V_{\mathbb{C}}$: $\langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \lambda^* w \rangle$, für $v, w \in V_{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Aussage (iv) ist dann ein Korollar aus (ii) und (iii).

Lemma 4.4.3: Es seien die Intervalle I_1 und I_3 wie in der Behauptung des Theorems, sowie $I = I_1 \cup I_3$. Dann gilt:
(i) $f \in S_0(I_1 \cup I_3)'$ und $\mathrm{supp}(\rho) \subset J_\epsilon$ implizieren $f * \rho \in S_0({}^\epsilon I_1 \cup {}^\epsilon I_3)'$.
(ii) Es sei $f \in S_0(I)' \cap (LV)_0$, dann ist $f \in S(I^c)$.

Korollar: $f \in S_0(I)'$ und $\mathrm{supp}(\rho) \subset J_\epsilon$ implizieren $f * \rho \in S(I_2^\epsilon \cup I_4^\epsilon)$.

Bemerkung: Die für das weitere wichtige Aussage ist die des Korollars: Verschmierung mit einer glatten Testfunktion, deren Träger in J_ϵ liegt, macht aus einem Element in dem symplektischen Komplement von $S_0(I)$ ein Element in $S(I_2^\epsilon \cup I_4^\epsilon)$ (d.h. eine glatte Testfunktion). Die weitere Strategie des Beweises ist, diese Regularisierung von f wieder aufzuheben.

Beweis von Lemma 4.4.3: (ii) Sei f eine glatte Testfunktion im symplektischen Komplement von $S_0(I_1 \cup I_3)$. Insbesondere gilt also für alle $g \in (LV)_0$ mit $\mathrm{supp}(g) \subset I_1$: $-i\mathrm{Im}(f,g) = \int \frac{dz}{2\pi i}\langle f', g\rangle = 0$. Daraus folgt $f'(z) = 0$, für $z \in I_1$. Analog sieht man $f'(z) = 0$ für $z \in I_3$, also $\mathrm{supp}(f') \subset I_2 \cup I_4$ und $f \in S(I^c)$. (i) folgt aus Lemma 4.4.2(iii) und der Eigenschaft, daß mit ρ auch $\hat{\rho}$ Träger in J_ϵ hat. □

Ich wähle nun eine Folge ρ_n von reellen Testfunktionen auf S^1, mit: (a) $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset J_{\frac{1}{n}}$ und (b) $\lim_{n\to\infty} f * \rho_n = f \;\forall f \in H$. (Eine Approximation der Delta-Distribution). Dann folgt aus (b), für $f \in S_0(I)'$ und dem Korollar:

$$f \in \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} S(I_2^{\frac{1}{n}} \cup I_4^{\frac{1}{n}})}$$

Mit der folgenden Proposition ist dann die erste Formel in (4.37) bewiesen.

Proposition 4.4.4: Es gilt:

$$\overline{S(I^c)} = \overline{S(I_2 \cup I_4)} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} S(I_2^{\frac{1}{n}} \cup I_4^{\frac{1}{n}})} \tag{4.40}$$

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} S(I_2^{\frac{1}{n}} \cup I_4^{\frac{1}{n}})} \subset \overline{S(I_2 \cup I_4)}$$

ist. Die umgekehrte Relation ist trivial. Aufgrund der Definition der Einparametergruppe Φ_t (4.18) folgt, daß es eine Nullfolge t_n gibt mit $\Phi_{t_n}(I_2^{\frac{1}{n}} \cup I_4^{\frac{1}{n}}) \subset I_2 \cup I_4 \,\forall n \in \mathbb{N}$. Ist nun $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S(I_2^{\frac{1}{n}} \cup I_4^{\frac{1}{n}})$, dann gibt es eine Folge f_n, mit $f_n \in S(I_2^{\frac{1}{n}} \cup I_4^{\frac{1}{n}})$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Mit der geometrischen Wirkung der Transformationen $u(\Phi_t)$ folgt, daß $u(\Phi_{t_n})f_n \subset S(I_2 \cup S_4)$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$\|u(\Phi_{t_n})f_n - f\| \leq \|u(\Phi_{t_n})f - f\| + \|u(\Phi_{t_n})\| \cdot \|(f - f_n)\|.$$

Mit der gleichförmigen Beschränktheit und der starken Stetigkeit der Operatoren $u(\Phi_t)$ bei $t = 0$ (Proposition 4.3.1) folgt, daß f ein Häufungspunkt von $S(I_2 \cup I_4)$ ist und damit Gleichung (4.40).

Die zweite Gleichung in (4.37) beweist man wie folgt. Es sei $\varphi \mapsto r(\varphi)$, die Untergruppe der starren Rotationen in $PSU(1,1) \subset \mathrm{Diff}(S^1)$. Dann ist $r(\frac{\pi}{2})(I_1 \cup I_3) = I_2 \cup I_4$. Die Rotationen sind im Fock-Raum unitär dargestellt und wirken dort in der offensichtlichen Art und Weise geometrisch (dies gilt sogar für die gesammte Diffeomorphismengruppe $\mathrm{Diff}(S^1)$ [SEGAL 81]). Es gilt also, wenn ich diese Darstellung wieder mit U bezeichne:

$$U(r(\frac{\pi}{2}))\mathcal{A}_0(I)U(r(\frac{\pi}{2}))^* = \mathcal{A}_0(I^c),$$

und analog für $\mathcal{A}(I)$. Man erhält:

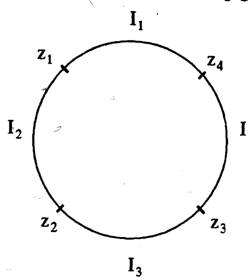
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0(I^c)' &= \Big(U(r(\frac{\pi}{2}))\mathcal{A}_0(I)U(r(\frac{\pi}{2}))^*\Big)' \\
&= U(r(\frac{\pi}{2}))\mathcal{A}_0(I)'U(r(\frac{\pi}{2}))^* \\
&= U(r(\frac{\pi}{2}))\mathcal{A}(I^c)U(r(\frac{\pi}{2}))^* \\
&= \mathcal{A}(I).
\end{aligned}$$

Durch Übergang zu den Kommutanten (und Theorem 4.1.4(i),(iv)) ergibt sich die zweite Gleichung (4.37) für diese Intervalle. Für beliebige Intervalle $\tilde{I}_k$, $(k = 1, \ldots, 4)$, die die Annahmen des Theorems erfüllen, bemerke ich nur, daß es einen Diffeomorphismus $\Phi \in \mathrm{Diff}(S^1)$ gibt, für den $\Phi(\tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_3) = I_1 \cup I_3$ und $\Phi(\tilde{I}_2 \cup \tilde{I}_4) = I_2 \cup I_4$. Dieser Diffeomorphismus ist, wie oben bemerkt, auf e^H unitär und geometrisch dargestellt. Die Behauptung ergibt sich somit durch Betrachtungen, wie sie eben für die Rotationen durchgeführt wurden. □

Bevor ich auf die physikalische Interpretation des Theorems eingehe, möchte ich zeigen, daß die Inklusion, $\mathcal{A}_0(I_1 \cup I_3) \subset \mathcal{A}_0(I_2 \cup I_4)'$ $(= \mathcal{A}(I_1 \cup I_3))$ tatsächlich eine echte Inklusion ist [WASSERMANN 89]. Seien dazu Funktionen f und g in LV gegeben mit:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \in I_1 \\ c_1 & z \in I_3 \end{cases}, \quad g(z) = \begin{cases} 0 & z \in I_2 \\ c_2 & z \in I_4 \end{cases}.$$

Dabei seien die Konstanten $c_1, c_2 \in V$ beliebig. Es ist dann $W(f) \in \mathcal{A}(I_2 \cup I_4)$ und $W(g) \in \mathcal{A}(I_1 \cup I_3)$. Die Lage der Intervalle und die Bezeichnungen ihrer Endpunkte z_i, $i = 1, \ldots, 4$, seien wie in der folgenden Abbildung gegeben.



Es gilt:

$$\begin{aligned} A(f,g) &= \int_{I_2\cup I_4} \frac{dz}{2\pi i}\langle f', g\rangle \quad (\text{wg. } f'|_{I_1\cup I_3} = 0) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{i=1}^{4}(-1)^i\langle f(z_i), g(z_i)\rangle\right) - \int_{I_2\cup I_4}\frac{dz}{2\pi i}\langle f, g'\rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\langle c_1, c_2\rangle \quad (\text{wg. } \langle f(z_i), g(z_i)\rangle = 0 \text{ für } z_i \neq 3). \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung wurde dabei eine partielle Integration vorgenommen. Aus den Vertauschungsregeln der Algebra $\mathcal{U}$ (3.1), erhält man:

$$W(f)W(g) = e^{\frac{i}{2\pi}\langle c_1, c_2\rangle}W(g)W(f), \tag{4.41}$$

so daß i. a. $W(g)$ nicht in $\mathcal{A}(I_2\cup I_4)' = \mathcal{A}_0(I_1\cup I_3)$ liegt. Die Inklusion ist also eine echte Inklusion. Ich zeige nun die eingangs erwähnte Eigenschaft, daß die Algebra $\mathcal{A}(I_2\cup I_4)$, und damit die Kommutante der in I_1 oder I_3 lokalisierten Observablen, von *Feldern erzeugt* wird, die in I_2 eine Ladung erzeugen und in I_4 wieder vernichten.

Proposition 4.4.5: Es sei $\zeta \in I_1 \cup I_3$ beliebig, und die Algebra $\mathcal{F}^0(I_2 \cup I_4) \subset \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}})$ definiert durch:

$$\mathcal{F}^0(I_2\cup I_4) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(\psi^\zeta_{\rho_2})^*\psi^\zeta_{\rho_4}\,|\,\text{supp}(\rho_i)\subset I_i, \int\frac{dz}{2\pi i}\rho_2 = \int\frac{dz}{2\pi i}\rho_4\right\}''.$$

(Notationen wie in Kapitel 3). Dann besteht diese Algebra aus Observablen: $\mathcal{F}^0(I_2\cup I_4) \subset \hat{\pi}(\mathcal{U})''$, und für die Einschränkung auf den Vakuumhilbertraum $\mathcal{H}_0$ gilt: $\pi_0(\mathcal{U}(I_1\cup I_3))' = \pi_0(\mathcal{F}^0(I_2\cup I_4))$.

Beweis: Ich benutze die oben eingeführte Notation $\pi_0(\mathcal{U}(I_1\cup I_3))'' = \mathcal{A}_0(I_1\cup I_3)$. Weil die Felder lokal relativ zu den Observablen sind, folgt als erstes die Inklusion: $\pi(\mathcal{F}_0(I_2\cup I_4)) \subset \mathcal{A}_0(I_1\cup I_3)'$. Als zweites bemerkt man, daß $\pi_0((\psi_{\rho_2})^\zeta)^*\psi_{\rho_4}) = \eta\pi_0(\psi_{\rho_4-\rho_2^\zeta}) = \pi_0(W(f))$, mit einem Phasenfaktor[4] η und einer Testfunktion $f \in LV$, deren Ableitung in $I_1\cup I_3$ ebenfalls verschwindet. Ist umgekehrt f ein Element in LV dessen Ableitung in $I_1\cup I_3$ verschwindet, dann kann man $-if'$ als Summe von Funktionen ρ_2 und ρ_4 schreiben, mit $z\rho_i(z) \in V$, $i = 2,4$ und $\text{supp}(\rho_i) \subset I_i$, $i = 2,4$: $-if'(z) = \rho_2(z) - \rho_4(z)$. Es ist dann:

$$\int\frac{dz}{2\pi i}(\rho_2(z) - \rho_4(z)) = -i\int\frac{dz}{2\pi i}f'(z) = 0.$$

Mit der Definition der Feldoperatoren ψ_ρ, (3.10), rechnet man dann nach:

$$\psi^\zeta_{\rho_4}(\psi^\zeta_{\rho_2})^* = \eta\hat{\pi}(W(f)) \quad \eta \in S^1.$$

Es folgt also auch $\mathcal{A}(I_2\cup I_4) \subset \pi_0(\mathcal{F}_0(I_2\cup I_4))$, und somit

$$\mathcal{A}(I_2\cup I_4) \subset \pi(\mathcal{F}_0(I_2\cup I_4)) \subset \mathcal{A}_0(I_1\cup I_3)' = \mathcal{A}(I_2\cup I_4),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Ich notiere noch folgende Formel für die Ladungen $\alpha_{\rho_2} = \alpha_{\rho_4}$ der Eins-Formen ρ_2 und ρ_4. Sind $z_1 \in I_1$ und $z_3 \in I_3$, so gilt:

$$f(z_3) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_3} dz f'(z) = i\int_{z_1}^{z_3} dz\rho_2(z) = -2\pi\int\frac{dz}{2\pi i}\rho_2 = -2\pi\alpha_{\rho_2}. \tag{4.42}$$

[4] Der Phasenfaktor hängt natürlich von ζ ab.

4.5 Verallgemeinerung auf lokale Erweiterungen

Ich zeige nun, wie man das Ergebnis des letzten Abschnittes auf lokale Erweiterungen der Stromalgebra verallgemeinern kann. Dazu benutzt man die Tatsache, daß sich eine lokale Erweiterung von $\mathcal{U}$ als DHR-Feldalgebra ansehen kann. Zunächst notiere ich das folgende Korollar aus Theorem 4.4.1 und den Vertauschungsregeln (4.41):

Korollar 4.5.1: Für ein Gitter $L \subset V$, sei $S_L(I_1 \cup I_3)$ die Teilmenge von $S(I_1 \cup I_3)$, bestehend aus allen Testfunktionen f, für die $f(z_2) - f(z_4) \in 2\pi L$ ist, für alle $z_2 \in I_2$, $z_4 \in I_4$. Es sei $\mathcal{A}_L(I_1 \cup I_3) \stackrel{\text{def}}{=} R(S_L(I_1 \cup I_3))$ und analoge Definitionen für $I_2 \cup I_4$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}_L(I_1 \cup I_3)' = \mathcal{A}_{L^*}(I_2 \cup I_4). \tag{4.43}$$

Bemerkung: Dieses Korollar zeigt auch, daß die Voraussetzung in Theorem 4.1.2, daß M ein Unterraum ist, notwendig ist.

Beweis: Die Vertauschungsregeln (4.41) hängen nur von den Differenzen der Funktionswerte auf den Komponenten des Komplementes von supp(f) und supp(g) ab. Es folgt, daß die Regeln (4.41) unabhängig von der Wahl der Repräsentanten in LV sind. Ebenso überzeugt man sich, daß die Teilmengen $S_L(I_k \cup I_j)$ wohldefiniert sind. Mit (4.41) und Theorem 4.4.1 folgt dann:

$$\mathcal{A}_{L^*}(I_2 \cup I_4) \subset \mathcal{A}_L(I_1 \cup I_3)' \subset \mathcal{A}(I_2 \cup I_4). \tag{4.44}$$

$\mathcal{A}(I_2 \cup I_4)$ wird aber von Weyloperatoren $W(f)$ mit $\text{supp}(f') \subset I_2 \cup I_4$ erzeugt. Die einzigen, die mit $\mathcal{A}_L(I_1 \cup I_3)$ kommutieren sind aber die aus $\mathcal{A}_{L^*}(I_2 \cup I_4)$, und das Ergebnis folgt. □

Es sei nun L ein integrales, gerades Gitter in V, $\mathcal{F}_L$ die entsprechende lokale Erweiterung und $(\pi_L, \mathcal{H}_L)$ ihre Vakuumdarstellung. Für disjunkte Intervalle I_k, $k = 1, \ldots, 4$, und $\cup_k I_k = S^1$, definiert man die Algebren:

$$\pi_L(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi_L(\mathcal{F}_L(I_1) \cup \pi_L(\mathcal{F}_L(I_3)))'',$$

und analog $\pi_L(\mathcal{F}_L(I_2 \cup I_4))$. Dann gilt:

Proposition 4.5.2:

$$\pi_L(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3))' = \{\pi_L(\phi_\rho W(f)) \,|\, \text{supp}(\rho) \subset I_2\,,\ f \in S_{L^*}(I_2 \cup I_4)\}''. \tag{4.45}$$

Beweis: Sei $T = \hat{L} = V/L^*$ die zu L duale Gruppe, $T \ni g \mapsto \beta_g$, ihre Wirkung auf $\mathcal{F}_L$:

$$g = [v],\ F \in \mathcal{F}_L \Rightarrow \beta_g(F) = e^{2\pi i \langle Q,v\rangle} F e^{-2\pi i \langle Q,v\rangle}.$$

Die bedingte Erwartung auf die Kommutante $U(T)'$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_L)$ bezeichne ich wieder mit m. Ich identifiziere im folgenden die Algebren $\mathcal{F}_L(I)$, $I \Subset S^1$, mit ihrer Vakuumdarstellung, d.h. ich schreibe ϕ_ρ anstatt $\pi_L(\phi_\rho)$ etc. Ich unterteile den Beweis in zwei Schritte.

