Die Dualgruppe lokalkompakter abelscher Gruppen und die Pontryagin-Dualität

von Peter Kuleff

WS 2013/14

eingereicht bei Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Notationelle Vereinbarungen

In dieser Arbeit werden die folgenden Bezeichnungen bzw. Konventionen verwendet:

- $C(X, \mathbb{C})$, wobei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist: Raum der stetigen Funktionen $f \colon X \to \mathbb{C}$. $C_0(X, \mathbb{C})$ bezeichne die Menge der stetigen, komplexwertigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden und $C_K(X, \mathbb{C})$ diejenigen mit kompaktem Träger.

- Ein lokalkompakter, topologischer Raum sei ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$, in dem jedes Element $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

- Für einen Messraum $(X, \mathfrak{S})$ ist mit einem Maß stets ein nichtnegatives Maß gemeint. Wenn von allgemeinen Maßen die Rede ist, so werden sie mit ν bezeichnet. Der Buchstabe μ ist speziell für das Haar'sche Maß (vgl. Satz 1.5) auf einer topologischen Gruppe reserviert.

- Für eine Gruppe $(G, +, 0, -)$, $x \in G$, $M \subseteq G$ sei $x + M := \{x + g \colon g \in M\}$. Analog seien für $M_1, M_2 \subseteq G$ die Mengen $M_1 + M_2$ bzw. M^{-1} definiert.

- Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{E}$ bezeichnet

1.2 Topologische Gruppen

Definition 1.1. Sei $(G, +, 0, -)$ eine Gruppe, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf der Menge G, sodass $(G, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum ist und sodass die Gruppenoperationen

$$+\colon \begin{cases} G \times G \to G \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

und

$$-\colon \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto -x \end{cases}$$

stetig[1] sind. Dann heißt $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe.

Definition 1.2. (vgl. [2], S. 256) Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische, abelsche Gruppe, $E \subseteq G$ und (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f \colon E \to X$ heißt gleichmäßig stetig, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $W \in \mathfrak{U}(e)$ existiert, sodass

$$x, y \in E, x - y \in W \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

[1] Wir versehen hier $G \times G$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$.

Lemma 1.3. (vgl. [2], S. 256) Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische, abelsche Gruppe, $K \subseteq G$ kompakt, (X, d) ein metrischer Raum und $f\colon K \to X$ stetig. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Für jedes $x \in G$ gilt $\mathfrak{U}(x) = \{x + V : V \in \mathfrak{U}(e)\}$.

(ii) f ist sogar gleichmäßig stetig.

(iii) Jedes $g \in C_K(G, \mathbb{C})$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis

(i) Für festes $x \in G$ ist die Abbildung $y \mapsto x + y$ stetig und sogar ein Homöomorphismus, da $y \mapsto -x + y$ ihre stetige Inverse ist. Eine Menge $U \ni x$ ist daher genau dann offen, wenn $U - x \ni e$ offen ist und genau dann Umgebung von x, wenn $U - x$ Umgebung von e ist. Daher sind die Mengen $x + V$ mit $V \in \mathfrak{U}(e)$ genau die Umgebungen von x.

(ii) Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in K$ gibt es wegen der Stetigkeit von f ein offenes $W_x \in \mathfrak{U}(e)$, sodass

$$y \in x + W_x \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

gilt. Weiters existiert wegen der Stetigkeit der Gruppenaddition ein $V_x \in \mathfrak{U}(e)$, sodass $V_x + V_x \subseteq W_x$. Wegen der Kompaktheit von K überdecken bereits endlich viele $x_k + V_{x_k}$, wobei $x_1, \ldots, x_n \in K$, diese Menge. Mit $V^* := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ folgt für $x, y \in K$

$$\begin{aligned} x - y \in V^* &\Rightarrow x, y \in V^* + y \subseteq V_{x_k} + V_{x_k} + x_k \subseteq W_{x_k} + x_k \\ &\Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), f(y)) < 2\epsilon, \end{aligned}$$

da $y \in V_{x_k} + x_k$ für ein $k \leq n$.

(iii) Sei $g \in C_K(G, \mathbb{C})$ und angenommen g ist nicht gleichmäßig stetig. D.h. es gibt ein $\epsilon > 0$, sodass gilt

$$\forall V \in \mathfrak{U}(e) \exists x_V, y_V \in V : x_V - y_V \in V \text{ und } d(g(x_V), g(y_V)) \geq \epsilon.$$

Sei $K := \operatorname{supp}(g)$. Offensichtlich kann nicht gelten $x_V, y_V \in G \setminus K$. Außerdem folgt aus dem letzten Punkt, dass $g|_K$ gleichmäßig stetig ist. Daher gibt es für das fest gewählte $\epsilon > 0$ stets ein $W \in \mathfrak{U}(e)$, sodass

$$x, y \in K, x - y \in W \Rightarrow d(g(x), g(y)) < \epsilon.$$

Also ist auch $x_V, y_V \in K$ nicht möglich. Sei oBdA stets $x_V \in G \setminus K$, $y_V \in K$. Mit der Menge $\mathfrak{U}(e)$, gerichtet durch $V_1 \preceq V_2 :\Leftrightarrow V_1 \supseteq V_2$, wird $(y_V)_{V \in \mathfrak{U}(e)}$ zu einem Netz, dass wegen der Kompaktheit von K ein gegen ein $y_0 \in K$ konvergentes Teilnetz $(y_{V(i)})_{i \in I}$ hat. Nun konvergiert auch das Netz $(x_{V(i)})_{i \in I}$ gegen y_0: Für ein beliebiges $U \in \mathfrak{U}(e)$ sei $W \in \mathfrak{U}(e)$ mit $W + W \subseteq U$. Wählt man nun $i_0 \in I$, sodass

$$i \succeq i_0 \Rightarrow \begin{array}{ll} 1.) & y_{V(i)} \in y_0 + W \\ 2.) & V(i) \subseteq W \end{array}$$

wobei 1.) wegen der Konvergenz und 2.) wegen der Teilnetzeigenschaft möglich ist, dann folgt für $i \succeq i_0$

$$\begin{aligned} x_{V(i)} - y_{V(i)} \in V(i) \Rightarrow x_{V(i)} \in y_{V(i)} + V(i) \subseteq \\ y_0 + W + V(i) \subseteq y_0 + W + W \subseteq y_0 + U \end{aligned}$$

also $x_{V(i)} \to y_0$. Damit folgt aber der Widerspruch

$$\epsilon \leq |f(x_{V(i)}) - f(y_{V(i)})| \leq |f(x_{V(i)}) - f(y_0)| + |f(y_0) - f(y_{V(i)})| \xrightarrow{i \in I} 0$$

$\square$

Im Folgenden werden speziell *lokalkompakte, abelsche Gruppen* betrachtet.