(a) Sei als erstes $A \in m(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)')$. Dann ist A eichinvariant und es existieren folglich Operatoren $A_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, $\alpha \in L$, mit:

$$A = \bigoplus_{\alpha \in L} \pi_\alpha(A_\alpha). \tag{4.46}$$

Nun wird $\mathcal{F}_L((I_1 \cup I_3))$ von Operatoren $\phi_{\rho_1}\phi_{\rho_3}$, mit $\mathrm{supp}(\rho_k) \subset I_k$, $k = 1, 3$, und $\alpha_{\rho_1}, \alpha_{\rho_3} \in L$, erzeugt. Wegen $\beta_{[v]}(\phi_{\rho_k}) = e^{2\pi i \langle \alpha_{\rho_k}, v\rangle}$, wird dann $m(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3))$ von Operatoren $\phi_{\rho_1}\phi_{\rho_3}$, $\alpha_{\rho_1} + \alpha_{\rho_3} = 0$ erzeugt. Mit Gleichung (4.42) sieht man, daß diese Operatoren bis auf ein Phase gleich $\pi_L(W(f))$, $f \in S_L(I_1 \cup I_3)$ sind. Es folgt

$$m(\mathcal{F}(I_1 \cup I_3)) = \pi_L(\{W(f) \,|\, f \in S_L(I_1 \cup I_3)\})'' = \pi_L(\mathcal{A}_L(I_1 \cup I_3))''. \tag{4.47}$$

Wegen $m(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)') \subset m(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3))'$ folgt damit und mit Korollar 4.5.1 (Gleichung (4.43)):

$$A_\alpha \in \mathcal{A}_{L^*}(I_2 \cup I_4) \quad \forall \alpha \in L.$$

Sei nun ρ, mit $\mathrm{supp}(\rho) \subset I_1$ und $\alpha_\rho \in L$ beliebig. Dann ist aufgrund der Lokalität der Wirkung von T: $\phi_\rho \in \mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3) \subset m(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)')'$. ϕ_ρ vertauscht also insbesondere mit A. Mit (4.46) und der Definition der Feldoperatoren (siehe Gleichung (3.6)) folgt:

$$\begin{aligned} \phi_\rho A &= \phi_\rho \bigoplus_{\alpha \in L} \pi_\alpha(A_\alpha) \\ &= \bigoplus_{\alpha \in L} \pi_{\alpha - \alpha_\rho}(A_\alpha)\phi_\rho \\ &= \bigoplus_{\alpha \in L} \pi_\alpha(A_{\alpha + \alpha_\rho})\phi_\rho \\ &= A\phi_\rho. \end{aligned}$$

Es folgt für alle $\alpha \in L$: $A_\alpha = A_0$, und somit ist A ein Element in $\pi_L(\mathcal{A}_{L^*}(I_2 \cup I_4))$.

(b) Es sei jetzt $F \in \mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)'$ ein Element, das wie ein irreduzibler Tensor transformiert: $\beta_{[v]}(F) = e^{2\pi i \langle \alpha, v\rangle} F$ für ein $\alpha \in L$. Es ist ein bekanntes Resultat (siehe z.B. [BRA/ROB 79 II]), daß die Algebra $\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)'$, als unter der Wirkung von T invariante von Neumann-Algebra, von solchen Elementen erzeugt wird. Es sei ρ eine in I_2 lokalisierte Eins-Form mit $\mathrm{supp}(\rho) \subset I_2$ und $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho = \alpha$. Dann ist $F \cdot \phi_\rho^*$ ein unter T invarianter Operator: $F \cdot \phi_\rho^* \in m(\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)')$. Mit (a) erhält man:

$$F = \phi_\rho \pi_L(A), \quad A \in \mathcal{A}_{L^*}(I_2 \cup I_4).$$

Die Behauptung folgt nun aus der oben erwähnten Tatsache, daß die Operatoren F die Algebra $\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)'$ erzeugen. □

Wieder kann man das Ergebnis so interpretieren, daß die Kommutante $\mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)'$ von Feldern erzeugt wird, die in der Komponente I_2 des Komplementes eine Ladung erzeugen, in der anderen Komponente I_4 wieder vernichten:

Korollar 4.5.3: Es sei $\zeta \in I_1 \cup I_3$, beliebig, und:

$$\mathcal{F}^0_{L^*}(I_2 \cup I_4) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_{L^*}),$$

die von den Feldern $\hat{\phi}^\zeta_{\rho_2}\hat{\phi}^\zeta_{\rho_4}$, mit $\mathrm{supp}(\rho_k) \in I_k$, und $\alpha_{\rho_k} \in L^*$, $\alpha_{\rho_2} + \alpha_{\rho_4} \in L$ erzeugte von Neumann Algebra. Dann gilt:

$$\pi_L(\mathcal{F}^0_{L^*}(I_2 \cup I_4)) = \mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)'. \tag{4.48}$$

Der Beweis dieser Aussage verläuft vollkommen analog zu Proposition 4.4.5. Weil die Felder $\hat{\phi}_\rho$, $\alpha_\rho \in L^*$, $\mathrm{supp}(\rho) \subset I_2 \cup I_4$ lokal relativ zu den Observablen sind, folgt:

$$\pi_L(\mathcal{F}^0_{L^*}(I_2 \cup I_4)) \subset \mathcal{F}_L(I_1 \cup I_3)'.$$

Die umgekehrte Inklusion gilt, weil man jeden Operator

$$\phi_\rho \pi_L(W(f)), \quad f \in S_{L^*}(I_2 \cup I_4), \ \mathrm{supp}(\rho) \subset I_2, \ \alpha_\rho \in L,$$

schreiben kann als $\eta \pi_L(\hat{\phi}^\zeta_{\rho_2} \hat{\phi}^\zeta_{\rho_4})$ $(\alpha_{\rho_2} + \alpha_{\rho_4} \in L)$. □

Kapitel 5

Modulare Theorie und lokalisierte Connes-Kozykel

Die modulare (Tomita-Takesaki-) Theorie spielt eine herausragende Rolle in der algebraischen Quantenfeldtheorie. Grundlegend für diese Einsicht waren die Arbeiten von Bisognano und Wichmann [BIS/WICH 75]. Dort wurden die modularen Gruppen von Algebren zu raumartigen Keilgebieten mit Lorentz-Boosts entlang dieser Keile (modifiziert um eine Drehung) identifiziert, die modularen Konjugationen als PCT-Operator der Theorie (wiederum um eine Drehung modifiziert). Die modularen Objekte zu solchen Algebren wirken also geometrisch. Die geometrische Information, die man so durch die algebraisch definierten modularen Objekte erhält, wächst, wenn man zu niedrigeren Raum-Zeit-Dimensionen übergeht [BORCHERS 92]. Besonders interessant ist der Fall chiraler Theorien auf S^1. Hier läßt sich mit den Ergebnissen aus [BORCHERS 92] zeigen, daß die gesamte Darstellung der Möbiusgruppe von den modularen Gruppen der lokalen Algebren erzeugt wird. Umgekehrt lassen sich einfache algebraische Bedingungen an ein Paar von von Neumann-Algebren angeben, so daß diese ein konformes chirales Netz auf S^1 erzeugen (siehe [WIESBROCK 93] und [SCHROER 92]).

Ich möchte in diesem Kapitel die modulare Theorie in dem Modell der abelschen Stromalgebren untersuchen. Dazu werde ich als erstes einen elementaren Beweis dafür angeben, daß die modulare Gruppe der Algebra des oberen Halbkreises mit der Untergruppe von $PSU(1,1)$ übereinstimmt, die von den Dilatationen erzeugt wird. Danach werde ich den von Wiesbrock in [WIESBROCK 94] entwickelten Ansatz aufgreifen und die Superauswahlsektoren des Modelles durch Objekte der modularen Theorie, den sogenannten Connes-Kozykeln, charakterisieren. Diese Objekte sind nichts anderes als Ladungsverschieber, also Operatoren, die in einem Gebiet eine Ladung erzeugen, in einem anderen Gebiet wieder vernichten. Solche Objekte spielen in der gesamten Superauswahlanalyse eine zentrale Rolle[1] [DHR 71, HAAG 92].

[1] Im vorigen Kapitel tauchten solche Operatoren ebenfalls auf. Dort waren diese Operatoren für die Verletzung der Dualität verantwortlich.

5.1 Die modularen Gruppen der lokalen Algebren in der Vakuumdarstellung

Es sei $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ ein lokales, chirales und konform invariantes Netz von von Neumann-Algebren auf S^1 mit Vakuumdarstellung $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ und Vakuumvektor $\Omega \in \mathcal{H}_0$. Dann gilt das folgende Theorem [BRU/GUI/LO 93, FRÖ/GAB 92]:

> **Theorem 5.5.1:** (i) Das Netz $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ erfüllt Haag-Dualität in der Vakuumdarstellung, d.h. für $I \subset S^1$ ist:
>
> $$\pi_0(\mathcal{A}(I))' = \pi_0(\mathcal{A}(I^c)). \tag{5.1}$$
>
> (ii) Die modulare Gruppe der Algebra $\pi_0(\mathcal{A}(I))$ bezüglich des Zustandes Ω ist implementiert durch die Darstellung der Einparameteruntergruppe von $PSU(1,1)$, die die Endpunkte des Intervalles I als Fixpunkte hat.

Bemerkungen: (i) Der Beweis des Theorems benutzt wesentlich die Identifikation der modularen Transformation der Algebra $\mathcal{A}(I)$ mit der geometrischen Inversion an den Endpunkten des Intervalles I. Diese Identifikation erhält man mit den Ergebnissen von Borchers [BORCHERS 92], siehe z.B. [FRÖ/GAB 92].

(ii) Die in dem Theorem unter (ii) angegebene Untergruppe ist durch die Bedingung, daß sie die zwei Endpunkte des Intervalles I als Fixpunkte hat, eindeutig bestimmt. Im Falle daß das Intervall I der obere Halbkreis ist, ist die Gruppe genau die Einparametergruppe der Dilatationen (4.22). Man überzeugt sich leicht, daß diese Untergruppen die gesamte Möbiusgruppe erzeugen, wenn I über alle Intervalle von S^1 variiert. Die modularen Gruppen der lokalen Algebren im Vakuumsektor erzeugen also die Darstellung der Raum-Zeit-Transformationen vollständig.

Um diese allgemeingültigen und abstrakten Ergebnisse zu illustrieren, möchte ich ein Ergebnis dieses Theorems in dem vorliegenden konkreten Modell mit elementaren Methoden beweisen: die Tatsache, daß die modulare Gruppe der Algebra zum oberen Halbkreis durch die Dilatationsgruppe gegeben ist (für einen anderen elementaren Beweis siehe auch [YNGVASON 94]). Ich führe zunächst noch einige Bezeichnungen ein. Sei π_0 die Vakuumdarstellung der Stromalgebra $\mathcal{U}$, sowie $\mathcal{A}_0(I) = \pi_0(\mathcal{U}(I))$. Es sei weiter M der obere Halbkreis:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in S^1 | \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Den Vakuumzustand bezeichne ich mit ω_0: $\omega_0(A) = (\Omega, A\Omega)$. Es sei Λ_t die Einparametergruppe der Dilatationen (siehe (4.22)) in $PSU(1,1)$ und $g \mapsto U(g)$ die unitäre Darstellung von $PSU(1,1)$ in $\mathcal{H}_0$. Die zu beweisende Aussage lautet:

> **Proposition 5.1.2:** Die modulare Gruppe σ^t von $(\mathcal{A}_0(M), \omega_0)$ ist: $\sigma^t = \mathrm{Ad}U(\Lambda_{-\pi t})$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß die Einschränkung des Zustandes ω_0 auf die Algebra $\mathcal{A}_0(M)$ ein KMS-Zustand zur Gruppe $\mathrm{Ad}U(\Lambda_{-\pi t})$ mit inverser Temperatur $\beta = 1$ ist. Nach Definition der Algebra $\mathcal{A}_0(M)$ und Ergebnissen der Theorie der von Neumann Algebren [BRA/ROB 79 II], erzeugen die Operatoren $W(f)$, mit $\operatorname{supp} f \subset M$, über endliche Produkte und Linearkombinationen eine stark-$*$ dichte Unteralgebra von $\mathcal{A}_0(M)$. Daher reicht es, die KMS-Bedingung für Elemente der Form $W(f)$ zu zeigen [BRA/ROB 79 II]. Die KMS-Bedingung lautet für solche Operatoren:

> Für alle Testfunktionen f und h mit Träger in M existiert eine Funktion $t \mapsto F(t)$, analytisch in dem Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \mathrm{Im} z < 1\}$ und stetig auf dem Rand von S, so daß gilt:
>
> $$\begin{aligned} F(t) &= (\Omega, \mathrm{Ad}U(\Lambda_{-\pi t})(W(f))W(h)\Omega)\,, \\ F(t+i) &= (\Omega, W(h)\mathrm{Ad}U(\Lambda_{-\pi t})(W(f))\Omega)\,. \end{aligned}$$

Um dies zu zeigen, bemerke ich als erstes, daß die Einparametergruppe $\Lambda_{-\pi t}$, gegeben durch

$$z \mapsto \Lambda_{-\pi t}(z) = \frac{\cosh(-\pi t)z + \sinh(-\pi t)}{\sinh(-\pi t)z + \cosh(-\pi t)} = \frac{\cosh(\pi t)z - \sinh(\pi t)}{-\sinh(\pi t)z + \cosh(\pi t)}$$

folgende Eigenschaften hat:

1. Die Gruppe $\Lambda_{-\pi t}$ läßt den oberen Halbkreis M invariant.
2. Für festes $z \in M$ ist die Abbildung: $t \mapsto \Lambda_{-\frac{\pi}{2}t} z$ eine analytische Abbildung des Streifens S *in* das Innere des Einheitskreises.
3. Es gilt $\Lambda_{-\frac{i}{2}\pi} z = \frac{1}{z}$.

Als zweites zeigt eine Standardrechnung, daß der Zustand ω_0 folgende Faktorisierungseigenschaft hat:

$$\omega_0(W(f)W(h)) = \omega_0(W(f))\,\omega_0(W(h))\,e^{-(f,h)},$$

wobei wie im letzten Kapitel: $(f,h) = \sum_{n \geq 1} n \langle f_n, h_n \rangle_{\mathbb{C}}$, das innere Produkt in LV bezeichnet. Setzt man noch $\tilde{\sigma}^t \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ad}(U(\Lambda_{-\pi t}))$ und für $t \in \mathbb{R}$, $f_t(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(\Lambda_{-t} z)$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \omega_0\left(\tilde{\sigma}^t(W(f))\,W(h)\right) &= \omega_0\left(\tilde{\sigma}^{\frac{t}{2}}(W(f))\,\tilde{\sigma}^{-\frac{t}{2}}(W(h))\right) \\ &= \omega_0\left(\tilde{\sigma}^{\frac{t}{2}}(W(f))\right)\omega_0\left(\tilde{\sigma}^{-\frac{t}{2}}(W(h))\right)e^{-(f_{\frac{\pi}{2}t}, h_{-\frac{\pi}{2}t})} \\ &= \omega_0(W(f))\,\omega_0(W(h))\,e^{-(f_{\frac{\pi}{2}t}, h_{-\frac{\pi}{2}t})}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Hier folgen die erste und die dritte Gleichung aus der Invarianz des Vakuums unter der Gruppe $U(\Lambda_{-\pi t})$, die zweite aus der oben angegebenen Faktorisierungseigenschaft. Sei nun die Funktion G definiert durch:

$$G(t) = \left(f_{\frac{\pi}{2}t}, h_{-\frac{\pi}{2}t}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Dann folgt aus der Definition des inneren Produktes:

$$G(t) = \sum_{n \geq 1} n \langle f_n(t), h_n(-t) \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \text{wo z.B.} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} h_n(-t) &= \int \frac{dz}{2\pi i} h_{-\frac{\pi}{2}t}(z) z^{n-1} \\ &= \int \frac{dz}{2\pi i} h(z) \left(\Lambda_{-\frac{\pi}{2}t} z\right)^{n-1} \frac{d\Lambda_{-\frac{\pi}{2}t} z}{dz}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

und eine analoge Formel für $f_n(t)$ gilt. Aus der zweiten der oben gemachten Bemerkungen und der Tatsache, daß der Träger von h in M liegt, sieht man, daß für $n \geq 1$ die Funktion $t \mapsto h_n(-t)$ eine analytische Fortsetzung in den Streifen S besitzt. D.h. für alle $v \in V_\mathbb{C}$ ist $t \mapsto \langle v, h_n(-t)\rangle$ analytisch in S für $n \geq 1$. Aus der Antilinearität des inneren Produktes: $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, sieht man weiter, daß für $n \geq 1$ und alle $v \in V_\mathbb{C}$ auch die Abbildung $t \mapsto \langle f_n(t), v\rangle$ analytisch in S ist. Ein einfaches Argument zeigt, daß dann auch jeder einzelne Summand in (5.4) eine analytische Funktion im Streifen S ist. Die Gleichung (5.5) liefert folgende Abschätzung für $h_n(-t)$, $t \in S$:

$$\begin{aligned} |h_n(-t)| &\leq \int_{S^1} \frac{dz}{z 2\pi i} |zh(z)| \cdot |\Lambda_{-\frac{\pi}{2}t} z|^{n-1} \cdot |\frac{d\Lambda_{-\frac{\pi}{2}t} z}{dz}| \\ &\leq \sup_{z\in M} |\frac{d\Lambda_{-\frac{\pi}{2}t} z}{dz}| \cdot \left(\sup_{z\in M} |\Lambda_{-\frac{\pi}{2}t} z| \right)^{n-1} \int_M \frac{dz}{z 2\pi i} |zh(z)|. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Hierbei ist wieder $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, für $v \in V_\mathbb{C}$. Außerdem überzeugt man sich, daß die beiden Faktoren vor dem Integral tatsächlich beschränkt sind. Aus der Definition von Λ_t und dieser Abschätzung folgt dann:

1. Es existiert eine (von der Funktion h abhängende) Konstante $C \geq 0$ und eine Funktion $r(t)$: $0 \leq r(t) < 1$, $\forall t \in S$, mit $|h_n(-t)| \leq C \cdot r(t)^{n-1}$. Die Funktion $r(t)$ ist auf kompakten Teilmengen von S gleichmäßig durch eine Konstante $r < 1$ beschränkt.

2. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt: $h_n(-t - i) = h_{-n}(-t) = h_n(-t)^*$.

Analoge Eigenschaften gelten auch für die Funktionen $f_n(t)$, mit $f_n(t+i) = f_{-n}(t)$. Mit 1. kann man das Weierstraß-Theorem über die Konvergenz analytischer Funktionen [AHLFORS 79] anwenden, und man sieht, daß G eine analytische Fortsetzung nach S besitzt. Weiter folgt mit der Eigenschaft 2. und der Relation $\langle v^*, w^*\rangle_\mathbb{C} = \overline{\langle v, w\rangle}$, $v, w \in V_\mathbb{C}$:

$$G(t+i) = \sum_{n\geq 1} n\overline{\langle f_n(t), h_n(-t)\rangle_\mathbb{C}} = \sum_{n\geq 1} n\langle h_n(-t), f_n(t)\rangle_\mathbb{C} = \left(h_{-\frac{\pi}{2}t}, f_{\frac{\pi}{2}t}\right).$$

Beachtet man, daß die Exponentialfunktion analytisch ist, so folgt die gewünschte Analytizität von $F(t)$ im Streifen S. Die KMS-Bedingung folgt, indem man diese Gleichung in (5.2) einsetzt und die Schritte in (5.2) rückwärts verfolgt (mit $t \mapsto -t$):

$$F(t+i) = \omega_0\left(\tilde{\sigma}^{-t}(W(h))\, W(f)\right) = \omega_0\left(W(h)\tilde{\sigma}^t(W(f))\right)$$

□

Bemerkung: Der Beweis läßt sich fast wortwörtlich für andere Intervalle $I \subset S^1$ übernehmen. An die Stelle der Dilatationsuntergruppe von $PSU(1,1)$ tritt dann diejenige Untergruppe, die die Endpunkte von I invariant läßt. Man erhält so das Ergebnis von Theorem 5.1.1 (ii).

5.2 Superauswahlstruktur und lokalisierte Connes-Kozykel

Im Kapitel 4 habe ich gezeigt, daß Operatoren der Form

$$\psi^*_{\rho_2}\psi_{\rho_4}, \text{ mit } \operatorname{supp}(\rho_i) \subset I_i,\ I_2 \cap I_4 = \emptyset \text{ und } \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_2 = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_4, \tag{5.7}$$

eine besondere Rolle bei der Verletzung der Haag-Dualität spielen (siehe Proposition 4.4). Diese Operatoren haben eine offensichtliche Interpretation als Ladungstransporter: Es sei $\alpha = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_2 = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_4$ die Ladung der Operatoren ψ_{ρ_i}. Dann beschreibt der Operator (5.7) die Erzeugung einer Ladung α im Gebiet I_2 und ihre Vernichtung im Gebiet I_4. Dieser Operator transportiert also die Ladung α von dem Gebiet I_2 in das Gebiet I_4. Er ist insbesondere eine Observable, weil die Gesamtladung nicht geändert wird. Diese Observable ist jedoch im allgemeinen *nicht* in dem Gebiet $I_2 \cup I_4$ lokalisiert, weil sie die Gesamtladung im Gebiet $I_1 \cup I_3$ mißt (siehe Relation (4.41)). Aus diesen Diskussionen ist ersichtlich, daß solche Operatoren mit der Superauswahlstruktur des betrachteten Modelles zusammenhängen. Ich will in dem vorliegenden Abschnitt diskutieren, wie man die Superauswahlsektoren einer abelschen Stromalgebra durch solche *observablen* Objekte charakterisieren kann, ohne die Kenntnis der Felder ψ_ρ oder der lokalisierten Endomorphismen [DHR 71] vorauszusetzen. Ich benutze dabei spezielle Operatoren der Form (5.7). Seien dazu u und $\tilde{u}$ die Darstellungen der Möbiusgruppe $PSU(1,1)$ im Einteilchenraum und auf den lokalisierten Eins-Formen (siehe Kapitel 3). Für die Untergruppe der Dilatationen führe ich folgende Notation ein: $d(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(\Lambda_{-\pi t})$ und $\tilde{d}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{u}(\Lambda_{-\pi t})$. Für die modulare Gruppe σ^t von $\mathcal{A}_0(M)$ gilt dann wie oben gezeigt: $\sigma^t(W(f)) = W(d(t)f)$. Es sei $I_2 \equiv I \subset M \subset S^1$ ein Intervall im oberen Halbkreis M, das mit M keinen Endpunkt gemeinsam hat. Es wird sich herausstellen (siehe Gleichung (5.20)), daß die oben angeführten Operatoren für die Wahl $\rho_2 \equiv \rho$, $\operatorname{supp}(\rho) \subset I$ und $I_4 \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{-\pi t}I$, $\rho_4 = \tilde{d}(t)\rho$, die sogenannten Connes-Kozykel der modularen Gruppen von $\mathcal{A}_0(I)$ bezüglich der Zustände ω_0 und $\omega_\rho = \omega_0 \circ \gamma_\rho^{-1}$ sind.

Zunächst jedoch die Definition von Connes-Kozykeln, als Theorem formuliert:

Theorem 5.2.1: (Connes [CONNES 73]) Es sei $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra, ω_1 und ω_2 zwei treue Zustände auf $\mathcal{A}$. Die modularen Gruppen von $\mathcal{A}$ bezüglich dieser Zustände seien $\sigma^t_{\omega_1}$ und $\sigma^t_{\omega_2}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $u_t = [D\omega_2 : D\omega_1]_t$ von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der unitären Operatoren von $\mathcal{A}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(i) $u_{t+s} = u_t\sigma^t_{\omega_1}(u_s)$.
(ii) $\sigma^t_{\omega_2}(A) = u_t\sigma^t_{\omega_1}(A)u_t^*\ \forall A \in \mathcal{A}$.
(iii) Für jedes $A \in \mathcal{A}$ existiert eine in dem Streifen S analytische Funktion F mit:

$$F(t) = \omega_2(u_tA), \quad F(t+i) = \omega_1(Au_t)\,(t \in \mathbb{R}). \tag{5.8}$$

Die Familie u_t, $t \in \mathbb{R}$, heißt Connes-Kozykel (von $(\mathcal{A}, \omega_1, \omega_2)$).

Um den Zusammenhang mit Ladungstransportern zu verdeutlichen, sei γ ein Automorphismus von $\mathcal{A}$, $\omega_1 = \omega$ ein treuer Zustand und $\omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} \omega \circ \gamma^{-1}$, dann gilt:

Lemma 5.2.2: Der Kozykel $[D\omega\circ\gamma^{-1} : D\omega]_t = u_t(\gamma)$ ist vollständig durch die folgenden Bedingungen bestimmt:
(i) $u_{t+s}(\gamma) = u_t(\gamma)\sigma^t_\omega(u_s(\gamma))$.
(ii) Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist:

$$\gamma(\sigma^t_\omega(A)) = u_t(\gamma)\sigma^t_\omega(\gamma(A))u^*_t(\gamma). \tag{5.9}$$

Beweis: Ich zeige als erstes, daß die modulare Gruppe von $(\mathcal{A}, \omega\circ\gamma^{-1})$ durch die Abbildung $\tilde{\sigma}$: $t \mapsto \gamma\circ\sigma^t_\omega\circ\gamma^{-1}$ gegeben ist. Schreibt man: $\sigma^t = \sigma^t_\omega$, dann gilt für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega\circ\gamma^{-1}\left(\tilde{\sigma}^t(A)B\right) = \omega\left(\sigma^t\left(\gamma^{-1}(A)\right)\gamma^{-1}(B)\right). \tag{5.10}$$

Weil γ ein Automorphismus der Algebra ist, sind $\gamma^{-1}(A)$ und $\gamma^{-1}(B)$ wohldefinierte Elemente von $\mathcal{A}$. Man kann also die KMS-Bedingung für die Gruppe σ^t und den Zustand ω anwenden. Diese besagt, daß die Funktion F eine eindeutige analytische Fortsetzung nach S besitzt mit

$$F(t+i) = \omega\left(\gamma^{-1}(B)\sigma^t(\gamma^{-1}(A))\right) = \omega\circ\gamma^{-1}\left(B\tilde{\sigma}^t(A)\right). \tag{5.11}$$

Das ist aber die KMS-Bedingung für die Gruppe $\tilde{\sigma}^t$ bezüglich des Zustandes $\omega\circ\gamma^{-1}$. Somit ist $\tilde{\sigma}^t$ tatsächlich die gewünschte modulare Gruppe, und die Bedingung (ii) des Lemmas stimmt mit der Bedingung (ii) des Kozykel-Theorems überein. Die Analytizitätsbedingung (5.8) folgt dann aus Gleichung (5.11). □

Es sei nun $\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$ die lokale Algebra zum oberen Halbkreis, $I \subset M$ ein Intervall, das mit M keinen Endpunkt gemeinsam hat. Es sei γ ein Automorphismus von $\mathcal{A}(M)$, lokalisiert in dem Intervall I. Betrachtet man γ als Automorphismus in einem geladenen Sektor der Theorie, so sagt Gleichung (5.9), daß dieser Sektor kovariant unter der Dilatationsgruppe ist. Weiterhin folgt aus dieser Gleichung, daß der Automorphismus $\sigma^t_\omega\circ\gamma\circ\sigma^{-t}_\omega$ in $\Lambda_{-\pi t}I$ lokalisiert und äquivalent zu γ ist:

$$\sigma^t_\omega(\gamma(\sigma^{-t}_\omega(A))) = u^*_t(\gamma)\gamma(A)u_t(\gamma).$$

Diese Gleichung zeigt, daß $u_t(\gamma)$ ein Ladungstransporter ist: $u_t(\gamma)$ transportiert die von γ in I erzeugte Ladung in das Gebiet $\Lambda_{\pi t}I$. Weiter zeigt sie, daß wenn A in einem Intervall J lokalisiert ist, welches wiederum keine Endpunkte mit M gemeinsam hat, für hinreichend große t (nämlich so groß, daß $\Lambda_{-\pi t}J \cap I = \emptyset$) gilt:

$$u^*_t(\gamma)\gamma(A)u_t(\gamma) = \sigma^t_\omega(\gamma(\sigma^{-t}_\omega(A))) = A \Rightarrow \gamma(A) = u_t(\gamma)Au_t(\gamma)^*. \tag{5.12}$$

Für hinreichend große t implementiert $u_t(\gamma)$ den Automorphismus. Dies zeigt, daß viele Eigenschaften des Automorphismus γ mit Hilfe des Kozykels $u_t(\gamma)$ studiert werden können [GUI/LON 92]. Der Ansatz von [WIESBROCK 93] ist es, den umgekehrten Weg einzuschlagen: Welche Bedingungen muß man an einen Connes-Kozykel (einer lokalen Algebra) stellen, damit dieser einen Sektor der universellen Algebra beschreibt? Ich gebe diese Bedingungen in der folgenden Definition an [WIESBROCK 93]:

Definition 5.2.3: Es sei $I \mapsto \mathcal{A}(I)$ ein chirales Netz von von Neumann-Algebren in der Vakuumdarstellung. Ich bezeichne mit M den oberen Halbkreis und mit $I \subset M$ ein Intervall, das mit M keinen Endpunkt gemeinsam hat. Es sei σ^t die modulare Gruppe von $(\mathcal{A}(M), \omega)$. Eine Einparameterfamilie unitärer Operatoren $u_t \subset \mathcal{A}(M)$, $t \in \mathbb{R}$, heißt *lokalisierter Kozykel*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) u_t ist ein Connes-Kozykel bezüglich σ^t, d.h. für alle $t, s \in \mathbb{R}$, ist: $u_{t+s} = u_t\sigma^t(u_s)$.

(ii) u_t ist lokalisiert in dem Sinne, daß es ein Intervall $I \subset M$ gibt, das mit M keinen Endpunkt gemeinsam hat, so daß $u_t \in \mathcal{A}(I)$ ist, wenn nur $|t|$ hinreichend klein ist.

(iii) Die adjungierte Wirkung von u_t auf $\mathcal{A}(I)$ ist dieselbe wie die adjungierte Wirkung von u^*_{-t}, wenn nur t hinreichend groß ist. Das heißt für große t ist $u_t u^*_{-t} \in \mathcal{A}(I)'$.

Es sei jetzt $\mathcal{U}$ die Stromalgebra mit Vakuumzustand $\omega_0(\cdot) = (\Omega, \cdot\Omega)$ und $\mathcal{A}_0(M) = \pi_0(\mathcal{U}(M))$, die Algebra des oberen Halbkreises in der Vakuumdarstellung. Ich will zunächst zeigen, wie man den zu einem lokalisierten Automorphismus auf $\mathcal{A}_0(M)$ gehörenden Connes-Kozykel ausrechnet [SCHROER 92, WIESBROCK 94].

Proposition 5.2.4: Es sei ρ eine in I lokalisierte Eins-Form auf S^1 und $\delta_t\rho \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{d}(t)\rho - \rho$. Es gilt $\int \frac{dz}{2\pi i}\delta_t\rho(z) = 0$ und $\text{supp}(\delta_t\rho) \subset M$, $\forall t$. Es sei $\widehat{\delta_t\rho}$ die eindeutig bestimmte Funktion in LV mit $\text{supp}(\widehat{\delta_t\rho}) \subset M$ und $\frac{d}{dz}\widehat{\delta_t\rho}(z) = i\delta_t\rho(z)$. Der Connes-Kozykel bezüglich der Zustände ω_0 und $\omega_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \circ \gamma_\rho^{-1}$ auf $\mathcal{A}_0(M)$ ist gegeben durch:

$$u_t(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} [D\omega_\rho : D\omega_0]_t = e^{\frac{i}{2}\rho[\widehat{\delta\rho}]}W(\widehat{\delta_t\rho}). \tag{5.13}$$

Beweis: Ich zeige, daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für $f \in LV$ mit Träger in M gilt:

$$\gamma_\rho\left(\sigma^t(W(f))\right) = u_t(\rho)\sigma^t\left(\gamma_\rho(W(f))\right)u_t(\rho)^*.$$

(ii) $u_t(\rho)$ erfüllt die Kozykel-Relation:

$$u_{t+s}(\rho) = u_t(\rho)\sigma^t(u_s(\rho)).$$

Mit den oben gemachten Bemerkungen folgt dann die Aussage. Um (i) zu zeigen, rechnet man nach:

$$\begin{aligned}
\text{Ad}u_t(\rho)\left(\sigma^t(\gamma_\rho(W(f))\right) &= \text{Ad}W(\widehat{\delta_t\rho})\left(e^{i\rho[f]}W(d(t)f)\right) \\
&= e^{i\rho[f]}e^{-A(\widehat{\delta_t\rho},d(t)f)}W(d(t)f) \\
&= e^{i\rho[d(t)f]}W(d(t)f) \\
&= \gamma_\rho\left(\sigma^t(W(f))\right),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. Hierbei habe ich benutzt, daß:

$$\begin{aligned} A(\widehat{\delta_t\rho}, d(t)f) &= \int \frac{dz}{2\pi i} i \langle (\delta_t\rho), d(t)f\rangle \\ &= -i\rho[d(t)f] + \int \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{d\Lambda_{-\pi t}z}{dz}\right) i\langle \rho(\Lambda_{-\pi t}z), f(\Lambda_{-\pi t}z)\rangle \\ &= i\left(\rho[f] - \rho[d(t)f]\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Um (ii) zu zeigen, bemerkt man als erstes, daß die Abbildung $t \mapsto \widehat{\delta_t\rho}$ ein $d(t)$-Kozykel ist, d.h.

$$\widehat{\delta_{t+s}\rho} = d(t)\widehat{\delta_s\rho} + \widehat{\delta_t\rho}.$$

Diese Gleichung gilt, weil für festes t und s beide Seiten dieselbe Ableitung nach z besitzen. Sie haben außerdem beide Träger in M (nach Definition), und sie stimmen bei $t = 0$ für alle s überein. Daraus folgt die Gleichheit. Es sei nun

$$\alpha_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{\rho}{2}[\widehat{\delta_t\rho}]}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_{t+s}(\rho) &= \alpha_{t+s} W(\widehat{\delta_{t+s}\rho}) \\ &= \alpha_{t+s} e^{-\frac{1}{2}A(d(t)\widehat{\delta_s\rho}, \widehat{\delta_t\rho})} W(\widehat{\delta_t\rho}) W(d(t)\widehat{\delta_s\rho}) \\ &= \alpha_{t+s} e^{-\frac{1}{2}A(d(t)\widehat{\delta_s\rho}, \widehat{\delta_t\rho})} W(\widehat{\delta_t\rho}) \sigma^t\left(W(\widehat{\delta_s\rho})\right) \\ &= \alpha_{t+s}\alpha_t^*\alpha_s^* e^{-\frac{1}{2}A(d(t)\widehat{\delta_s\rho}, \widehat{\delta_t\rho})} u_t(\rho)\sigma^t(u_s(\rho)). \end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus (5.14):

$$-\frac{1}{2}A(d(t)\widehat{\delta_s\rho}, \widehat{\delta_t\rho}) = -\frac{i}{2}\rho[d(t)\widehat{\delta_s\rho}] + \frac{i}{2}\rho[\widehat{\delta_s\rho}],$$

und man erhält die Behauptung mit:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\left(\rho[\widehat{\delta_{t+s}\rho}] - \rho[\widehat{\delta_t\rho}] - \rho[\widehat{\delta_s\rho}]\right) &= \frac{i}{2}\rho[d(t)\widehat{\delta_s\rho}] - \frac{i}{2}\rho[\widehat{\delta_s\rho}] \\ \Rightarrow \alpha_{t+s}\alpha_t^*\alpha_s^* e^{-\frac{1}{2}A(d(t)\widehat{\delta_s\rho}, \widehat{\delta_t\rho})} &= 1. \end{aligned}$$

□

Dies zeigt, daß man den zu einem lokalisierten Automorphismus gehörenden Connes-Kozykel mit elementaren Methoden berechnen kann. Ich will nun umgekehrt alle lokalisierten Kozykel bestimmen, die die spezielle Form $u_t = \alpha_t W(f_t)$ haben, wobei f_t Elemente in LV sind und die α_t komplexe Phasen vom Betrag Eins. Es ist nun nicht mehr überraschend, daß der allgemeine lokalisierte Kozykel genau die Form (5.13) hat.