1.3 Das Haar'sche Maß

Die folgende Definition hält sich an das Buch *Measure Theory* von Donald Cohen (siehe [1]), aus dem auch die wichtigen Sätze 1.5 und 2.7 zitiert werden. Obwohl die Definition geringfügig von der aus [2] abweicht, an dem sich die Arbeit größtenteils orientiert, kommt es zu keinen Inkonsistenzen, da alle zitierten, aber nicht bewiesenen Aussagen von [2] nicht auf diese Definition zurückgreifen.

Definition 1.4. (vgl. [1], S. 205f und 303) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum,

(i) die *Borelmengen* sind die von der Topologie erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{T}) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T})$

(ii) ein Maß $\nu \colon \mathcal{B}(\mathcal{T}) \to [0, \infty]$ darauf heißt *Borelmaß*

(iii) für eine σ-Algebra $\mathfrak{S} \supseteq \mathcal{B}(\mathcal{T})$ heißt ein Maß $\nu\colon \mathfrak{S} \to [0,\infty]$ *regulär*, falls

- für jedes kompakte $K \subseteq X$ gilt $\mu(K) < +\infty$
- für jede Borelmenge $B \in \mathfrak{S}$ gilt

$$\nu(B) = \inf\{\nu(O)\colon O \supseteq B,\ O \text{ offen}\}$$

- für jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ gilt

$$\nu(U) = \sup\{\nu(K)\colon K \subseteq U,\ K \text{ kompakt}\}$$

(iv) Sei $(G,\mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe. Ein reguläres Borelmaß $\mu\colon \mathcal{B}(\mathcal{T}) \to [0,\infty]$, $\mu \neq 0$, das zusätzlich noch linksinvariant ist, d.h.

$$\mu(B) = \mu(g + B)$$

für jede Borelmenge B und jedes $g \in G$ erfüllt, heißt *linkes Haar'sches Maß*.

Da σ-Algebren unter der Komplementbildung abgeschlossen sind, enthalten die Borelmengen alle abgeschlossenen Mengen und insbesondere auch alle kompakten Mengen. Zum linken Haar'schen Maß kann man in analoger Weise auch ein rechtes definieren, in abelschen Gruppen fallen diese beiden Begriffe zusammen – man spricht dann nur von einem Haar'schen Maß.

Der folgenden Satz über Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Multiplikation mit einer positive Konstante) des Haar'schen Maßes ist für diese Arbeit unerlässlich. Der Beweis würde den Rahmen bei weitem sprengen, und ist daher unbewiesen zitiert:

Satz 1.5. (vgl. [1], S. 305ff und 309f) Sei $(G,\mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe. Dann existiert ein linkes Haar'sches Maß μ auf $\mathcal{B}(\mathcal{T})$. Sind $\mu, \tilde{\mu}$ linke Haar'sche Maße, so existiert ein $\lambda > 0$ sodass $\mu = \lambda\tilde{\mu}$. Insbesondere existiert auf lokalkompakten, abelschen Gruppen stets ein Haarsches Maß, das bis auf eine positive Konstante eindeutig ist.

Beispiel 1.6. (vgl. [1], S. 304; ohne Beweis) Einige Beispiele für Haar'sche Maße

- Die topologische Gruppe $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}^n)$ (mit der Gruppenoperation $+$) trägt das Lebesquemaß λ^n.

- Sei G irgendeine abelsche Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(G)$. Dies ist – wie man elementar zeigen kann – eine topologische Gruppe und darüberhinaus lokalkompakt, da für ein $x \in G$ durch $\{x\}$ eine kompakte Umgebung gegeben ist. Das Zählmaß

$$\xi(M) := \begin{cases} |M|, & \text{wenn M endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein translationsinvariantes, reguläres Borelmaß, also das eindeutige Haar'sche Maß.

Als Voraussetzung für ein späteres Resultat ist es notwendig, für einen gegebenen Maßraum $(X, \mathfrak{S}, \nu)$ den Raum $L^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C})$ etwas anders zu definieren als üblich. Für ein σ-endliches Maß ν stimmt der im Folgenden eingeführte Begriff der lokalen Nullmenge mit dem der Nullmenge überein. Auch die hier gegebene Definition des $L^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C})$ ist dann äquivalent zur herkömmlichen.

Definition 1.7. (vgl. [1], S. 99 und 103) Sei $(X, \mathfrak{S}, \nu)$ ein Maßraum.

(i) Eine Menge $N \in \mathfrak{S}$ heißt *lokale ν-Nullmenge*, wenn für jedes $A \in \mathfrak{S}$ mit $\nu(A) < \infty$ gilt
$$\nu(A \cap N) = 0.$$

(ii) Eine Eigenschaft von Elementen von X gilt *lokal ν-fast überall*, wenn sie für alle $x \in X \setminus N$ gilt und N eine lokale ν-Nullmenge ist.

(iii) Eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ bzw. $f\colon X \to \mathbb{C}$, für die es ein $M \geq 0$ gibt, sodass die Menge $\{x \in X\colon |f(x)| > M\}$ eine lokale ν-Nullmenge ist, heißt *wesentlich beschränkt*. Die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen wird mit $\mathscr{L}^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{R})$ bzw. $\mathscr{L}^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C})$ bezeichnet. Mit $\|f\|_\infty$ wird das Infimum jener $M \geq 0$, sodass die angegebene Menge eine lokale ν-Nullmenge ist, bezeichnet.

(iv) Mit $f \sim g\colon \Leftrightarrow f = g$ lokal ν-fast überall wird – wie man zeigen kann – eine Äquivalenzrelation definiert. $L^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{R})$ bzw. $L^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C})$ sei die Menge der so entstandenen Äquivalenzklassen.

Es lässt sich zeigen, dass $\mathscr{L}^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C})$ mit $\|.\|_\infty$ ein seminormierter Raum ist. Außerdem kann man nachweisen, dass die Zuordnung

$$\begin{cases} L^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C}) \to [0, +\infty) \\ [f]_\sim \mapsto \|f\|_\infty \end{cases}$$

nicht vom Repräsentanten abhängt und eine Norm auf $L^\infty(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C})$ darstellt und diesen zu einem normierten Raum macht. (vgl. [1], S. 99 und 103)

Lemma 1.8. (vgl. [2], S. 2f) Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte abelsche Gruppe, dann gilt

(i) für jedes nichtleere, offene O: $\mu(O) > 0$.