Proposition 5.2.4: Der allgemeinste lokalisierte Kozykel der Form $u_t = \alpha_t W(f_t)$ ist durch Gleichung (5.13) gegeben, wobei ρ eine beliebige, in $I \subset M$ lokalisierte Eins-Form ist.

Beweis: Um die Proposition zu beweisen, habe ich die Funktionen f_t und die Phasen α_t $(t \in \mathbb{R})$ zu berechnen. Da Trägereigenschaften der Funktionen f_t nur bis auf Konstanten eindeutig sind (ich arbeite in der Vakuumdarstellung), werde ich zunächst die Funktionen $g_t(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dz} f_t(z)$ bestimmen. Die Kozykel-Bedingung an u_t zeigt, daß für $t \in \mathbb{R}$ die Funktion g_t Träger in M hat und die Bedingung

$$g_{t+s} = g_t + \tilde{d}(t) g_s \quad t, s \in \mathbb{R} \tag{5.15}$$

erfüllt. Die zweite Relation in der Definition lokalisierter Kozykel besagt, daß für kleine $|t|$ g_t sogar Träger in I hat. Es sei nun s so klein, daß g_s Träger in I hat, t so groß, daß $\Lambda_{-\pi t} I \cap I = \emptyset$ ist. (Solche t existieren, weil I nach der Voraussetzung an lokalisierte Kozykel keinen Endpunkt mit M gemeinsam hat.) Dann hat die Funktion $\tilde{d}(t) g_s$ Träger in $\Lambda_{-\pi t} I$, und Gleichung (5.15) besagt, daß sich die Funkionen g_{t+s} und g_t nur um eine Funktion unterscheiden, die in I identisch verschwindet. Bezeichnet man mit χ_I die charakteristische Funktion des Intervalles I, so sieht man aus diesen Argumenten, daß $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} \chi_I g_t$ existiert, und man überzeugt sich, daß ρ eine glatte Funktion ist. Multipliziert man Gleichung (5.15) mit χ_I, so erhält man:

$$\chi_I g_{t+s} = \chi_I g_t + \chi_I \tilde{d}(t) g_s = \chi_I g_t + \tilde{d}(t) \chi_{\Lambda_{\pi t} I} g_s. \tag{5.16}$$

In der Definition von ρ kann im übrigen das Intervall I durch eine hinreichend kleine Umgebung desselben ersetzt werden. Ist $\tilde{I}$ eine solche Umgebung und t so klein, daß I auch in $\Lambda_t \tilde{I}$ enthalten ist (das ist wegen der Stetigkeit der Wirkung von $PSU(1,1)$ auf S^1 möglich), so folgt aus Gleichung (5.16) für hinreichend große s:

$$\rho = g_t + \tilde{d}(t)\rho \quad \text{bzw.} \quad g_t = \rho - \tilde{d}(t)\rho \quad \text{für kleine } t. \tag{5.17}$$

Man sieht also, daß die Funktionen g_t in einer kleinen Umgebung von $t = 0$ durch die (in I) lokalisierte Eins-Form bestimmt sind. Die Kozykelbedingung (5.15) bestimmt die Funktionen g_t dann aber für alle $t \in \mathbb{R}$ eindeutig. Wie oben bereits bemerkt, gilt für alle t: $\int \frac{dz}{2\pi i} g_t = 0$, so daß eindeutig bestimmte Funktionen $\widehat{\delta_t \rho}$ existieren mit $\frac{d}{dz} \widehat{\delta_t \rho}(z) = i \delta_t \rho(z)$. Die Phasen α_t ergeben sich wie in der vorhergehenden Proposition eindeutig aus der Kozykelrelation, was die Behauptung beweist. □

Die Propositionen zeigen, daß die Einschränkung eines lokalisierten und kovarianten Automorphismus auf die Algebra des oberen Halbkreises vollständig durch einen lokalisierten Connes-Kozykel u_t bestimmt ist. Es bleibt zu diskutieren, inwiefern die Einschränkung eines solchen Automorphismus auf die Algebra $\mathcal{A}_0(M)$ in kanonischer Weise einen *Sektor* des Netzes (bzw. der universellen Algebra) bestimmt, und wie man diesen wiederum durch den Kozykel in $\mathcal{A}_0(M)$ charakterisieren kann. Eine unter sehr allgemeinen technischen Voraussetzungen an das Netz gültige Antwort auf die zweite Frage konnte in [WIESBROCK 93] gegeben werden. Die Quintessenz, angewandt auf unser Modell, ist, daß u_t auf jeder lokalen Algebra $\mathcal{A}_0(I)$ mit $I \subset M$ einen Automorphismus definiert, durch $\gamma_\rho(W(f)) = \lim_{t \to \infty} u_t(\rho) W(f) u_t(\rho)^*$. Man zeigt noch, daß die so definierten Automorphismen *lokal* kovariant unter den modularen Gruppen von $(\mathcal{A}_0(I), \omega)$ $(I \subset M)$ sind. Damit—die modularen Gruppen dieser Algebren erzeugen die Vakuumdarstellung von $PSU(1,1)$—kann man einen kovarianten Automorphismus des gesamten Netzes durch kovariante Fortsetzung der Einschränkung des Automorphismus auf eine (beliebige) lokale Unteralgebra $\mathcal{A}_0(I)$ ($I \subset M$) definieren. Die technischen Details dieser Vorgehensweise sind in [WIESBROCK 93] zu finden. Ich werde sie deshalb hier nicht für unser Modell demonstrieren. Stattdessen möchte ich hier nur skizzieren, wie die Kozykel der lokalisierten Automorphismen γ_ρ zu einer *projektiven* Darstellung $\tilde{U}$, der Möbiusgruppe $PSU(1,1)$ in $\mathcal{H}_0$ führen [STASZKIEWICZ 94]. Dazu bemerkt man als erstes, daß die modularen Gruppen der lokalen Algebren die Darstellung U der Möbiusgruppe im Vakuumhilbertraum erzeugen (Theorem 5.1.1 (ii) und die nachfolgende Bemerkung (ii)). Berechnet man, vollkommen analog zur Vorgehensweise beim Beweis von Proposition 5.2.3 den Connes-Kozykel zu einer Algebra $\mathcal{A}_0(I)$, $I \Subset S^1$, so sieht man daß dieser bis auf eine unwesentliche Phase durch Weyl-Operatoren $W(\widehat{\delta_{g_I(t)}})$ gegeben ist. Hierbei ist $t \mapsto g_I(t)$ die Einparameteruntergruppe von $PSU(1,1)$, die die Endpunkte von I festläßt (eindeutig) und $\widehat{\delta_{g_I(t)}}$ ist eine Stammfunktion von $i[\tilde{u}(g_I(t))(\rho) - \rho]$. Mit der eben gemachten Bemerkung sieht man leicht ein, daß die Operatoren:

$$V(g(t)) = \pi_0(\widehat{W(\delta_{g(t)})})\Delta_I^{it}, \quad I \Subset S^1$$

(Δ_I ist der modulare Operator des Paares $(\mathcal{A}_0(I), \Omega)$) tatsächlich eine projektive Darstellung $g \mapsto V(g)$ erzeugen und der Automorphismus γ_ρ kovariant ist:

$$\gamma_\rho(U(g)AU^*(g)) = V(g)\gamma_\rho(A)V^*(g), \quad A \in \mathcal{A}_0(I),\ I \Subset S^1.$$

5.3 Lokalisierte Kozykel und lokale Erweiterungen

Ich will in diesem Abschnitt zeigen, wie man die Superauswahlstruktur lokaler Erweiterungen der Stromalgebra $\mathcal{U}$ mit Hilfe lokalisierter Kozykel diskutieren kann. Zunächst werde ich eine für das weitere wichtige Formel beweisen:

Lemma 5.3.1: Es seien ρ_1 und ρ_2 in M lokalisierte Eins-Formen. $\mathcal{T}$ sei die schiefsymmetrische Form (3.8) (mit dem Schnitt des Logarithmus in der unteren Halbebene, $\zeta \in M^c$). Dann gilt:

$$-i\rho_1[\widehat{\delta_t\rho_2}] = \mathcal{T}(\rho_1, \tilde{d}(t)\rho_2) - \mathcal{T}(\rho_1, \rho_2). \tag{5.18}$$

Beweis: Aus der Bilinearität von $\mathcal{T}$ und der Definition von $\delta_t\rho$ folgt für die rechte Seite von (5.18):

$$\mathcal{T}(\rho_1, \tilde{d}(t)\rho_2) - \mathcal{T}(\rho_1, \rho_2) = \mathcal{T}(\rho_1, \delta_t\rho_2).$$

Mit der Definition von $\mathcal{T}$, Gleichung (3.8) und der Definition (3.7) folgt, wenn man den Schnitt der Logarithmusfunktion in der unteren Halbebene nimmt ($\zeta \in M^c$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\rho_1, \tilde{d}(t)\rho_2) - \mathcal{T}(\rho_1, \rho_2) &= \mathcal{T}(\rho_1, \delta_t\rho_2) \\
&= -A(\overline{\rho_1}, \widehat{\delta_t\rho_2}) - \int \frac{dz}{2\pi i}\langle \alpha_1, \delta_t\rho_2\rangle \ln_\zeta(z) \\
&= -\int \frac{dz}{2\pi i} i\langle \rho_1, \widehat{\delta_t\rho_2}\rangle + \int \frac{dz}{2\pi i} i\frac{1}{z}\langle \alpha_1, \widehat{\delta_t\rho_2}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \int \frac{dz}{2\pi i} \langle \alpha_1, \delta_t \rho_2 \rangle \ln_\zeta(z) \\ &= -i\rho_1[\widehat{\delta_t \rho_2}]. \end{aligned}$$

Hierbei habe ich in der letzten Gleichung eine partielle Integration durchgeführt, was gerechtfertigt ist, weil ζ im unteren Halbkreis liegt, der Träger von $\widehat{\delta_t \rho_2}$ jedoch im oberen Halbkreis. □

Ich möchte eine erste Konsequenz aus dieser Formel ableiten.

Proposition 5.3.2: Es sei ρ eine in $I \subset M$ lokalisierte Eins-Form mit $\int \frac{dz}{2\pi i} \rho = \alpha$. Es sei $u_t(\rho)$ ein lokalisierter Kozykel wie in Gleichung (5.13). Dann gilt:

$$\epsilon_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} \left(u_t(\rho) u_{-t}(\rho) u_t(\rho)^* u_{-t}(\rho)^* \right) = e^{-i\pi\langle \alpha, \alpha \rangle}. \tag{5.19}$$

Beweis: Mit Hilfe der Formel (5.13) und den Weylrelationen rechnet man folgende Gleichung nach.

$$u_t(\rho) u_{-t}(\rho) u_t(\rho)^* u_{-t}(\rho)^* = e^{i(\delta_{-t}\rho)[\widehat{\delta_t \rho}]}.$$

Benutzt man wieder die Definition von $\delta_t \rho$, so sieht man, weil $\tilde{d}(-t)\rho$ Träger in $\Lambda_{\pi t} I$ hat und für große t $\Lambda_{\pi t} I \cap \operatorname{supp}(\widehat{\delta_t \rho}) = \emptyset$ ist, daß die Phase auf der rechten Seite gleich $e^{-i\rho[\widehat{\delta_t \rho}]}$ ist. Nun ist $\tilde{d}(t)\rho$ in $\Lambda_{-\pi t}(I)$ lokalisiert, und das ist, wiederum für genügend große t, disjunkt zu I. Mit der Formel (3.9) und dem Lemma (Gleichung (5.18)) hat man also für große t: $-i\rho[\widehat{\delta_t \rho}] = \mathcal{T}(\rho, \tilde{d}(t)\rho) = -i\pi\langle \alpha, \alpha \rangle$, und die Behauptung folgt.□

Die Interpretation der Formel in dieser Proposition ist, daß ϵ_ρ der Statistik-Operator des lokalisierten Automorphismus γ_ρ ist. Für große t hat man nämlich nach den obigen Diskussionen:

$$u_t(\rho) u_{-t}(\rho) u_t(\rho)^* u_{-t}(\rho)^* = \gamma_\rho(u_{-t}(\rho)) u_{-t}(\rho)^*.$$

$u_{-t}(\rho)$ ist aber, wie oben bemerkt, ein Ladungstransporter, der die Ladung von γ_ρ aus dem Intervall I in das Intervall $\Lambda_{-\pi t} I$ transportiert. Nach allgemeinen Resultaten der Theorie der Superauswahlsektoren ist dann ϵ_ρ tatsächlich der Statistikoperator [DHR 71] (siehe auch [WIESBROCK 93]). Man bemerkt auch, daß diese Proposition konsistent mit den Vertauschungsrelationen der geladenen Feldoperatoren (3.11) ist.

Bevor ich die Superauswahlstruktur lokaler Erweiterungen der Stromalgebra $\mathcal{U}$ mit Hilfe lokalisierter Kozykel diskutiere, möchte ich noch zeigen, wie man die modularen Gruppen lokaler Erweiterungen berechnen kann. Sei dazu ρ wieder eine lokalisierte Eins-Form, und die Feldoperatoren ψ_ρ^ζ und ϕ_ρ seien wie im zweiten Kapitel definiert (siehe Formel (3.10), (3.17)). Man überzeugt sich dann mit Hilfe der dort angegebenen Gleichungen und Gleichung (5.13), daß z.B. gilt:

$$\phi_{\tilde{d}(t)\rho} = \phi_\rho u_t(\rho). \tag{5.20}$$

Damit beweist man die folgende Proposition.

Proposition 5.3.3: Es sei L ein integrales, gerades Gitter in V. Es sei $I \mapsto \mathcal{F}_L(I)$ eine lokale Erweiterung der Stromalgebra $\mathcal{U}$, wie im dritten Kapitel diskutiert. ω_0 sei der Vakuumzustand, $\omega_0(\cdot) = (\Omega, \cdot\, \Omega)$, $\Omega \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_L$. Dann ist die Wirkung der der modulare Gruppe von $(\mathcal{A}_L(M), \omega_0)$ auf den Erzeugenden von $\mathcal{F}_L(M)$ gegeben durch:

$$\sigma^t(\phi_\rho) = \phi_{\tilde{d}(t)\rho} = \phi_\rho u_t(\rho). \tag{5.21}$$

Beweis: Um die Behauptung zu beweisen, seien ρ und $\tilde{\rho}$ zwei in M lokalisierte Eins-Formen. Es ist zu zeigen, daß die Funktion F:

$$F(t) = \omega_0(\phi_\rho u_t(\rho)\phi^*_{\tilde{\rho}}), \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.22}$$

die KMS-Bedingung erfüllt. Wegen $\omega_0(\phi_\rho) = 0$, falls $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho \neq 0$, ist es keine Einschränkung, wenn die Ladungen der Felder ϕ_{ρ_1} und ϕ_{ρ_2} gleich sind: $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho_1 = \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_2 \in L$. Es ergibt sich

$$F(t) = \omega_0\left(\phi_{\rho_1} u_t(\rho)\phi^*_{\rho_2}\right) = \omega_0\left(\phi_{\rho_1}\left(u_t(\rho_1)\phi^*_{\rho_2}\phi_{\rho_1}\right)\phi^*_{\rho_1}\right).$$

Nun ist $u_t(\rho_1)\phi^*_{\rho_2}\phi_{\rho_1}$ wegen der Gleichheit der Ladungen ein Element in $\pi_L(\mathcal{U})$ und lokalisiert in M. Es folgt, mit $\mathrm{Ad}(\phi_{\rho_1}) = \gamma_\rho^{-1}$,

$$F(t) = \omega_0 \circ \gamma^{-1}_{\rho_1}\left(u_t(\rho_1)\phi^*_{\rho_2}\phi_{\rho_1}\right).$$

Dann sagt aber das Theorem von Connes über unitäre Kozykel, daß die Funktion F eine analytische Fortsetzung in den Streifen S besitzt mit:

$$F(t+i) = \omega_0\left(\phi^*_{\rho_2}\phi_{\rho_1}u_t(\rho_1)\right) = \omega_0\left(\phi^*_{\rho_2}\phi_{\rho_1}u_t(\rho_1)\right).$$

Das ist aber gerade die KMS-Bedingung für den Zustand ω_0 auf $\mathcal{F}_L(M)$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Dieses Resultat ist natürlich bekannt [WASSERMANN 89][FRÖ/GAB 92].

Ich möchte nun diskutieren, wie man die Superauswahlstruktur einer lokalen Erweiterung der Stromalgebra an den lokalisierten Kozykeln wiedererkennt. Dazu bestimme ich den allgemeinsten, in $I \subset M$ lokalisierten Kozykel der lokalen Erweiterung $\mathcal{F}_L(M)$ von $\mathcal{U}(M)$.

Proposition 5.3.4: Es sei $u_t(\rho)$ wie in (5.13) ein in $I \subset M$ lokalisierter Kozykel von $\pi_0(\mathcal{U}(M))$. Dann ist $\pi_L(u_t(\rho))$ ein in $I \subset M$ lokalisierter Kozykel von $\mathcal{F}_L(M)$ genau dann, wenn $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho \in L^*$ ist. Zwei solche Kozykel mit Eins-Formen ρ_1 und ρ_2 sind äquivalent, wenn $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho_1 - \int \frac{dz}{2\pi i}\rho_2 \in L$ ist.

Beweis: Ich unterdrücke im folgenden die Darstellung π_L und schreibe $u_t(\rho)$ statt $\pi_L(u_t(\rho))$. Ich habe zunächst zu zeigen, daß $u_t(\rho)$ die Bedingungen (Definition 5.2.3 (i)-(iii)) an einen lokalisierten Kozykel genau dann erfüllt, wenn $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho \in L^*$ ist. Als erstes bemerkt man, daß die Bedingungen (i) und (ii) trivialerweise erfüllt sind: Die Kozykel-Bedingung (i) folgt aus der vorangehenden Diskussion der modularen Gruppen von $\mathcal{F}_L(M)$; die Lokalisierungsbedingung fordert, daß der Träger von ρ in $I \subset M$ liegt. Die Bedingung (iii) stellt nun eine weitere, nichttriviale Bedingung an ρ. Sei ρ so, daß für große t $u_t(\rho)u_{-t}(\rho)^* \in \mathcal{F}_L(I)'$ ist. Insbesondere muß für eine in I lokalisierte Eins-Form $\tilde{\rho}$ mit $\int \frac{dz}{2\pi i}\tilde{\rho} \in L$ gelten:

$$u_t(\rho)u_{-t}(\rho)^*\phi_{\tilde{\rho}} = \phi_{\tilde{\rho}}u_t(\rho)u_{-t}(\rho)^*.$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} u_t(\rho)^*u_{-t}(\rho)\phi_{\tilde{\rho}} &= \phi_{\tilde{\rho}}^*\phi_{\tilde{\rho}}u_t(\rho)^*u_{-t}(\rho)\phi_{\tilde{\rho}} \\ &= \phi_{\tilde{\rho}}\gamma_{\tilde{\rho}}(u_t(\rho)^*u_{-t}(\rho)) \\ &= e^{-i\tilde{\rho}[\widehat{\delta_t\rho}]+i\tilde{\rho}[\widehat{\delta_{-t}\rho}]}\phi_{\tilde{\rho}}u_t(\rho)^*u_{-t}(\rho). \end{aligned}$$

Den Phasenfaktor in der letzten Zeile kann man nun wieder mit den Gleichungen (5.18) und (3.9) berechnen. Es ist:

$$-i\tilde{\rho}[\widehat{\delta_t\rho}] + i\tilde{\rho}[\widehat{\delta_{-t}\rho}] = \mathcal{T}(\tilde{\rho}, \tilde{d}(t)\rho) - \mathcal{T}(\tilde{d}(-t)\tilde{\rho}, \rho). \tag{5.23}$$

Für große t sind die Träger der in den Termen auf der rechten Seite auftauchenden lokalisierten Eins-Formen disjunkt. Mit der Formel $\mathrm{supp}(\tilde{d}(t)\rho) = \Lambda_{-\pi t}\mathrm{supp}(\rho)$ sieht man, daß man von $\mathrm{supp}(\rho_1)$ startend in der mathematisch positiven Richtung nach $\mathrm{supp}(\tilde{d}(t)\rho_2)$ gelangt, *ohne* den Punkt $\zeta \in M^c$ zu durchlaufen. Lemma 3.1.2 in Kapitel 3 zeigt, daß der erste Term der rechten Seite einen Beitrag $-i\pi\langle\alpha, \tilde{\alpha}\rangle$ liefert. Analog sieht man, daß der zweite Term denselben Beitrag liefert, weil die Lokalisierungsgebiete vertauscht sind. Es folgt also, daß der gesuchte Phasenfaktor gleich $e^{-2\pi i\langle\alpha,\tilde{\alpha}\rangle}$ ist. Wenn dieser Phasenfaktor aber für alle $\alpha \in L$ wie verlangt eins sein soll, dann muß $\tilde{\alpha}$ in dem dualen Gitter L^* liegen. Damit ist die erste Aussage der Proposition gezeigt. Um zu zeigen, daß lokalisierte Kozykel, deren Ladungen in derselben Äquivalenzklasse in L^*/L liegen, äquivalent (als Kozykel) sind, reicht es zu zeigen, daß für $\int \frac{dz}{2\pi i}\rho \in L$, $u_t(\rho)$ gilt: $u_t(\rho) = u^*\sigma^t(u)$, für ein $u \in \mathcal{A}_L(M)$. Dies folgt aber aus (5.21).□

Kapitel 6

Casimir-Felder in der algebraischen QFT

Im dritten Kapitel wurde gezeigt, wie man lokale Erweiterungen durch integrale, gerade Gitter charakterisieren kann. Es stellte sich heraus, daß in der Vakuumdarstellung dieser Erweiterung, die zu L duale Gruppe V/L^* in einer kanonischen Weise operiert. Das Zentrum der universellen Algebra $\mathcal{F}_L$ ist isomorph zur Gruppenalgebra der endlichen, abelschen Gruppe L^*/L und wirkt in dieser Darstellung trivial. Man erhält also auch in kanonischer Weise eine Darstellung der kompakten Gruppe $T = V/L$. Diese Wirkung ist lokal, d.h. sie läßt die lokalen Algebren[1] $\mathcal{F}_L(I)''$ invariant. Die lokalen, unter dieser Wirkung invarianten Unteralgebren, $\mathcal{F}_L^T(I) \subset \mathcal{F}_L(I)''$ sind gegeben durch $\pi_L(\mathcal{U}(I))''$, wobei π_L die Einschränkung der Vakuumdarstellung auf die Stromalgebra ist.

Unter diesen Erweiterungen gibt es solche, in denen eine projektive Darstellung einer Loopgruppe operiert. Genauer gesagt sind dies diejenigen Erweiterungen, in denen das Gitter L, Wurzelgitter (bzw. Kowurzelgitter) der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe vom Typ A, D oder E ist. Die lokalen Algebren $\mathcal{F}_L(I)$ konnten mit den von Neumann-Algebren identifiziert werden, die von Loops in G erzeugt werden, welche außerhalb des Intervalles I gleich der Identität sind. In diesem Fall ist T ein maximaler Torus von G, der durch die Darstellung der konstanten Loops wirkt. Tatsächlich operiert dann die gesamte kompakte Lie-Gruppe G in der Vakuumdarstellung, und auch diese Wirkung ist lokal. Aus der Inklusion $T \subset G$ und der Gleichheit $\mathcal{F}_L^T(I) = \pi_L(\mathcal{U}(I))''$ erhält man für die Algebren der unter G invarianten Operatoren:

$$\mathcal{F}_L^G(I) \subset \pi_L(\mathcal{U}(I))''. \tag{6.1}$$

Ziel wird es sein, diese Algebren der G-invarianten lokalen Operatoren genauer zu beschreiben. Ich werde zeigen, daß diese Algebren von Casimir-Feldern, wie sie in [Bai/Bou/Sch/Sur 88] eingeführt wurden, erzeugt werden. Betrachtet man das Netz $\mathcal{F}_L$ als "Feldalgebra" über der "Observablenalgebra" $\mathcal{F}_L^G$, so zeigt dieses Resultat, daß die Observablenalgebra von *lokalen* Feldern erzeugt wird. Somit können in diesen Modellen Fragen beantwortet werden, wie sie bereits in den sechziger Jahren diskutiert wurden [Lan/Schr 67]. Die Methoden, die hier benutzt werden, sind jedoch vollkommen verschieden. Sie sind die gleichen, die auch von Rehren [Rehren 94]

[1] Ich identifiziere die lokalen Algebren $\mathcal{F}_L(I)$ mit ihrer Vakuumdarstellung.

benutzt wurden, um zu zeigen, daß die Invarianten der von $SU(2)$-Strömen erzeugten Feldalgebra unter der Wirkung von $SU(2)$ als Eichgruppe (1. Art), vom Sugawara-Energie-Impuls-Tensor erzeugt werden. Tatsächlich kann man die hier erzielten Ergebnisse als natürliche Verallgemeinerung dieser Arbeit ansehen.

Dieses Kapitel ist wie folgt gegliedert. Ich beginne mit einigen notwendigen Präliminarien aus der Theorie einfacher, kompakter Lie-Algebren. Danach werde ich in einem Exkurs das normalgeordnete Produkt lokaler Felder einführen. Die Casimir-Felder werden als normalgeordnete Polynome in den Stromfeldern definiert. Ich zitiere dann ein Theorem von Thierry-Mieg [THIERRY-MIEG 88], welches die Casimir-Felder als normalgeordnete Polynome der Stromfelder im Fock-Raum ausdrückt. Man kann dieses Theorem als eine "Koordinatisierung" der Inklusion (6.1) ansehen. Mit diesem Ergebnis folgt dann, daß die Casimir-Felder tatsächlich lokale Algebren erzeugen und ich werde andeuten, wie man dieses Resultat erhalten kann. Mit Hilfe eines Theorems von Takesaki, der Reeh-Schlieder-Eigenschaft für dieses lokale Netz auf S^1 und einem elementaren kombinatorischen Lemma, das in Analogie zu [SEGAL 81, Prop. (6.3)] bewiesen wird, zeige ich im darauffolgenden Abschnitt, daß dieses Netz wirklich das gesamte invariante Unternetz von $\mathcal{F}_L$ ist. Mit einigen Folgerungen und Anmerkungen werde ich das Kapitel beschließen.

Präliminarien aus der Theorie der Lie Algebren. (Für die Details verweise ich auf die Lehrbücher [HUMPHREYS 72] und [CARTER 72]). Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Ich wähle ein für allemal eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ (Cartan-Unteralgebra). Der Dualraum (Raum aller Linearformen) von $\mathfrak{h}$ sei $\mathfrak{h}^*$. Die Wurzeln $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ sind die Gewichte der adjungierten Darstellung von G. Es sei $n \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathfrak{h}) = \mathrm{rk}\mathfrak{g}$, der Rang von $\mathfrak{g}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ einfache Wurzeln von $\mathfrak{g}$. Das innere Produkt auf $\mathfrak{h}$ bezeichne ich, abweichend von der Standard-Nomenklatur, aber konsistent mit der Notation in Kapitel 3, durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ich mache für das weitere die Annahme, daß alle Wurzeln gleiche Länge haben, $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2$, so daß G vom Typ A-D-E ist. Eine Wurzel heißt positiv: $\alpha \succ 0$, wenn $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$, wobei die k_i nichtnegative ganze Zahlen sind und mindestens ein $k_j \neq 0$ ist. Ist α eine positive Wurzel, so definiere ich $\mathrm{ht}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum k_i$.

In Anlehnung an Kapitel 3 bezeichne ich das Wurzelgitter mit L, das duale Gitter, welches von den fundamentalen Gewichten erzeugt wird mit L^*. Der Weyl-Vektor ist definiert als $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \succ 0} \alpha \in L^*$. Das Skalarprodukt von ρ mit den einfachen Wurzeln ist $\langle \alpha_i, \rho \rangle = 1$. Mit der Basis λ_i von L^* ($\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$) ist $\rho = \sum_i \lambda_i$. Ich betrachte im folgenden häufig eine orthonormale Basis von $\mathfrak{g}$ bezüglich der Cartan-Killing-Form auf $\mathfrak{g}$. Die Basisvektoren bezeichne ich dann mit I^a, ($a = 1, \ldots, \dim(G)$). Ich wähle diese Basis weiterhin so, daß die ersten n Basiselemente: I^k, ($k = 1, \ldots, n$), eine orthonormale Basis von $\mathfrak{h}$ bilden.

Es sei $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ die universell Einhüllende von $\mathfrak{g}$. Die adjungierte Wirkung von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \ni g &\mapsto \mathrm{ad}_g \\ \mathrm{ad}_g(x) &= [g, x], \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutige Fortsetzung als Derivation nach $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$. Es sei $Z \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ die unter dieser Wirkung von $\mathfrak{g}$ invariante Unteralgebra von $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$. Die Elemente von Z heißen *Casimir-Operatoren.* Es ist bekannt, daß Z das Zentrum von $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ ist.

Obwohl es die Casimir-Operatoren sind, die in den Anwendungen auftreten, ist es manchmal nützlich mit invarianten Polynomen auf der Lie-Algebra zu rechnen. Sei dazu $\hat{\mathfrak{g}}$ der Dualraum von $\mathfrak{g}$, d.h., der Raum der linearen Funktionen auf $\mathfrak{g}$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt in natürlicher Weise eine Darstellung $\widehat{\mathrm{ad}}$ auf $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$\widehat{\mathrm{ad}}_x f(y) = f(-[x,y]).$$

Es sei $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \stackrel{\text{def}}{=} S(\hat{\mathfrak{g}})$, die Polynomalgebra über $\mathfrak{g}$, das ist die symmetrische Tensoralgebra über $\hat{\mathfrak{g}}$. Die Darstellung $\widehat{\mathrm{ad}}$ läßt sich eindeutig als Derivation auf $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ fortsetzen. Es sei $\mathcal{P}_G(\mathfrak{g})$ die unter $\widehat{\mathrm{ad}}$ invariante Unteralgebra von $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$.

> **Theorem 6.0.1:** (a) $\mathcal{P}_G(\mathfrak{g})$ wird von endlich vielen homogenen Polynomen erzeugt.
>
> (b) Es gibt einen, den Grad erhaltenden Vektorraumisomorphismus zwischen $\mathcal{P}_G(\mathfrak{g})$ und Z.

Der Grad in Z ist hierbei der Grad als Element der universell Einhüllenden $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Beweise dieser Aussagen lassen sich in [HUMPHREYS 72] finden.

Der in (b) erwähnte Isomorphismus läßt sich explizit angeben. Es sei für $x = \sum x_a I^a \in \mathfrak{g}$, $\widehat{C}$ ein invariantes Polynom auf $\mathfrak{g}$:

$$\widehat{C} = t_{a_1 \ldots a_k} x_{a_1} \cdots x_{a_k},$$

dann ist $\widetilde{C} = t_{a_1 \ldots a_k} I^{a_1} \cdots I^{a_k}$ ein Element in Z. (Hier und im folgenden nehme ich an, daß die Tensoren $t_{a_1 \ldots a_k}$ vollständig symmetrisch und spurfrei sind; über doppelt auftretende Lie-Algebrenindizes wird summiert.)

Schränkt man ein unter der Wirkung von G invariantes Polynom $\widehat{C}$ auf $\mathfrak{g}$, auf den Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein, so erhält man ein unter der Weyl-Gruppe W von G invariantes Polynom C auf $\mathfrak{h}$:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{C}|_{\mathfrak{h}}$$

Es gilt das folgende fundamentale Resultat (siehe [HUMPHREYS 72]).

> **Theorem 6.0.2:** Die Einschränkungsabbildung $\widehat{C} \mapsto C$, definiert einen graderhaltenden Isomorphismus zwischen der Algebra der W-invarianten Polynome auf $\mathfrak{h}$ und der Algebra der G-invarianten Polynome auf $\mathfrak{g}$.

Die Algebra der W-invarianten Polynome auf $\mathfrak{h}$ erfüllt eine Reihe von Eigenschaften, die ich als Theorem zusammenfasse. Der Beweis dieser Aussagen ist z.B. in [CARTER 72] nachzulesen.

> **Theorem 6.0.3:** (a) Die Algebra der W-invarianten Polynome auf $\mathfrak{h}$ wird von n ($n = \mathrm{rk}\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{h}$) algebraisch unabhängigen Polynomen $C^1, \ldots, C^n$ erzeugt.
>
> (b) Die Matrix
>
> $$a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C^i}{\partial x_j}(x_1 \cdot I^1 + \ldots + x_n \cdot I^n)$$

ist invertierbar innerhalb der fundamentalen Weyl-Kammer. Bezeichnet also x den Vektor mit Komponenten $x_1, \ldots, x_n$, so ist die obige Matrix invertierbar, falls $\langle x, \alpha_i \rangle > 0$ $(\forall i = 1, \ldots, n)$.