(ii) Komplemente von lokalen Nullmengen sind dicht in G. Insbesondere sind stetige Funktionen, die bis auf eine lokale Nullmenge übereinstimmen, ident.

(iii) Für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$: $\mu(B) = \mu(-B)$.

Beweis

(i) Angenommen es gibt ein nichtleeres $O \in \mathcal{T}$ mit $\mu(O) = 0$. OBdA sei $e \in O$. Sonst wählt man $x_0 \in O$ und geht zu $\tilde{O} := O - x_0$ über. Es gilt dann noch immer $\mu(\tilde{O}) = \mu(O) = 0$. Für eine beliebige kompakte Menge $K \subseteq G$ ist $(O + x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung, also gilt

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (O + x_k)$$

für gewisse $x_1, \ldots, x_n \in K$. Es folgt

$$\mu(K) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(O + x_k) = n\mu(O) = 0$$

und da K beliebig war, ergibt die Regularität von innen für alle $U \in \mathcal{T}$

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \colon K \subseteq U,\ K \text{ kompakt}\} = 0.$$

Aus der Regularität von außen folgt schließlich der Widerspruch, dass μ das Nullmaß ist.

(ii) Sei $N \subseteq G$ lokale Nullmenge, und $O \subseteq N$ offen. Für jedes kompakte $K \subseteq O$ ist $\mu(K) < \infty$ und daher

$$\mu(K) = \mu(K \cap N) = 0$$

Wegen der Regularität von innen für offene Mengen gilt auch $\mu(O) = 0$. Insbesondere ist also auch das Innere von N eine Nullmenge. Nach dem letzten Punkt gilt $N^\circ = \emptyset$. Es folgt

$$G = (\emptyset)^C = (N^\circ)^C = \overline{(N^C)}$$

(iii) Sei $\nu(B) := \mu(-B)$. Da $x \mapsto -x$ ein Homöomorphismus ist, ist es insbesondere in beide Richtungen messbar, womit ν ein Borelmaß ist. Weiters gilt

$$\nu(B+x) = \mu(-(B+x)) = \mu(-B-x) = \mu(-B) = \nu(B).$$

Also ist ν translationinvariant. Da aufgrund der Stetigkeit von $x \mapsto -x$ die Menge K genau dann kompakt ist, wenn es $-K$ ist, gilt

$$\sup\{\nu(K)\colon K \subseteq U,\ K \text{ kompakt}\} = \sup\{\mu(-K)\colon K \subseteq U,\ K \text{ kompakt}\} =$$
$$\sup\{\mu(-K)\colon -K \subseteq -U,\ K \text{ kompakt}\} = \mu(-U) = \nu(U)$$

für alle offenen Mengen $U \subseteq G$. Analog zeigt man, dass ν von außen regulär ist. Also ist ν ein reguläres, translationsinvariantes Borelmaß, womit für ein $\lambda > 0$ gelten muss

$$\nu(B) = \lambda\mu(B)$$

Für eine symmetrische, kompakte Umgebung $K \in \mathfrak{U}(e)$ ergibt sich insbesondere $\mu(K) = \mu(-K) = \nu(K) = \lambda\mu(K)$, also $\lambda = 1$, da $0 < \mu(K) < \infty$.

□

1.4 Banachalgebren und Gelfand-Raum

Wir benötigen in der folgenden Arbeit einige Werkzeuge aus der Funktionalanalysis, insbesondere aus der Theorie der kommutativen Banachalgebren. Dieses Unterkapitel fasst diejenigen Definitionen und Resultate zusammen, die später gebraucht werden und ist daher so knapp wie möglich gehalten. Die Resultate des ganzen Abschnittes sind – bis auf Lemma 1.11 und Punkt (i) von 1.12 – aus [2], S. 261ff.

Definition 1.9. Eine (komplexe) Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Vektorraum über den komplexen Zahlen, in dem eine Multiplikation

$$\cdot : \begin{cases} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\ (x,y) \mapsto x \cdot y \end{cases}$$

definiert ist, die außerdem $(x, y, z \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C})$

- assoziativ: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- links- und rechtsdistributiv: $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
- verträglich mit Skalarmultiplikation: $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$

ist.

Eine Banachalgebra ist ein Banachraum $(\mathcal{A}, \|.\|)$ versehen mit einer Multiplikation, die ihn zu einer Algebra macht, sodass für $x, y \in \mathcal{A}$ stets $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ gilt. Ist sie *kommutativ*, so spricht man von einer *kommutativen Banachalgebra*. Eine Bachalgebra kann ein *neutrales Element* e enthalten, d.h. $x \cdot e = e \cdot x = x$ für alle $x \in \mathcal{A}$. Existiert in diesem Fall für ein $x \in \mathcal{A}$ ein Element x^{-1}, sodass $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$, so heißt x *invertierbar*, x^{-1} das *inverse Element* (vgl. [3], S. 351f).

Definition 1.10. Sei $(\mathcal{A}, \|.\|)$ eine Banachalgebra. Ein *multiplikatives Funktional* ist ein lineares, stetiges Funktional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $f \neq 0$, das außerdem $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$ erfüllt. Weiters bezeichne Δ die Menge aller multiplikativen Funktionale. Es gilt also $\Delta \subseteq \mathcal{A}'$, wobei $\mathcal{A}'$ der topologische Dualraum von $\mathcal{A}$ ist.

Lemma 1.11. Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein kompakter Hausdorffraum, $Y = X \mathbin{\dot\cup} \{p\}$, weiters X versehen mit $\mathcal{T} := \mathcal{O}|_X$, $f \in C(Y, \mathbb{C})$ und $f(p) = 0$. Dann gilt $f|_X \in C_0(X, \mathbb{C})$.