(c) Es sei für $k = 1, \ldots, n$, d_k der Grad von C^k. Die Zahlen $e_k \stackrel{\text{def}}{=} d_k - 1$ heißen *Exponenten* der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Seien die Zahlen k_i definiert als die Anzahl der positiven Wurzeln α, mit $\mathrm{ht}\alpha = i$. Dann ist: $n = k_1 \geq k_2 \geq \ldots$, und die e_i erfüllen: $e_i = \#\{j | k_j \geq i\}$.

Ich bezeichne im folgenden die Koeffizienten der C^k (in der oben angegebenen Basis) mit $t^k_{i_1 \ldots i_{d_k}}$, die der $\widetilde{C}^k$, mit $\widehat{t}^k_{a_1 \ldots a_{d_k}}$. Es ist also

$$C^k(x_1 \cdot I^1 + \ldots + x_n \cdot I^n) = t^k_{i_1 \ldots i_{d_k}} x_{i_1} \cdots x_{i_{d_k}} \quad \text{und} \quad \widetilde{C}^k = \widehat{t}^k_{a_1 \ldots a_{d_k}} I^{a_1} \cdots I^{a_{d_k}}$$

Teil (c) des Theorems läßt sich auch so formulieren: Die k_i bilden eine Partition von n in nichtnegative ganze Zahlen und die e_i entsprechen der dualen Partition. Als Korollar aus dieser Bemerkung erhält man folgende kombinatorische Formel:

$$\prod_{\alpha \succ 0} (1 - q^{(\alpha, \rho)}) = \prod_{i > 0} (1 - q^i)^{k_i} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{e_i} (1 - q^k). \tag{6.2}$$

6.1 Normalgeordnete Produkte, Casimir-Felder und lokale Algebren

In diesem Abschnitt werde ich normalgeordnete Produkte lokaler Felder definieren und die Casimir-Felder einführen. Ich halte mich dabei sehr kurz und verweise für weitere Details auf die Literatur, z.B. [FST 89, BOU/SCH 93, BFKNRV 91]. Es sei $\mathcal{H}$ Vakuumhilbertraum einer chiralen konformen Quantenfeldtheorie auf dem Kreis, Ω der Vakuumvektor. Die Darstellung der Möbiusgruppe $PSU(1,1)$ wird erzeugt durch die (unbeschränkten) Operatoren L_i, $i = 0, \pm 1$, mit:

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} \quad n \neq m, \quad n, m = 0, \pm 1. \tag{6.3}$$

Es seien $A(z)$ und $B(z)$ lokale Felder, mit konformen Dimensionen d_A und d_B. Die Fourier-Zerlegung der Felder ist gegeben durch:

$$A(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{-k} z^{k - d_A}, \quad B(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_{-k} z^{k - d_B}. \tag{6.4}$$

Es sei $C(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{-k} z^{k - d_A - d_B}$ das Feld mit Fourier-Komponenten:

$$C_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} {:}A_k B_{n-k}{:}, \quad \text{mit} \quad {:}A_k B_l{:} = \begin{cases} A_k B_l & k < -d_A \\ B_l A_k & k \geq -d_A. \end{cases} \tag{6.5}$$

Dann heißt $C(z)$ das *normalgeordnete* oder *Wick-geordnete* Produkt der Felder A und B, Notation: ${:}AB{:}(z) \stackrel{\text{def}}{=} C(z)$. Ich möchte als erstes einfache Eigenschaften des normalgeordneten Produktes erwähnen [BOU/SCH 93, BFKNRV 91]. Gilt für die Fourier-Moden von A und B: $A_n \Omega = 0 = B_m \Omega$, für $n \geq -d_A$, $m \geq -d_B$, dann gilt $:AB:_n\Omega = 0$, für $n \geq -(d_A + d_B)$. Ist weiterhin das Feld $:AB:$ quasiprimär, so ist seine konforme Dimension: $d_{AB} = d_A + d_B$. Es bleibt die Frage, inwiefern das normalgeordnete Produkt die lokale Struktur erhält [FST 89]. Dazu bemerkt man, daß der Kommutator der Felder A und B aus einer endlichen Summe von Ableitungen der Deltafunktionen gegeben ist.

$$[A(z_1), B(z_2)] = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(z_1 - z_2) O^k(z_1), \tag{6.6}$$

mit lokalen[2] Feldern O^k, $k = 1, \ldots, n$. Definiert man nun die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $A_\pm(z)$ als: $A_-(z) = \sum_{k>-d_A} A_k z^{-(k+d_A)}$ und $A_+(z) = A(z) - A_+(z)$, so hat die Distribution:

$$\begin{aligned} A_+(z_1)B(z_2) + B(z_2)A_-(z_1) &= A(z_1)B(z_2) - [A_-(z_1), B(z_2)] \\ &= A(z_1)B(z_2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k-2)!}{(z_1 - z_2)^{k+1}} O^k(z_1) \qquad (6.7) \end{aligned}$$

einen endlichen Grenzwert für $z_2 \to z_1$. Mit den formalen Rechenregeln für die Fourier-Moden lokaler Felder rechnet man nach, daß die Gleichheit:

$$:AB:(z) = \lim_{z_2, z_1 \to z} (A_+(z_1)B(z_2) + B(z_2)A_-(z_1)) \tag{6.8}$$

gilt. Mit der Formel (6.7), sieht man, daß sich das normalgeordnete Produkt $:AB:$, durch *lokale* Felder approximieren läßt. Schließlich definiert man das normalgeordnete Produkt von drei oder mehr Feldern sukzessive von rechts nach links, z.B:

$$:ABC: \stackrel{\text{def}}{=} :A\,(:BC:):. \tag{6.9}$$

Es sei nun wieder $\mathcal{H}_L$ der Vakuumhilbertraum der lokalen Erweiterung $\mathcal{F}_L$ von $\mathcal{U}$ und L Wurzelgitter einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Wie bereits in Kapitel 3 gezeigt, erhält man durch die "Blip"- oder Vertexoperator-Konstruktion Felder $J^a(z)$, $a = 1, \ldots, \dim(\mathfrak{g})$, die den Vertauschungsrelationen der affinen Lie-Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ genügen:

$$[J^a(z_1), J^b(z_2)] = i f_c^{ab} J^c(z_1)\delta(z_1 - z_2) - k g^{ab} \delta'(z_1 - z_2). \tag{6.10}$$

(Mit k=1.) Bezeichne ich mit $\mathcal{D}_0$ wieder den dichten Unterraum von $\mathcal{H}_L$, den man erhält, wenn man Polynome in den Feldern J^a auf das Vakuum anwendet und mit $\mathcal{P}_{J^a}(I)$ die schwachen Kommutanten dieser Felder (siehe Definition (2.21)), so gilt (siehe den Schluß von Kapitel 3):

$$\left(\bigcap_{a=1}^{\dim G} \mathcal{P}_{J^a}(I) \right)' \subset \mathcal{F}_L(I)''$$

und analog:

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{J^k}(I) \right)' \subset \pi_L(\mathcal{U}(I))''. \tag{6.11}$$

[2]Daß die Felder O^k lokal sind, ist tatsächlich eine zusätzliche Annahme, die in den später interessierenden Fällen aber zutrifft.

Dabei ist die Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wieder so gewählt, daß die Felder J^i, $i = 1,\ldots,n$ die Darstellung π_L der Stromalgebra erzeugen: Ist wieder I^k, $k = 1,\ldots,n$ die Einschränkung der Basis I^a auf die Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ und f eine reelle Testfunktion, so sei:

$$\pi_L\Big(W(f \cdot I^k)\Big) = e^{iJ^k[f]}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

(siehe Kapitel (4.2.1).) Die Fourier-Moden der Stromfelder $J^a(z)$ bezeichne ich mit j^a_m, $m \in \mathbb{Z}$, $a = 1,\ldots \dim(\mathfrak{g})$:

$$j^a_m \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dz}{2\pi i} J^a(z) z^m.$$

Die Wirkung der globalen Eichgruppe G in $\mathcal{H}_L$, wird erzeugt durch die Wirkung der Lie-Algebrenelemente $Q^a \stackrel{\text{def}}{=} j^a_0$:

$$Q^a\Omega = 0, \quad [Q^a, J^b(z)] = if^{ab}_c J^c(z).$$

Insbesondere gilt also:

$$[Q^a, Q^b] = if^{ab}_c Q^c.$$

Es seien, wie oben definiert, $t^k_{i_1\ldots i_{d_k}}$ und $\hat{t}^k_{a_1\ldots a_{d_k}}$ die Koeffizienten der Polynome C^k auf $\mathfrak{h}$ und $\hat{C}^k$ auf $\mathfrak{g}$. Die Casimir-Felder sind dann:

$$\widehat{W}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{t}^k_{a_1\ldots a_{d_k}} {:}J^{a_1}\cdots J^{a_{d_k}}{:}(z) \quad \text{und} \quad W^k(z) \stackrel{\text{def}}{=} t^k_{i_1\ldots i_{d_k}} {:}J^{i_1}\cdots J^{i_{d_k}}{:}(z). \tag{6.12}$$

Der Unterschied in den Definitionen von $\widehat{W}^k$ und W^k besteht darin, daß die (implizite) Summation im ersten Fall über eine Basis der gesamten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auszuführen ist, während bei den Feldern W^k die Summation nur über die Basis von $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ läuft. Während die $\widehat{W}^k$ durch die Stromfelder in $\mathcal{F}_L$ ausgedrückt werden, sind die W^k gegeben als Ausdrücke in den Stromfeldern in $\pi_L(\mathcal{U})$. Man überzeugt sich leicht, daß die Felder $\widehat{W}^k$ unter der Wirkung von $\mathfrak{g}$ invariant sind:

$$[Q^a, \widehat{W}^k(z)] = 0, \quad a = 1,\ldots,\dim(G), \ k = 1,\ldots,n. \tag{6.13}$$

Mit der Inklusion (6.1) ist es also naheliegend, daß die Felder $\widehat{W}^k$ durch die Stromfelder J^i, $i = 1,\ldots,n$ alleine ausgedrückt werden können. Daß dies so ist, besagt das folgende Theorem:

> **Theorem 6.1.1:** ([THIERRY-MIEG 88]) (a) Es gibt Zahlen c_k ($\neq 0$), $k = 1,\ldots,n$, so daß $\widehat{W}^k = c_k W^k$, d.h., die Felder $\widehat{W}^k$ und W^k sind proportional zueinander.
> (b) Die Felder W^k sind quasiprimär, d.h. sie sind kovariant unter der Darstellung U der Möbiusgruppe auf $\mathcal{H}_L$, formal:
>
> $$U(g)W^k(z)U^*(g) = \Big(\frac{dg^{-1}z}{dz}\Big)^{d_k} W^k(g^{-1}z) \text{ für } g \in PSU(1,1).$$

Bemerkungen: (i) Aus (a) folgt insbesondere, daß die Felder W^k invariant unter der Wirkung der globalen Eichgruppe G sind. Der Beweis dieser Tatsache benutzt die Definition des normalgeordneten Produktes durch die Fourier-Moden. Die Felder W^k sind aber normalgeordnete Produkte der *freien* Felder $J^i(z)$. Dies kann man benutzen

um zu zeigen, daß die Felder W^k (und damit auch $\widehat{W}^k$) lokale Algebren definieren.
(ii) Tatsächlich sind die Felder $\widehat{W}^k$ und W^k für $k \geq 2$ sogar *primär*, d.h. sie sind kovariant unter der durch den Energie-Impuls-Tensor induzierten Darstellung der Diffeomorphismen von S^1. Diese Tatsache wird im folgenden jedoch nicht benötigt.
(iii) Für den Fall $k = 1$ ist Teil (a) dieses Theorems bekannt und besagt, daß der Energie-Impuls-Tensor der Level-1 Darstellung der affinen Lie-Algebra $\hat{g}$ alleine durch die Ströme in der Cartan-Unteralgebra ausgedrückt werden kann: Die Inklusion der abelschen Stromalgebra, in der gesamten Stromalgebra (3.36) ist eine sogenannte konforme Inklusion. (Dies wurde natürlich bei den Auswahlregeln für lokale Erweiterungen gerade sichergestellt.)

Lokale Algebren durch Casimir-Felder. Ich werde nun skizzieren, wie man zeigt, daß die Casimir-Felder ein lokales Netz von von Neumann-Algebren definieren. Aufgrund der Tatsache, daß sich die Casimir-Felder als normalgeordnete Produkte in *freien* Feldern ausdrücken lassen, ist dies nicht sehr verwunderlich (siehe z.B.: [BOR/YNG 90]).
Es sei $\mathcal{B}(I)$ die Algebra:

$$\mathcal{B}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bigcap_{k=1}^{N} \mathcal{P}_{W^k}(I) \right)' . \tag{6.14}$$

Ich zeige, daß die Zuordnung $I \mapsto \mathcal{B}(I)$ ein lokales Netz von von Neumann Algebren auf S^1, mit allen gewünschten Eigenschaften (insbesondere der Kovarianz) definiert. Aus der Definition (6.14) folgt unmittelbar, daß die Mengen $\mathcal{B}(I)$ tatsächlich von Neumann-Algebren sind. Der nächste Schritt besteht darin zu zeigen, daß die Lokalität erfüllt ist, d.h. daß folgende Inklusion gilt:

$$\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{B}(I^c)' \ \forall I \Subset S^1$$

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, ist es i. a. schwierig diese Lokalitätsbedingung zu überprüfen. Hier wird es nützlich sein, daß sich die Casimir-Felder durch Polynome in den Stromfeldern J^i approximieren lassen.

Zunächst stelle ich fest, daß für $I \Subset S^1$ und $k = 1, \ldots, n-1$ $\mathcal{P}_{W^k}(I)$ tatsächlich eine Algebra ist. Das folgt daraus, daß die Stromfelder J^k lineare Energie-Abschätzungen erfüllen [BUCH/SCH-M 90], die Felder W^k als normalgeordnete Polynome dann polynomiale Energie-Abschätzungen erfüllen. Als nächstes zeigt man, daß die Inklusion:

$$\mathcal{B}(I) \subset \pi_L(\mathcal{U}(I))'', \quad I \Subset S^1. \tag{6.15}$$

gilt. Um dies zu zeigen, bemerke ich als erstes, daß man die Casimir-Felder als normalgeordnete Produkte der Stromfelder beliebig genau durch Polynome in den verschmierten Stromfeldern approximieren kann. Genauer: Bezeichnet man für jedes Intervall $I \Subset S^1$, mit $P_0(I)$ die Algebra der Polynome in den Feldern J^a, verschmiert mit Testfunktionen, deren Träger in I liegt, dann ist $P_0(I)\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_0$. Ist weiterhin I_ϵ eine ϵ-Umgebung des Intervalles I, welche I enthält und mit ihm keinen Endpunkt gemeinsam hat, so kann man zu jeder Testfunktion f, mit Träger in I eine Folge $\{P_n^k\}_{n=1}^\infty \subset P_0(I_\epsilon)$ finden, so daß für alle $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\phi \in \mathcal{H}_L$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (\phi, P_n^k \psi) = (\phi, W^k(f)\psi), \quad \lim_{n\to\infty} (\phi, (P_n^k)^\dagger \psi) = (\phi, (W^k(f))^\dagger \psi).$$

Ist nun für alle $i = 1, \ldots, n$, X in $\mathcal{P}_{J^i}(I_\epsilon)$, so kommutiert X schwach mit jedem P_n^k. Also gilt—weil sich schwache Kommutationsregeln auf schwache Limiten fortsetzen—für $\phi, \psi \in \mathcal{D}_0$, $\mathrm{supp}(f) \subset I$:

$$(X\phi, W^k(f)\psi) = ((W^k)^\dagger \phi, X^* \psi),$$

und es folgt:

$$X \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{J^k}(I_\epsilon) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{W^k}(I). \tag{6.16}$$

Da die $\mathcal{P}_{W^k}(I)$ von Neumann-Algebren sind, folgt: $\mathcal{B}(I)' = (\cap \mathcal{P}_{W^k}(I))'' = \cap \mathcal{P}_{W^k}(I)$. Zusammen mit Gleichung (6.16) und der Charakterisierung (6.11), folgt für alle $\epsilon > 0$: $\pi_L(\mathcal{U}(I_\epsilon))' \subset \mathcal{B}(I)'$, und man erhält:

$$\mathcal{B}(I) \subset \bigcap_{\epsilon > 0} \pi_L(\mathcal{U}(I_\epsilon))'' = \pi_L(\mathcal{U}(I))''.$$

Die Tatsache, daß $I \mapsto \mathcal{B}(I)$ ein *lokales* Netz definiert, ist nun ein einfaches Korollar aus Gleichung (6.15) und der Lokalität des Netzes $I \mapsto \mathcal{U}(I)$:

$$\mathcal{B}(I) \subset \pi_L(\mathcal{U}(I))'' \subset \pi_L(\mathcal{U}(I^c))' \subset \mathcal{B}(I^c)'.$$

□

Die Casimir-Felder definieren somit ein lokales Netz von von Neumann-Algebren: $I \mapsto \mathcal{B}(I)$. Die übrigen Eigenschaften für ein chirales, konformes Netz auf S^1 sind ebenfalls erfüllt. Es gilt:

(1) Das Netz $I \mapsto \mathcal{B}(I)$, ist kovariant unter der Darstellung U der Möbiusgruppe auf $\mathcal{H}_L$: $U(g)\mathcal{B}(I)U^*(g) = \mathcal{B}(gI)$, für $g \in PSU(1,1)$. Diese Eigenschaft folgt aus der Tatsache, daß die Felder W^k quasiprimär sind (Theorem 6.1.1(b)).

(2) G-Invarianz: $\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{F}_L^G(I)$. Das folgt aus der $\mathfrak{g}$-Invarianz, (6.13), der Felder W^k.

Da die modularen Gruppen der lokalen Algebren $\mathcal{F}_L(I)$ durch die Wirkung von Einparameteruntergruppen von $PSU(1,1)$ gegeben sind (siehe Theorem 5.3.3), folgt aus (1), daß für jedes $I \subset S^1$, die Algebra $\mathcal{B}(I)$ invariant unter der modularen Gruppe des Paares $(\mathcal{F}_L(I), \omega_0)$ ist. Diese Tatsache wird im folgenden sehr wichtig sein. Desweiteren folgt aus der Kovarianz unter $PSU(1,1)$ die Reeh-Schlieder Eigenschaft für das Netz $\mathcal{B}(I)$ (siehe z.B., [FRÖ/GAB 92]).

6.2 Die eichinvarianten Operatoren

Oben wurde gezeigt (siehe Gleichung (6.13)), daß die Casimir-Felder und damit auch die lokalen Algebren $\mathcal{B}(I)$ invariant unter der globalen Eichgruppe G sind. Dies ist eine Folge davon, daß sie als vollständige Kontraktionen der Stromfelder J^a mit invarianten Tensoren der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gebildet wurden. Die Wick-Ordnung sorgte dafür, daß man diese Felder als *lokale* Felder definieren kann. Andererseits sieht man, daß auch *multilokale* Felder der Form:

$$\widehat{W}(z_1,\ldots,z_{d_k}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{t}^k_{a_1\ldots a_{d_k}} J^{a_1}(z_1)\cdots J^{a_{d_k}}(z_{d_k}) \tag{6.17}$$

invariant unter der Gruppe G sind. Denkt man sich die Observablen aus der Feldalgebra $\mathcal{F}_L$ durch ein Eichprinzip gegeben, sind also die Observablen die Invarianten unter G, so erhebt sich die Frage, ob diese Algebra von den *lokalen* Casimir-Feldern (6.12) alleine erzeugt wird [LAN/SCHR 67]. Die multilokalen Felder (6.17) lassen sich dann durch lokale Casimir-Felder approximieren. Daß dies so ist, werde ich in dem vorliegenden Abschnitt zeigen. Die Technik, die ich dabei benutze stimmt dabei mit der von Rehren [REHREN 94] benutzten überein (siehe aber auch [WASSERMANN 89]).

Das Takesaki-Theorem und die Zyklizität des Vakuums für $\mathcal{B}(I)$. Es soll gezeigt werden, daß sich die für jedes Intervall gültigen Inklusionen:

$$\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{F}_L^G(I) \subset \mathcal{F}_L(I).$$

zu einer Gleichheit:

$$\mathcal{B}(I) = \mathcal{F}_L^G(I) \tag{6.18}$$

verschärfen lassen. Dazu benutze ich das Theorem von Takesaki:

> **Theorem 6.2.1:** (Takesaki; siehe z.B. [SUNDER 87]) Sei $A \subset B$ eine Inklusion von von Neumann-Algebren, ω ein treuer normaler Zustand auf B. Ist A invariant unter der modularen Gruppe des Paares (B,ω), und bezeichnet $(\pi,\mathcal{H},\Omega)$ die GNS-Darstellung von (B,ω), so ist genau dann $A = B$, wenn $\pi(A)\Omega$ dicht in $\mathcal{H}$ ist.

Für ein beliebiges Teilintervall $I \subset S^1$ sei $\omega_{\text{inv}} = \omega_0|_{\mathcal{F}_L^G(I)}$, die Einschränkung des Vakuumzustandes auf die Unteralgebra der G-Invarianten und $(\pi_{\text{inv}},\mathcal{H}_{\text{inv}},\Omega_{\text{inv}})$ die GNS-Darstellung des Paares $(\mathcal{F}_L^G(I),\omega_{\text{inv}})$. Wegen $\mathcal{F}_L^G(I) \subset \mathcal{F}_L(I)$ und $\omega_{\text{inv}} = \omega_0|_{\mathcal{F}_L^G(I)}$, kann man Ω_{inv} in natürlicher Weise mit Ω, und $\mathcal{H}_{\text{inv}}$ mit einem Unterraum von $\mathcal{H}_L$ identifizieren. Um das Theorem anzuwenden zeige ich, daß $\pi_{\text{inv}}(\mathcal{B}(I))\Omega$ dicht in $\mathcal{H}_{\text{inv}}$ liegt.

Bemerkung: Anstatt das Theorem von Takesaki zu benutzen könnte ich auch folgendermaßen vorgehen (siehe [REHREN 94]): Da $I \mapsto \mathcal{B}(I)$ ein lokales, kovariantes Netz auf S^1 ist, erfüllt es Haag-Dualität im Vakuumsektor [FRÖ/GAB 92]. Ist $\pi_{\text{inv}}(\mathcal{B}(I))\Omega$ dicht in $\mathcal{H}_{\text{inv}}$, so ist $\mathcal{H}_{\text{inv}}$ der Vakuumsektor dieses Netzes. Die Gleichheit der Algebren folgt dann aus folgender Inklusionskette:

$$\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{F}_L^G(I) \subset \mathcal{F}_L^G(I^c)' \subset \mathcal{B}(I^c)'.$$

Man überzeugt sich leicht, daß beide Vorgehensweisen äquivalent sind, d.h. sie benutzen dieselben Voraussetzungen.

Bezeichnet man mit $\widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}}$ den Unterraum von $\mathcal{H}_{\text{inv}}$, den man erhält, wenn man alle Polynome in den Casimir-Feldern $W^k(f)$, verschmiert mit beliebigen Testfunktionen mit Träger in S^1 auf das Vakuum anwendet, dann folgt aus der Reeh-Schlieder Eigenschaft für das Netz $\mathcal{B}(I)$, daß $\pi_{\text{inv}}(\mathcal{B}(I))\Omega$ dicht in $\widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}}$ ist. $\widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}}$ enthält aber Vektoren der Form

$$W^{i_1}_{-(n_1+d_{i_1})} W^{i_2}_{-(n_2+d_{i_2})} \cdots W^{i_k}_{-(n_k+d_{i_k})}\Omega, \tag{6.19}$$

wobei W^i_n die n-te Fourier-Mode des i-ten Casimir-Feldes ist:

$$W^i_n = \int \frac{dz}{2\pi i} W^i(z) z^{n+d_i-1}.$$

Es reicht also zu zeigen, daß Vektoren der Form (6.19) einen dichten Unterraum von $\mathcal{H}_{\text{inv}}$ erzeugen.

> **Lemma 6.2.2:** Die Vektoren (6.19) sind linear unabhängig, falls die Indizes den Bedingungen: $n_j \geq 0$, $i_j \geq i_{j+1}$ und $i_j = i_{j+1} \Rightarrow n_j \geq n_{j+1}$ genügen.

Bemerkung: Beweise dieses Lemmas—und damit für die Zyklizität des Vakuums unter den Fourier-Moden der Casimir-Felder—scheinen bekannt zu sein (siehe [WATTS 90] und dort genannte Referenzen). Da dieses Lemma von zentraler Bedeutung für die Beweisführung ist, gebe ich einen eigenen elementaren Beweis an.

Mit diesem Lemma zeigt man die Dichtheit der Vektoren (6.19) in $\mathcal{H}_{\text{inv}}$—und damit die Gleichheit $\mathcal{B}(I) = \mathcal{F}^G_L(I)$, wie folgt:

Mit Proposition (14.3.13) in [PRE/SEG 86] folgt, daß die Zustandssumme von $\mathcal{H}_{\text{inv}}$ durch ($q = e^{-t}$)

$$Z_{\mathcal{H}_{\text{inv}}}(t) = \pi_0(q)^n \prod_{\alpha \succ 0} (1 - q^{(\alpha,\rho)}), \text{ mit } \pi_0(q) = \prod_{m \geq 1} (1 - q^m)^{-1},$$

gegeben ist, wobei im ersten Term das Produkt über alle positiven Wurzeln der Lie-Algebra zu nehmen ist. Benutzt man die Exponenten e_i der Lie-Algebra (siehe Gleichung (6.2)), so erhält man:

$$Z_{\mathcal{H}_{\text{inv}}}(t) = \pi_0(q)^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{e_i} (1 - q^k). \tag{6.20}$$

Der Koeffizient vor q^m in dieser Gleichung ist die Dimension von $\mathcal{H}_{\text{inv}}(m)$, dem Eigenraum des Erzeugenden der Rotationen in $\mathcal{H}_{\text{inv}}$, zum Eigenwert m. Bezeichnet L_0 diesen Erzeugenden, so folgt aus der Kovarianz der Felder W^k (oder ihrer Definition): $[L_0, W_m] = -mW_m$. Sind die Vektoren (6.19) linear unabhängig, dann folgt aus einem einfachen Abzählargument, wie dem in Kapitel 4 (unter Berücksichtigung von $e_k = d_k - 1$), daß die Dimension von $\widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}}(m)$ mindestens so groß wie der Koeffizient von q^m in (6.20) ist. Es ist aber $\widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}}(m) \subset \mathcal{H}_{\text{inv}}(m)$, so daß ihre Dimensionen gleich sind und—diese Vektorräume sind endlichdimensional—es folgt: $\widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}}(m) = \mathcal{H}_{\text{inv}}(m)$. Man erhält:

$$\widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}} = \bigoplus_{m \geq 0} \widehat{\mathcal{H}_{\text{inv}}}(m) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{H}_{\text{inv}}(m) = \mathcal{H}_{\text{inv}}.$$

Der Beweis des Lemmas: Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren (6.19) unter der im Lemma angegebenen Bedingung, zeige ich mit einem Argument, das eine Verallgemeinerung des Argumentes in [SEGAL 81, Prop. (6.3)] für $G = SU(2)$ darstellt. Es sei $\mathcal{X} = \mathbb{C}[j^1_{-1}, j^2_{-1}, \dots, j^n_{-1}, j^1_{-2}, \dots]$, die Polynomalgebra in den Moden j^i_{-k}, $k > 0$, der Stromfelder. Wie schon in Kapitel 4 erwähnt, ist $\mathcal{X}\Omega$ ein freier $\mathcal{X}$-Modul, und der Fock-Raum $\mathcal{H}_0$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{X}\Omega$ in der entsprechenden Hilbertraummetrik. Um das Lemma zu zeigen, werde ich folgendermaßen vorgehen: Die Operatoren W^i_{-n} sind apriori unendliche Summen von homogenen Polynomen in den j^k_m. In Ausdrücken der Form (6.19) treten aufgrund der Normalordnung jedoch immer nur endlich viele dieser Polynome auf. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die j^k_{-m} für $m \geq 0$ algebraisch unabhängig sind, werde ich diese Polynome sukzessive vereinfachen, bis ich zu Polynomen komme, die sich leicht handhaben lassen.

Zuerst extrahiere ich aus den W^i_{-k}, $k \geq 0$, die Terme in den Fourier-Moden des Stromfeldes, die nur negative Frequenzen enthalten. Sei für $k = 1, \dots, n$ und $m \in \mathbb{N}$, die Multiindexmenge $I(k, m)$ definiert als

$$I(k,m) \stackrel{\text{def}}{=} \{(l_1, \dots, l_{d_k}) \in (\mathbb{N})^{d_k} | \sum_{j=1}^{d_k} l_j = m\}. \tag{6.21}$$

Die Polynome α^k_{-m} ($k = 1, \dots, n$, $m \geq d_k$) sind dann definiert durch:

$$\alpha^k_{-m} = \sum_{(l_1,\dots,l_{d_k}) \in I(k,m)} t^k_{i_1 \dots i_{d_k}} j^{i_1}_{-l_1} \cdots j^{i_{d_k}}_{-l_{d_k}}.$$

Mit der Definition des normalgeordneten Produktes sieht man, daß sich die Vektoren (6.19) für $n_j \geq 0$ ausdrücken lassen als:

$$W^{i_1}_{-(n_1+d_{i_1})} W^{i_2}_{-(n_2+d_{i_2})} \cdots W^{i_k}_{-(n_k+d_{i_k})} \Omega = \alpha^{i_1}_{-(n_1+d_{i_1})} \alpha^{i_2}_{-(n_2+d_{i_2})} \cdots \alpha^{i_k}_{-(n_k+d_{i_k})} \Omega + \mathcal{O}\Omega_{\text{inv}}.$$

In dem Operator $\mathcal{O}$ tauchen auch positive Frequenzen der Ströme auf. Benutzt man für diese die kanonischen Vertauschungsrelationen, so sieht man, daß sich $\mathcal{O}$ als ein Polynom in den j^k_{-n}, $n > 0$, schreiben läßt, dessen Grad echt kleiner ist als der des Polynomes $\alpha^{i_1}_{-n_1} \alpha^{i_2}_{-n_2} \cdots \alpha^{i_k}_{-n_k}$. Mit der oben erwähnten Eigenschaft, daß die Polynome in den j^i_{-n}, mit $n > 0$, den Fock-Raum *frei* erzeugen folgt, daß die Vektoren (6.19) unter der angegebenen Einschränkung an die Indizes linear unabhängig sind, falls nur die Vektoren $\alpha^{i_1}_{-(n_1+d_{i_1})} \alpha^{i_2}_{-(n_2+d_{i_2})} \cdots \alpha^{i_k}_{-(n_k+d_{i_k})} \Omega$ linear unabhängig sind. Es reicht somit zu zeigen, daß die Polynome $\alpha^i_{-(m+d_i)}$, ($i = 1, \dots, n$, $m \geq 0$) algebraisch unabhängig sind. Dazu führe ich folgende Annahme zum Widerspruch:

> **Annahme:** Es gebe ein $1 \leq k < n$, und ein $m \in \mathbb{N}$, so daß die Polynome
>
> $$\alpha^1_{-d_1}, \alpha^2_{-d_2}, \dots, \alpha^n_{-d_n}, \alpha^1_{-(d_1+1)}, \dots, \dots, \alpha^k_{-(d_k+m)}$$
>
> algebraisch unabhängig sind, während $\alpha^{k+1}_{-(d_{k+1}+m)}$ jedoch algebraisch über der Polynomalgebra $\mathbb{C}[\alpha^1_{-d_1}, \dots, \alpha^k_{-(d_k+m)}]$ ist.

Bemerkung: Die Einschränkung $k < n$ in der Annahme ist keine Beschränkung der Allgemeinheit: $\alpha^1_{-(d_1+m)}$ kann nicht algebraisch über der Polynomalgebra

$$\mathbb{C}[\alpha^1_{-d_1}, \dots, \alpha^N_{-(d_N+m-1)}]$$

sein. Denn $\alpha^1_{-(d_1+m)}$ enthält die Operatoren $j^i_{-(m+1)}$, die anderen α^k_{-j} enthalten diese Operatoren nicht. Die algebraische Abhängigkeit von $\alpha^1_{-(d_1+m)}$ über

$$\mathbb{C}[\alpha^1_{-d_1}, \dots, \alpha^N_{-(d_N+m-1)}]$$

impliziert also auch daß $j^1_{-(m+1)}$ algebraisch über

$$\mathbb{C}[j^1_{-1}, \dots, j^N_{-(m)}]$$

ist. Das ist aber nicht möglich.Das allgemeine Argument stellt eine Verallgemeinerung dieses Widerspruches dar.

Es sei, für $1 < s \leq n$ eine Zerlegung von $\alpha^s_{-(d_s+m)}$ definiert durch:

$$\begin{aligned}
\alpha^s_{-(d_s+m)} &= \sum_{(l_1,\dots l_{d_s})\in I(s,m)} t^s_{i_1\dots i_{d_s}} j^{i_1}_{-l_1} \cdots j^{i_{d_s}}_{-l_{d_s}} \\
&= \sum_{r=1}^{d_s} t^s_{i_1\dots i_{d_s}} j^{i_1}_{-1} \cdots j^{i_{r-1}}_{-1} j^{i_r}_{-(m+1)} j^{i_{r+1}}_{-1} \cdots j^{i_{d_s}}_{-1} + \tilde{\alpha}^s_{-(d_s+m)} \\
&= \beta^s_{-(d_s+m)} + \tilde{\alpha}^s_{-(d_s+m)},
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\beta^s_{-(d_s+m)} &= \sum_{r=1}^{d_s} t^s_{i_1\dots i_{d_s}} j^{i_1}_{-1} \cdots \widehat{j^{i_{r-1}}_{-1}} \cdots j^{i_{d_s}}_{-1} j^{i_r}_{-(m+1)}, \quad \text{und} \\
\tilde{\alpha}^s_{-(d_s+m)} &= \alpha^s_{-(d_s+m)} - \beta^s_{-(d_s+m)}.
\end{aligned}$$

(Hier und im folgenden bedeutet ein $\hat{}$ über einem Symbol, daß dieses Symbol nicht auftritt.)