Beweis Aus der Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : X \to Y$ folgt die von $f|_X = f \circ \mathrm{id}_X$, also $f|_X \in C(X, \mathbb{C})$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da f bei p stetig ist, existiert eine offene Umgebung $O \in \mathfrak{U}_{\mathcal{O}}(p)$, sodass $|f(y)| < \epsilon$ wenn $y \in O$. $K := O^C \subseteq X$ ist abgeschlossen und – da $(Y, \mathcal{O})$ kompakt und (T2) ist – sogar kompakt in diesem Raum. Daher ist $K \subseteq X$ auch kompakt in $(X, \mathcal{T})$. Für $x \in X \setminus K$ gilt $x \in O$, also $|f(x)| < \epsilon$, womit $f \in C_0(X, \mathbb{C})$. □

Lemma 1.12. Sei $(\mathcal{A}, \|.\|)$ eine kommutative Banachalgebra, Δ wie oben definiert und sei weiters vorausgesetzt, dass $\Delta \neq \emptyset$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Jedes $f \in \Delta$ ist ein stetiges Funktional mit $\|f\| \leq 1$.

(ii) Jedes $x \in \mathcal{A}$ definiert eine Abbildung

$$\iota_x : \begin{cases} \Delta \to \mathbb{C} \\ f \mapsto f(x) \end{cases}$$

Versieht man Δ mit $\mathcal{G} := \mathcal{T}_{init}((\iota_x)_{x \in \mathcal{A}})$ – also mit der initialen Topologie bezüglich der ι_x – so ist $(\Delta, \mathcal{G})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum.

(iii) Für jedes $x \in \mathcal{A}$ gilt: $\iota_x \in C_0(\Delta, \mathbb{C})$ (wobei Δ mit der Topologie aus dem letzten Punkt versehen ist).

(iv) Die Abbildung

$$\mathcal{I} : \begin{cases} \mathcal{A} \to C_0(\Delta, \mathbb{C}) \\ x \mapsto \iota_x \end{cases}$$

ist ein stetiger Algebrenhomomorphismus. Insbesondere ist $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ eine Unteralgebra von $C_0(\Delta, \mathbb{C})$.

(v) Hat $\mathcal{A}$ eine Einheit, so ist $(\Delta, \mathcal{G})$ kompakt.

Beweis[2]

(i) Da f per Definition stetig und linear ist, bleibt nur die Abschätzung für die Norm zu zeigen. Angenommen es gibt ein multiplikatives Funktional f, sodass $\|f\| > 1$. Es existiert also ein $x \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = 1$ und $\|x\| < 1$. Wählt man

$$y := \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

so folgt aus $y = x + x \cdot y$ der Widerspruch

$$f(y) = f(x + x \cdot y) = f(x) + f(x)f(y) = 1 + f(y)$$

(ii) Sei $\tilde{\iota}_x \colon \mathcal{A}' \to \mathbb{C}$ die auf ganz $\mathcal{A}'$ definierte Punktauswertung, d.h. für ein $f \in \mathcal{A}'$, $x \in \mathcal{A}$ sei $\tilde{\iota}_x(f) = f(x)$. Dann gilt $\tilde{\iota}_x|_\Delta = \iota_x$. Versieht man $\mathcal{A}'$ mit der initialen Topologie bzgl. der $\{\tilde{\iota}_x \colon x \in \mathcal{A}\}$, so ist dies gerade die Schwachsterntopologie $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$. Mit der Notation $\mathrm{id}_\Delta \colon \Delta \hookrightarrow \mathcal{A}'$ gilt $\iota_x = \tilde{\iota}_x \circ \mathrm{id}_\Delta$. Wegen der der Assoziativität der Bildung der inititalen Topologie stimmt die oben definierte Topologie $\mathcal{G}$ mit der Spurtopologie $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})|_\Delta$ überein. Aus dem ersten Punkt folgt $\Delta \subseteq \Delta \cup \{0\} \subseteq K_1^{\|\cdot\|}(0) \subseteq \mathcal{A}'$, wobei die Einheitskugel bzgl. der Operatornorm zu verstehen ist. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist diese schwachstern-kompakt. Nun ist $\Delta \cup \{0\}$ abgeschlossen. Um das einzusehen sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Netz in $\Delta \cup \{0\}$, das in $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ gegen ein f konvergiert. Somit gilt $f_i(x) \to f(x)$ für alle $x \in \mathcal{A}$. Für beliebige $y, z \in \mathcal{A}$ folgt

$$f(y \cdot z) = \lim_{i \in I} f_i(y \cdot z) = \lim_{i \in I} f_i(y) f_i(z) = \lim_{i \in I} f_i(y) \lim_{i \in I} f_i(z) = f(y)f(z),$$

also $f \in \Delta \cup \{0\}$. Da $\sigma(\mathcal{A}', A)$ ein Hausdorffraum ist, ist $\Delta \cup \{0\}$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt. Nun erfüllt $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})|_{\Delta \cup \{0\}}$ als Teilraum eines (T2)-Raumes wiederum (T2), also ist $\{0\}$ darin abgeschlossen und damit Δ offen. Somit ist wegen $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})|_\Delta$ $= (\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})|_{\Delta \cup \{0\}})|_\Delta$ der Raum $(\Delta, \mathcal{G})$ als offener Teilraum eines kompakten (T2)-Raumes lokalkompakt und (T2).

(iii) Sei $x \in \mathcal{A}$ beliebig. Wir wissen aus dem letzten Punkt, dass $\Delta \cup \{0\}$ ein kompakter Hausdorffraum und Δ offene Teilmenge davon ist. Wählt man in Lemma 1.11 $Y = \Delta \cup \{0\}$, $X = \Delta$, $p = 0$, $f = \tilde{\iota}_x|_{\Delta \cup \{0\}}$, so gilt sicher $f(p) = \tilde{\iota}_x(0) = 0$ und damit $\iota_x = \tilde{\iota}_x|_\Delta \in C_0(\Delta, \mathbb{C})$

(iv) Dass $\mathcal{I}$ ein Algebrenhomomorphismus ist, muss man nachrechnen. Für ein beliebiges $f \in \Delta$ gilt:

[2]Punkt (i) ist aus [4], S. 380 entnommen.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x+\alpha y)(f) = \iota_{x+\alpha y}(f) = f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha f(y) = \\ \iota_x(f) + \alpha\iota_y(f) = (\iota_x + \alpha\iota_y)(f) = (\mathcal{I}(x) + \alpha\mathcal{I}(y))(f)\end{aligned}$$

also insgesamt $\mathcal{I}(x+\alpha y) = \mathcal{I}(x) + \alpha\mathcal{I}(y)$. Die Multiplikativität von $\mathcal{I}$ zeigt man analog unter Verwendung der Multiplikativität der Elemente aus Δ. Für $x \in \mathcal{A}$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}\|\iota_x\|_\infty = \sup_{f\in\Delta} |\iota_x(f)| = \sup_{f\in\Delta} |f(x)| \le \sup_{f\in\Delta} \|f\| \cdot \|x\| \le \|x\| \\ \implies \|\mathcal{I}(x)\|_\infty = \|\iota_x\|_\infty \le \|x\|\end{aligned}$$

(v) Es lässt sich elementar zeigen, dass für die Einheit $e \in \mathcal{A}$ und ein $f \in \Delta$ immer $f(e) = 1$ gelten muss. Für ein beliebiges in $\mathcal{A}'$ konvergentes Netz $(g_i)_{i\in I} \subseteq \Delta$, $g_i \to g$ gilt also $g(e) = \lim_{i\in I} g_i(e) = 1$, weswegen für den Grenzwert $g \neq 0$ gelten muss. Da die Multiplikativität genau wie in Punkt (ii) unter Grenzwertbildung erhalten bleibt, ist Δ schwachstern-abgeschlossene Teilmenge von der kompakten Menge $K_1^{\|\cdot\|}(0)$ und damit kompakt.

$\square$

Bemerkung 1.13. Die Topologie $\mathcal{G}$ heißt *Gelfand-Topologie* und die Abbildung $\mathcal{I}\colon \mathcal{A} \to C_0(\Delta, \mathbb{C})$ *Gelfand-Transformation.*

2 Die Dualgruppe und ihre Topologie

Definition 2.1. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe. Unter einem *Charakter* versteht man einen Gruppenhomomorphismus $\gamma\colon (G, +, 0, -) \to (\mathbb{T}, \cdot, 1, ^{-1})$. Die Menge aller stetigen[3] Charaktere wird mit Γ bezeichnet. Definiert man punktweise Operationen, so wird Γ zu einer abelschen Gruppe (mit der konstanten Einsfunktion als neutralem Element). Denn mit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ sind klarerweise $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ und γ_1^{-1} als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig. Wegen

$$\begin{aligned}(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(x+y) = \gamma_1(x)\gamma_1(y)\gamma_2(x)\gamma_2(y) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(x)(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(y) \\ \text{und } (\gamma_1^{-1})(x+y) = (\gamma_1(x)\gamma_1(y))^{-1} = (\gamma_1^{-1})(x)(\gamma_1^{-1})(y)\end{aligned}$$

sind diese Funktionen wieder Homomorphismen (nach $\mathbb{T}$) und damit wieder Charaktere. Man nennt Γ die *duale Gruppe* oder *Dualgruppe* von $(G, \mathcal{T})$.

[3] Die komplexe Einheitskreislinie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ sei versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{E}|_{\mathbb{T}}$.

Zunächst ist Γ noch mit keiner Topologie versehen. Um Γ geeignet zu topologisieren, benötigen wir einige Begriffsbildungen und Resultate. Im Folgenden führen wir Verallgemeinerungen der *Fouriertransformation* und der *Faltung* auf lokalkompakten abelschen Gruppen ein.

Definition 2.2. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe mit Haar'-schem Maß μ, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(G) := L^p(G, \mathcal{B}(\mathcal{T}), \mu, \mathbb{C})$, $x \in G$ fest.

$$f_x(y) := f(y - x)$$

Aus der Translationsinvarianz von μ folgt unmittelbar, dass $f_x \in L^p(G)$ und

$$\|f\|_p = \|f_x\|_p,$$

also ist die Translation normerhaltend.

Für das nächste Resultat (Lemma 2.4), benötigt man den folgenden Satz, auf den hier nur verwiesen wird:

Satz 2.3. (vgl. [2], S. 268) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum, ν ein reguläres Borelmaß darauf, $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Menge der stetigen Funkionen mit kompaktem Träger $C_K(X, \mathbb{C})$ dicht in $L^p(X, \mathcal{B}(\mathcal{T}), \nu, \mathbb{C})$.

Lemma 2.4. (vgl. [2], S. 3) Sei $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(G)$ fest, dann ist die Abbildung

$$x \to f_x$$

von G nach $L^p(G)$ gleichmäßig stetig.

Beweis Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben, $f \in L^p(G)$ fest. Da gemäß dem vorherigen Satz und wegen der Regularität von μ der Raum $C_K(G, \mathbb{C})$ in $L^p(G)$ dicht ist, existiert ein $g \in C_K(G, \mathbb{C})$ mit $\|f - g\|_p < \epsilon$. Da gemäß Lemma 1.3 g sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es zu vorgegebenem ρ ein $V \in \mathfrak{U}(e)$, sodass

$$x - z \in V \Rightarrow |g(x) - g(z)| < \rho.$$

Substituiert man hier $z = x - y$, so ergibt sich

$$y \in V \Rightarrow |g(x) - g_y(x)| < \rho.$$

Da V nicht von x abhängt, folgt mit $\rho := \epsilon(2\mu(K))^{-1/p}$, $K := \mathrm{supp}(g)$

$$\begin{aligned}
\|g - g_y\|_\infty &\leq \epsilon(2\mu(K))^{-1/p} \Rightarrow \\
\|g - g_y\|_p = \left(\int_G |g - g_y|^p \, d\mu\right)^{1/p} &= \left(\int_{K \cup (y+K)} |g - g_y|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \\
(\|g - g_y\|_\infty^p \, \mu(K \cup K + y))^{1/p} &\leq \left(\epsilon^p (2\mu(K))^{-1} 2\mu(K)\right)^{1/p} = \epsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Definition 2.5. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ $\mathcal{B}(\mathcal{T})$-messbar, und $x \in G$, sodass

$$\int_G |f(x-y)g(y)| \, d\mu(y) < +\infty. \tag{1}$$

Dann ist die *Faltung* von f mit g am Punkt x definiert durch

$$f * g(x) := \int_G f(x-y)g(y) \, d\mu(y)$$

Lemma 2.6. Seien $f, g, h \in L^1(G)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ dann gelten die folgenden Aussagen

(i) (1) ist für μ-fast alle $x \in G$ erfüllt.

(ii) setzt man $f * g$ auf der Ausnahmenullmenge aus (i) z.B. mit 0 fort, so gilt $f * g \in L^1(G)$

(iii) $f * g = g * f$

(iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(v) $(f + \alpha g) * h = f * h + \alpha(g * h)$

(vi) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

(vii) Sind $f_1 \in L^1(G)$, $f_2 \in L^\infty(G)$, dann ist $f_1 * f_2$ beschränkt und gleichmäßig stetig.