Die Operatoren $\tilde{\alpha}^s_{-(d_s+m)}$ sind Polynome in den Moden der Stromfelder, in denen nur j^k_{-n}, mit $n \leq m$ auftauchen. Dasselbe gilt für die Operatoren $\alpha^s_{-(d_s+p)}$, mit $p < m$. Ist nun, gemäß der Annahme $\alpha^{k+1}_{-(d_{k+1}+m)}$ algebraisch über

$$\mathbb{C}[\alpha^1_{-d_1}, \dots, \alpha^k_{-(d_k+m)}],$$

so folgt aus diesen Bemerkungen, daß auch $\beta^{k+1}_{-(d_{k+1}+m)}$ algebraisch über

$$\mathbb{C}[\beta^k_{-(d_k+m)}, \dots, \beta^1_{-(d_1+m)}, j^1_{-1}, \dots, j^n_{-m}]$$

sein muß.

Mit den oben eingeführten invarianten Funktionen $C^1, \dots, C^n$ auf $\mathfrak{g}$ gilt nun:

$$a_{sj}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial C^s}{\partial x_j}(x_1 I^1 + \dots x_n I^n) = t^s_{i_1\dots i_{d_s}} \sum_{r=1}^{d_s} x_{i_1} \cdots \widehat{x_{i_r}} \cdots x_{i_{d_s}} \delta_{i_r j},$$

und für einen Vektor $(y_1, \dots, y_n)$ ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}(x_1, \dots x_n) \cdot y_j = t^s_{i_1\dots i_{d_s}} \sum_{r=1}^{d_s} x_{i_1} \cdots \widehat{x_{i_r}} \cdots x_{i_{d_s}} y_{i_r}.$$

Dann ist aber:

$$\beta^{k+1}_{-(d_{k+1}+m)} = \sum_{l=1}^{n} a_{k+1,l}(j^1_{-1},\ldots,j^n_{-1})j^l_{-(m+1)}.$$

Nun ist die Matrix a_{sj} invertierbar. Wendet man das Gauss'sche Eliminationsverfahren an, so sieht man, daß aus der algebraischen Abhängigkeit von $\beta^{k+1}_{-(d_{k+1}+m)}$ folgt, daß ein l existiert mit: $j^l_{-(m+1)}$ algebraisch über der Polynomalgebra, die von den übrigen Fourier-Moden j^i_{-n}, $n > 0; i \neq l$ für $n = m$, erzeugt wird. Dies steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\mathcal{X}\Omega$ ein freier $\mathcal{X}$-Modul ist. □

Somit erhält man das gewünschte Ergebnis, daß die *lokalen* Casimir-Felder die G-Invarianten des Netzes $I \mapsto \mathcal{F}_L(I)$ erzeugen. Es bleibt zu bemerken, daß für Darstellungen der Stromalgebra (3.36) zu höherem Level ($k > 1$) dieses Ergebnis nicht mehr zu erwarten ist [REHREN 94]. Dort muß man die Casimir-Algebra um zusätzliche lokale Felder erweitern, um die unter G invariante Unteralgebra der Stromalgebra zu erhalten. Es lassen sich jedoch auch andere Modelle mit den hier benutzten Methoden untersuchen. So konnte z.B. gezeigt werden, daß die $\mathbb{Z}_2$-Invarianten der Majorana-Fermionen-Feldalgebra auf dem Kreis von der Vakuumdarstellung des Energie-Impuls-Tensors mit zentraler Ladung $c = \frac{1}{2}$ erzeugt werden [WASSERMANN 89].

Kapitel 7

Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die lokale Struktur abelscher Stromalgebren auf dem Kreis zu untersuchen. Dazu wurde zunächst die Darstellungstheorie dieser Algebren untersucht. Es wurde gezeigt, wie sich die irreduziblen Darstellungen durch Elemente des zugrundeliegenden endlichdimensionalen Vektorraumes parametrisieren lassen. Um zu Modellen zu gelangen, die nur noch eine endliche Anzahl von Sektoren besitzen, wurden lokale Erweiterungen der Stromalgebra betrachtet, deren konformer Hamiltonoperator alleine durch die Stromfelder ausgedrückt werden kann. Solche Erweiterungen lassen sich in einer natürlichen Weise durch integrale, gerade Gitter in dem Vektorraum charakterisieren. Es wurde gezeigt, wie sich bekannte Darstellungen bestimmter Loopgruppen bei Level 1 in einer natürlichen Art aus einer Klasse dieser Erweiterungen ergeben.

Danach konnte mit Hilfe der Fock-Raum Struktur der Vakuumdarstellung gezeigt werden, wie die Haag-Dualität für Vereinigungen zweier disjunkter Intervalle verletzt ist. Es stellte sich heraus, daß man diese Verletzung durch Felder beschreiben kann, die in einem Intervall eine Ladung erzeugen und in einem anderen wieder vernichten. Das Ergebnis zeigt, wie sich die Superauswahlstruktur des Modelles schon im Vakuumsektor der Theorie manifestiert. Mit Hilfe der Doplicher-Haag-Roberts-Konstruktion für einfache Sektoren konnte eine entsprechende Aussage auch für lokale Erweiterungen gezeigt werden.

Es besteht die Hoffnung mit Hilfe dieser Resultate Einsichten in die Superauswahlstruktur von Modellen zu bekommen, für die die Konstruktion einer Feldalgebra noch nicht möglich ist.

Weiter wurden Connes-Kozykel für die vorliegenden Modelle untersucht. Dies sind Operatoren, die wie oben den Transport einer lokalisierten Ladung von einem Intervall in ein anderes beschreiben. Sie sind dabei den modularen Gruppen zugeordnet, welche wiederum kanonisch durch die lokalen Algebren und ihre Zustände bestimmt sind. Auch hier wurde gezeigt, wie sich die Superauswahlstruktur in diesen Objekten und damit im Vakuumsektor wiederspiegelt.

Abschließend wurden die Eichinvarianten der lokalen Algebren unter der Wirkung einer kompakten Liegruppe bestimmt. Es wurde gezeigt, daß diese von den Casimir-Feldern, das sind natürliche Verallgemeinerungen des Energie-Impuls-Tensors, erzeugt werden. Die Algebren die diese Felder erzeugen sind einfache Beispiele für $\mathcal{W}$-Algebren– lokale Erweiterungen der Algebra des Energie-Impuls-Tensors. Das Ergebnis zeigt (implizit), daß man multilokale Felder, die invariant unter der Wirkung der Eichgruppe sind, beliebig genau durch einen Satz von endlich vielen (explizit bekannten) lokalen Feldern approximieren kann.

Es läßt sich somit sagen, daß die lokale Struktur der vorliegenden Modelle hinreichend gut verstanden ist. Viele nichttriviale Aussagen, die man in anderen Modellen nur vermuten kann, sind mit den hier vorliegenden Ergebnissen vollkommen verstanden. In Anbetracht der Tatsache, daß abelsche Stromalgebren und ihre lokalen Erweiterungen auf dem Kreis die Bausteine zur Konstruktion anderer Modelle der Quantenfeldtheorie sind, besteht zudem die Hoffnung, daß man diese mit den hier erzielten Ergebnissen besser verstehen kann.

Literaturverzeichnis

[BORCHERS 92] H.-J. Borchers, “The CPT-Theorem in two-dimensional theories of local observables”, Commun. Math. Phys. **143** (1992) 315

[FRÖ/GAB 92] F. Gabbiani, J. Fröhlich, “Operator algebras and conformal field theory”, ETH-preprint ETH-TH/92-30 (1992)

[GUI/LON 92] D. Guido, R. Longo, “Relativistic Invariance and Charge Conjugation in Quantum Field Theory”, Commun. Math. Phys. **148** (1992), 521

[BIS/WICH 75] J. Bisognano, E. Wichmann, “On the duality condition for a hermitean scalar field”, J. Math. Phys. **16** (1975), 985

[WIESBROCK 93] H.-W. Wiesbrock, “Conformal Quantum Field Theory and Half-Sided Modular Inclusions of von Neumann Algebras”, Commun. Math. Phys. **158** (1993), 537

[BMT 88] D. Buchholz, G. Mack, I. Todorov, “The Current Algebra as a Germ of Local Field Theories on the Circle”, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **56** (1988), 20

[BUCH/SCH-M 90] D. Buchholz, H. Schulz-Mirbach, “Haag-Duality in Conformal Quantum Field Theory”, Rev. Math. Phys. **2** (1990), 105

[SEGAL 81] G. Segal, “Unitary Representations of Some Infinite Dimensional Groups”, Commun. Math. Phys. **80** (1981), 301

[CONNES 73] A. Connes, “Une Classification des Factores de Type III”, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup., 4e serie tome 6 fac 2 (1973), 133

[SCHROER 92] B. Schroer, “Recent Developments of Algebraic Methods in Quantum Field Theory”, Int. J. Mod. Phys. **6**, (1992) 2041

[WASSERMANN 89] A. Wassermann, “Subfactors arising from positive energy representations of some infinite dimensional groups”, preliminary notes, unpublished

[WIESBROCK 94] H.-W. Wiesbrock, “Superselection Structure of Conformal Field Theory on the Circle and Localized Connes-Cocycles”, SFB 288 Preprint No. 76, Berlin 1994

[NIV/ZUCK 60] I. Niven, H. S. Zuckerman; An Introduction to the Theory of Numbers; John Wiley & Sons, New York 1960

[THIERRY-MIEG 88] Jean Thierry-Mieg, "Generalization of the Sugawara Construction", in Nonperturbative Quantum Field Theory, G. 't Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter and R. Stora (Eds.); Plenum Press, New York 1988

[BAI/BOU/SCH/SUR 88] F. A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge and K. Schoutens, "Extensions Of The Virasoro Algebra Constructed From Kac-Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invariants", Nucl. Phys. B304 (1988) 348-370

[DRI/SUM/WICH 86] W. Driessler, S. J. Summers, E. H. Wichmann; Commun. Math. Phys. **105**, 49 (1986)

[DHR 69 I] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts, "Fields, observables and gauge transformations I.", Comun. Math. Phys. **13** (1969), 1

[DHR 69 II] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts, "Fields, observables and gauge transformations II.", Comun. Math. Phys. **15** (1969), 173

[DHR 71] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts, "Local observables and particle statistics I.", Comun. Math. Phys. **23** (1971), 199

[DHR 74] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts, "Local observables and particle statistics II.", Comun. Math. Phys. **35** (1974), 49

[FST 89] P. Furlan, G. M. Sotkov, I. T. Todorov, "Two dimensional conformal quantum field theory", Riv. Nuovo Cimento 12, No. 6 (1989), 1

[HUMPHREYS 72] James E. Humphreys; "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory"; Springer, New York 1972

[CARTER 72] Roger W. Carter; "Simple Groups of Lie Type"; John Wiley & Sons, New York 1972

[REHREN 94] K.-H. Rehren, "A new view at the Virasoro Algebra", Lett. Math. Phys. **30** No. 2 (1994), 125

[BRA/ROB 79 I] Ola Bratelli, Derek W. Robinson ; "Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I"; Springer, New York 1979

[BRA/ROB 79 II] Ola Bratelli, Derek W. Robinson ; "Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II"; Springer, New York 1979

[AHLFORS 79] Lars A. Ahlfors; "Complex Analysis", third edition, McGraw-Hill, Singapore 1979

[PRE/SEG 86] Andrew Pressley, Graeme Segal; "Loop Groups", Clarendon Press, Oxford 1986

[KAC 90] V. G. Kac; "Infinite-dimensional Lie algebras", third edition, Cambridge University Press, Cambridge 1990

[LE/RO/TE 78] Pen Leyland, John Roberts, Daniel Testard; "Duality for Quantum Free Fields", CNRS-Preprint Nr. 907, Marseille 1978

[SHALE 62] D. Shale, Trans. Am. Math. Soc. **103** (1962), 149

[YOSIDA 71] Kôsaku Yosida; "Functional Analysis", third edition, Springer-Verlag, Heidelberg 1971

[BRU/GUI/LO 93] R. Brunetti, D. Guido, R. Longo; "Modular Structure and Duality in Conformal Quantum Field Theory", Commun. Math. Phys. **156**, 201

[SCH-MIR89] Hanns Schulz-Mirbach; "Haag-Dualität in der zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie", Diplomarbeit (unveröffentlicht), Hamburg 1989

[YNGVASON 94] J. Yngvason; "A Note on Essential Duality", Reykjavik-Preprint 1993

[HAAG 92] R. Haag; "Local Quantum Physics", Springer-Verlag, Berlin 1992

[BU/FRE 82] D. Buchholz, K. Fredenhagen; "Locality and the structure of particle states", Commun. Math. Phys. **84**, 1 (1982)

[FRE/RE/SCHR 89] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, B. Schroer; "Superselection sectors with braid group statistics. I: general theory", Commun. Math. Phys. **125**, 201 (1989)

[FRE/RE/SCHR 92] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, B. Schroer; "Superselection sectors with braid group statistics. II", Rev. Math. Phys. **Special Issue**, 113 (1992)

[FREDENHAGEN 90] K. Fredenhagen; "Generalizations of the theory of superselection sectors", in: The Algebraic Theory of Superselection Sectors, D. Kastler (ed.), World Scientific, 1990

[STR/WIGH 64] R. F. Streater, A. S. Wightman; "PCT, Spin and Statistics, and all That", W. A. Benjamin, Inc. , New York 1964

[JOST 65] R. Jost; "The general theory of quantized fields", American Math. Soc., Providence, R.I., 1965

[RE/SI 80] M. Reed, B. Simon; "Methods of modern mathematical physics. Vol. I: Functional Analysis", revised and enlarged edition, Academic Press, San Diego 1980

[DRIE/FRÖ 77] W. Driessler, J. Fröhlich; "The reconstruction of local observable algebras from the euclidean Greens functions of relativistic quantum field theory", Ann. Inst. H. Poincaré, **27**, (1977) 221

[BOR/YNG 90] H. J. Borchers, J. Yngvason; "Positivity of Wightman Functionals and the Existence of local nets", Commun. Math. Phys. **127**, (1990) 607

[BUCHHOLZ 90] D. Buchholz; "On quantum fields that generate local algebras", J. Math. Phys. **31**, (1990) 1839

[WI/WI/WI 52] G. C. Wick, A. S. Wightman, E. P. Wigner; "The Intrinsic Parity of Elementary Particles", Phys. Rev. **88**, (1952) 101

[LAN/SCHR 67] J. Langerholc, B. Schroer; "Can Current-Operators Determine a Complete Theory", Commun. Math. Phys. **4** (1967) 123

[WITTEN 84] E. Witten; "Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions", Commun. Math. Phys. **92** (1984) 455

[BPZ 84] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, "Infinite conformal symmetry in conformal quantum field theory", Nucl. Phys. **B 241** 1984 333

[KN/ZA 84] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov; "Current algebra and Wess Zumino model in two dimensions", Nucl. Phys. **B 247** (1984) 83

[JÖRSS 91] Martin Jörß; "Lokale Netze auf dem eindimensionalen Lichtkegel", Diplomarbeit, FU Berlin 1991

[FREDENHAGEN 92] K. Fredenhagen; "Product of states", in "Groups and related Topics" (eds. R. Gielerack et al.), Kluwer 1992

[ARAKI 63] H. Araki; "A Lattice of Von Neumann Algebras Associated with the Quantum Theory of a Free Bose Field", J. Math. Phys. **4**, (1963) 1343

[BORCHERS 60] H. J. Borchers; "Über die Mannigfaltigkeit der interpolierenden Felder zu einer kausalen S-Matrix", Nuovo Cimento **15**, (1960) 784

[DOP/ROB 90] S. Doplicher, J. E. Roberts; "Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics", Commun. Math. Phys. **131** (1991) 51

[ROBERTS 74] J. E. Roberts; "Spontaneously broken gauge symmetries and superselection rules", Proc. International School of Mathematical Physics, Camerino 1974, ed. G. Gallavotti, Università di Camerino, 1976

[FRI/QIU/SHE 85] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, Phys. Rev. Lett B151 (1985) 37

[LO/REH 94] R. Longo, K.-H. Rehren; "Nets of Subfactors", Desy-Preprint 94-205, hep-th/9411077

[GHJ] F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones, "Coxeter Graphs and Towers of Algebras", Springer-Verlag, New-York 1989

[BOU/SCH 93] P. Bouwknegt, K. Schoutens; "$\mathcal{W}$ symmetry in conformal field theory", Phys. Rep. **223** (1993) 183

[BFKNRV 91] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, R. Varnhagen; "$\mathcal{W}$-Algebras with two and three generators", Nucl. Phys. **B 261**, (1991) 361

[WATTS 90] G. M. T. Watts; "$\mathcal{W}$-algebras and coset models", Phys. Lett. **B 245**, (1990) 65

[CON/SLO 88] J. H. Conway, N. J. A. Sloane; "Sphere Packings, Lattices and Groups", Springer-Verlag, New York 1988

[GOD/OLI 85] P. Goddard, D. Olive; "Algebras, lattices and strings", in "Vertex Operators in Mathematics and Physics", Eds.: J.Lepowsky, S. Mandelstam, I. M. Singer, Springer-Verlag, New York 1985

[SUNDER 87] V. S. Sunder, "An Invitation to von Neumann Algebras", Springer-Verlag, New York 1987

[STASZKIEWICZ 94] C. P. Staszkiewicz; "Localized Connes-Cocycles for chiral nets over S^1, generated by abelian current algebras", Preprint, Berlin 1994

[STONE 92] Michael Stone (ed.); "Quantum Hall Effect", World Scientific, Singapore 1992