Beweis

(i) Aus dem Satz von Fubini ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_G \int_G |f(x-y)g(y)| \, d\mu(y) \, d\mu(x) &= \int_G |g(y)| \int_G |f(x-y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \\
\int_G |g(y)| \int_G |f(x)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) &= \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}$$

also muss für μ-fast alle $x \in G$ (1) gelten.

(ii) Wegen

$$\int_G |(f*g)(x)|\,d\mu(x) \leq \int_G \int_G |f(x-y)g(y)|\,d\mu(y)\,d\mu(x)$$

folgt aus dem Beweis von (i) sowie dem Satz von Fubini, dass $f*g$ messbar ist und in $L^1(G)$ liegt.

(iii) Mit der Transformation $y \mapsto x-y$ folgt

$$(f*g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)\,d\mu(y) = \int_G f(y)g(x-y)\,d\mu(y) = (g*f)(x)$$

(iv) Unter einmaliger Anwendung des Satzes von Fubini und der Transformation $z \mapsto y+z$ im inneren Integral folgt

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(x) = \int_G f(x-z)(g*h)(z)\,d\mu(z) = \\ \int_G\int_G f(x-z)g(z-y)h(y)\,d\mu(y)\,d\mu(z) = \\ \int_G\int_G f(x-y-z)g(z)h(y)\,d\mu(z)\,d\mu(y) = \\ \int_G (f*g)(x-y)h(y)\,d\mu(y) = ((f*g)*h)(x).\end{aligned}$$

(v)

$$((f+\alpha g)*h)(x) = \int_G (f(x-y)+\alpha g(x-y))h(y)\,d\mu(y) =$$
$$\int_G f(x-y)h(y)\,d\mu(y) + \alpha\int_G g(x-y)h(y)\,d\mu(y) = (f*h)(x)+\alpha(g*h)(x)$$

(vi) Die Submultiplikativität ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung aus Punkt (i) zusammen mit der aus (ii).

(vii) Dass $f*g$ sogar für alle $x \in G$ wohldefiniert und beschränkt ist, ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Die letze Behauptung erhalten wir aus

$$\begin{aligned}|f_1*f_2(x) - f_1*f_2(y)| = \left|\int_G (f_1(x-z)-f_1(y-z))f_2(z)\,d\mu(z)\right| \leq \\ \|f_2\|_\infty \int_G |f_1(z-y)-f_1(z-x)|\,d\mu(z) = \|f_2\|_\infty \|(f_1)_y - (f_1)_x\|_1\end{aligned}$$

zusammen mit der Tatsache, dass die Abbildung $x \mapsto f_x$ gleichmäßig stetig ist (vgl. Lemma 2.4).

$\square$

Wir kommen nun zum Beweis eines Satzes, der es uns erlauben wird, die Dualgruppe Γ mit der Menge der multiplikativen Funktionale auf $L^1(G)$ zu identifizieren. Wir benötigen dazu die Identifikation von $L^1(G)'$ mit $L^\infty(G)$. Aus der Analysis ist bekannt, dass diese beiden Räume isometrisch isomorph sind, sofern μ σ-endlich ist. Das Haar'sche Maß ist bedauerlicherweise i.A. nicht σ-endlich. Daher sei das folgende Resultat ohne Beweis zitiert, wobei hier die Definition des $L^\infty(G)$ wie in 1.7 zu verstehen ist.

Satz 2.7. (vgl. [1], S. 324) Sei $(G,\mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, ν ein reguläres Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathcal{T})$. Dann ist

$$\Psi\colon \begin{cases} L^\infty(G,\mathcal{B}(\mathcal{T}),\nu,\mathbb{C}) \to L^1(G,\mathcal{B}(\mathcal{T}),\nu,\mathbb{C})' \\ g \mapsto \psi_g \end{cases}$$

$$\psi_g(f) := \int_G fg\,d\nu$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Satz 2.8. (vgl. [2], S. 7f) Sei $(G,\mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, $\gamma \in \Gamma$ beliebig, dann ist

$$\Phi_\gamma\colon \begin{cases} L^1(G) \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \int_G f(x)\gamma(-x)\,d\mu(x) \end{cases} \tag{2}$$

ein multiplikatives Funktional auf $L^1(G)$ (also insbesondere $\Phi_\gamma \neq 0$). Umgekehrt existiert für jedes $h \in \Delta_{L^1(G)}$ ein $\gamma \in \Gamma$ sodass $h = \Phi_\gamma$ wobei unterschiedliche Charaktere unterschiedliche multiplikative Funktionale induzieren.

Beweis Für $f, g \in L^1(G)$ gilt

$$\Phi_\gamma(f*g) = \int_G (f*g)(x)\gamma(-x)\,d\mu(x) =$$
$$\int_G\int_G f(x-y)g(y)\gamma(-x)\,d\mu(y)\,d\mu(x) \overset{*}{=} \int_G g(y)\int_G f(x)\gamma(-x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) =$$
$$\int_G g(y)\gamma(-y)\,d\mu(y)\int_G f(x)\gamma(-x)\,d\mu(x) = \Phi_\gamma(g)\Phi_\gamma(f)$$

wobei die Anwendung des Satzes von Fubini bei dem Gleichheitszeichen mit $*$ dadurch gerechtfertigt ist, dass $f*g \in L^1(G)$ und $\gamma \in L^\infty(G)$. Im selben Schritt wurde im inneren Integral die Transformation $x \mapsto x+y$ angewandt. Wegen $\gamma \in L^\infty(G)$ folgt mit Satz 2.7, dass Φ_γ linear und stetig ist.

Sei $K \in \mathfrak{U}(e)$ kompakt. Definiere $f := \gamma \mathbb{1}_K \in L^1(G)$. Da K ein nichtleeres Inneres hat ist sein Maß gemäß Lemma 1.8 positiv und es folgt

$$\Phi_\gamma(f) = \int_K \gamma(x)\gamma(-x)\, d\mu(x) = \mu(K) > 0,$$

also $\Phi_\gamma \neq 0$.

Sei nun $h \in \Delta_{L^1(G)}$. Gemäß Lemma 1.12 gilt $\|h\| \leq 1$. Satz 2.7 garantiert die Existenz eines $\phi \in L^\infty(G)$, $\|\phi\|_\infty = \|h\|$, sodass

$$h(f) = \int_G f\phi\, d\mu\,, \quad f \in L^1(G). \tag{3}$$

Für ein festgehaltenes $f \in L^1(G)$ mit $h(f) \neq 0$ und für alle $g \in L^1(G)$ folgt

$$\int_G h(f)g(y)\phi(y)\, d\mu(y) = h(f)h(g) = h(f * g) = \int_G (f * g)(x)\phi(x)\, d\mu(x) =$$
$$\int_G \int_G f(x-y)g(y)\phi(x)\, d\mu(y)\, d\mu(x) = \int_G g(y) \int_G f(x-y)\phi(x)\, d\mu(x)\, d\mu(y) =$$
$$\int_G g(y)h(f_y)\, d\mu(y).$$

Wegen der Injektivität der Abbildung aus Satz 2.7 gilt:

$$h(f)\phi(y) = h(f_y) \quad \text{lokal } \mu\text{-fast überall.} \tag{4}$$

Gemäß Lemma 2.4 und aufgrund der Stetigkeit von h ist die rechte Seite in y stetig. Da voraussetzungsgemäß $h(f) \neq 0$, lässt sich ϕ ausdrücken durch

$$\phi(y) = \frac{h(f_y)}{h(f)} \quad \text{lokal } \mu\text{-fast überall.} \tag{5}$$

Die rechte und die linke Seite entsprechen also derselben Äquivalenzklasse in $L^\infty(G)$. Damit kann man – da die Darstellung aus (3) gemäß Satz 2.7 nur von der Äquivalenzklasse abhängt – annehmen, dass (4) und (5) sogar für alle $y \in G$ gelten, womit ϕ stetig ist. Indem man in (4) y durch $x + y$ ersetzt, folgt

$$\begin{aligned} &h(f)\phi(x+y) = h(f_{x+y}) = h((f_x)_y) = h(f_x)\phi(y) = h(f)\phi(x)\phi(y) \\ &\text{also } \phi(x+y) = \phi(x)\phi(y). \end{aligned}$$

Somit ist ϕ ein Homomorphismus, woraus $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$ folgt. Zusammen mit $\|\phi\|_\infty = \|h\| \leq 1$ ergibt sich daraus $|\phi(x)| = 1$ für $x \in G$, also $\phi \in \Gamma$. Setzt man schließlich in (2) $\Phi_{\gamma_1} = \Phi_{\gamma_2}$, dann folgt $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ lokal μ-fast überall. Da die beiden Funktionen stetig sind, gilt das aber schon für alle $x \in G$ (vgl Lemma 1.8). $\square$

Satz 2.8 zeigt, dass sich Γ und $\Delta_{L^1(G)}$ bijektiv entsprechen. Da die konstante Einsfunktion für jede lokalkompakte, abelsche Gruppe ein Charakter ist, ist Γ und damit $\Delta_{L^1(G)}$ nie leer. Wir werden daher im Folgenden die Dualgruppe mit der Menge aller multiplikativen Funktionale auf $L^1(G)$ miteinander identifizieren. Im nächsten Schritt versehen wir $\Delta_{L^1(G)}$ mit einer Topologie, womit automatisch Γ eine Topologie erhält; nämlich die durch $\Phi\colon \gamma \mapsto \Phi_\gamma$ vermittelte Homöomorphe Kopie davon.

Definition 2.9. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe. Wir versehen $\Delta_{L^1(G)}$ mit der Gelfand-Topologie $\mathcal{G}$, also mit der initialen Topologie bzgl. der Punktauswertungsfunktionale. Sei $\Phi\colon \gamma \mapsto \Phi_\gamma$ die Bijektion aus Satz 2.8. Dann ist gemäß Lemma 1.12 $\mathcal{G}$ und damit auch $\mathcal{T}_\Gamma := \Phi^{-1}(\mathcal{G}) = \{\Phi^{-1}(O)\colon O \in \mathcal{G}\}$ ein lokalkompakter Hausdorffraum.

Definition 2.10. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, $f \in L^1(G)$, dann ist die *Fouriertransformation* von f definiert als

$$\hat{f}(\gamma) := \int_G f(x)\gamma(-x)\, d\mu(x) \quad \text{für } \gamma \in \Gamma.$$

Bemerkung 2.11. Für ein festes $f \in L^1(G)$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(-x)\, d\mu(x) &= \Phi_\gamma(f) = \iota_f(\Phi_\gamma), \quad \gamma \in \Gamma \\ \text{und damit} \quad \hat{f} &= \iota_f \circ \Phi \end{aligned} \tag{6}$$

also leistet die Fouriertransformierte auf Γ genau das, was die Gelfandtransformierte von f auf $\Delta_{L^1(G)}$ leistet. Wegen (6) ist $\hat{f}$ stetig auf $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$. Ist umgekehrt $\mathcal{T}$ eine Topologie auf Γ, sodass $\hat{f}$ für alle $f \in L^1(G)$ stetig ist, so ist die Funktion $\iota_f = \hat{f} \circ \Phi^{-1}$ stetig bzgl. der Topologie $\Phi(\mathcal{T}) = \{\Phi(O)\colon O \in \mathcal{T}\}$ auf $\Delta_{L^1(G)}$, also gilt $\Phi(\mathcal{T}) \supseteq \mathcal{G}$. Daraus folgt $\mathcal{T} \supseteq \Phi^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{T}_\Gamma$. Also ist $\mathcal{T}_\Gamma$ die gröbste Topologie, die alle $\hat{f}$, $f \in L^1(G)$ stetig macht.

Lemma 2.12. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, $f, g \in L^1(G)$, dann gilt

(i) $\hat{f} \in C_0(\Gamma, \mathbb{C})$

(ii) Es gilt $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, außerdem ist die Fouriertransformation $\hat{\ }\colon L^1(G) \to C_0(\Gamma, \mathbb{C})$ linear und stetig.

(iii) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

(iv) $\widehat{L^1(G)}$ liegt bezüglich $\|.\|_\infty$ dicht in $C_0(\Gamma, \mathbb{C})$

Beweis Die Punkte (i) und (ii) folgen mit Bemerkung 2.11 aus den entsprechenden Aussagen für die Gelfandtransformierte, siehe Lemma 1.12.

(iii) Mit der vorherigen Bemerkung folgt

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \Phi_\gamma(f * g) = \Phi_\gamma(f)\Phi_\gamma(g) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma) = (\hat{f}\hat{g})(\gamma)$$

(iv) $\widehat{L^1(G)}$ ist ein Unterraum von $C_0(\Gamma, \mathbb{C})$ und wegen des letzten Punktes auch unter Multiplikation abgeschlossen. Für $f \in L^1(G)$ sei $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$, womit $\tilde{f} \in L^1(G)$ und

$$\hat{\tilde{f}}(\gamma) = \int_G \overline{f(-x)}\gamma(-x)\, d\mu(x) = \overline{\int_G f(-x)\gamma(x)\, d\mu(x)} = \bar{\hat{f}}(\gamma)$$

folgt. Für ein festes $\gamma \in \Gamma$ gibt es ein $f \in L^1(G)$ sodass $0 \neq \Phi_\gamma(f) = \hat{f}(\gamma)$, also ist $\widehat{L^1(G)}$ nirgends verschwindend. Um zu zeigen, dass die Unteralgebra auch punktetrennend ist, seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ gegeben. Definiere $f := \mathbb{1}_K(\gamma_1 - \gamma_2)$ mit einem kompakten K mit positivem Maß. Dann folgt

$$\hat{f}(\gamma_1) - \hat{f}(\gamma_2) = \int_G f(x)(\gamma_1(-x) - \gamma_2(-x))\, d\mu(x) =$$
$$\int_K \overline{(\gamma_1(-x) - \gamma_2(-x))}(\gamma_1(-x) - \gamma_2(-x))\, d\mu(x) = \mu(K) > 0$$

Also ist $\widehat{L^1(G)}$ eine unter Konjugation abgeschlossene, punktetrennende, nirgends verschwindende Unteralgebra von $C_0(\Gamma, \mathbb{C})$ und gemäß dem Satz von Stone-Weierstraß dicht darin.

□

Bemerkung 2.13. Es lässt sich zeigen, dass für die lokalkompakte, abelsche Gruppe $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ die Dualgruppe genau aus den Funktionen $x \mapsto e^{ixy}$, $y \in \mathbb{R}$ besteht (vgl. [2], S. 12). In diesem Sinne ist die angegebene Definition der Fouriertransformierten eine Verallgemeinerung des bekannten Konzepts.

Bis jetzt ist Γ eine Gruppe und ein lokalkompakter (T2)-Raum. Der folgende Satz zeigt, dass die Topologie $\mathcal{T}_\Gamma$ sie zu einer topologischen Gruppe macht.

Satz 2.14. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe und $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ ihre Dualgruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung $S\colon G \times \Gamma \to \mathbb{C}\colon (x, \gamma) \mapsto \gamma(x)$ ist stetig ($G \times \Gamma$ mit der Produkttopologie versehen).

(ii) Die Abbildung $T\colon \Gamma \to \Gamma\colon \gamma \mapsto \gamma \cdot \gamma_0$ ist für festes $\gamma_0 \in \Gamma$ ein Homöomorphismus.

(iii) sei $K \subseteq G$ kompakt, $U_r := \{z \in \mathbb{C}\colon |z-1| < r\}$

$$N(K, r) := \{\gamma \in \Gamma\colon \gamma(x) \in U_r,\, x \in K\}$$

dann ist $N(K, r)$ offen in $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$.

(iv) sei $C \subseteq \Gamma$ kompakt

$$N(C, r) := \{x \in G\colon \gamma(x) \in U_r,\, \gamma \in C\}$$

dann ist $N(C, r)$ offen in $(G, \mathcal{T})$.

(v) Die Mengen der Form

$$\gamma \cdot N(K, r)$$

wobei $K \subseteq G$ kompakt, $r > 0$, $\gamma \in \Gamma$ bilden eine Basis von $\mathcal{T}_\Gamma$.

(vi) $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ ist eine lokalkompakte, abelsche Gruppe.

Beweis

(i) Eine kurze Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\gamma)\gamma(x) = \int_G f(y)\gamma(-y)\,d\mu(y)\gamma(x) &= \int_G f(y)\gamma(x-y)\,d\mu(y) \\ = \int_G f_{-x}(y)\gamma(-y)\,d\mu(y) &= \hat{f}_{-x}(\gamma) \end{aligned}$$

.

Die Stetigkeit der rechten Seite für ein festes $f \in L^1(G)$ ergibt sich wie folgt: Sei $(x_0, \gamma_0) \in G \times \Gamma$, $\epsilon > 0$ beliebig. Gemäß Lemma 2.4 ist $x \mapsto f_x$ gleichmäßig stetig, insbesondere stetig. Also existiert eine Umgebung V von x_0, sodass

$$x \in V \Longrightarrow \|f_x - f_{x_0}\|_1 < \epsilon.$$

Gemäß Bemerkung 2.11 ist $\hat{g} : \Gamma \to \mathbb{C}$ für jedes $g \in L^1(G)$ stetig, also existiert eine Umgebung W von γ_0 mit

$$\gamma \in W \Longrightarrow |\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < \epsilon.$$

Schließlich folgt, da gemäß Lemma 2.12 $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

$$\begin{aligned} |\hat{f}_{x_0}(\gamma_0) - \hat{f}_x(\gamma)| &\leq |\hat{f}_{x_0}(\gamma_0) - \hat{f}_{x_0}(\gamma)| + |\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_x(\gamma)| \\ &\leq \epsilon + \|f_{x_0} - f_x\|_1 < 2\epsilon \quad \text{für } (x,\gamma) \in V \times W. \end{aligned}$$

Sei f nun so gewählt, dass $\hat{f}(\gamma_0) \neq 0$,[4] also kann man – da man im Zweifel W noch kleiner machen kann – oBdA annehmen dass $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ für $\gamma \in W$. Es folgt dann aus

$$\gamma(x) = \frac{\hat{f}_{-x}(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)}, \quad \gamma \in W, x \in G$$

und der Stetigkeit des Zählers und des Nenners der rechten Seite sowie der Stetigkeit von $(x,\gamma) \to (-x,\gamma)$, dass S bei (x_0,γ_0) stetig ist.

(ii) Da, wie in Bemerkung 2.11 erläutert, T_Γ die initiale Topologie bzgl. $(\hat{f})_{f \in L^1(G)}$ ist, ist die Stetigkeit von T äquivalent zu der von $\hat{f} \circ T$ für $f \in L^1(G)$. Diese folgt aus

$$\begin{aligned} (\hat{f} \circ T)(\gamma) = \hat{f}(\gamma \cdot \gamma_0) &= \int_G f(x)\gamma(-x)\gamma_0(-x)\, d\mu(x) = \\ \int_G (f \cdot \gamma_0^{-1})(x)\gamma(-x)\, d\mu(x) &= \widehat{f \cdot \gamma_0^{-1}}(\gamma) \end{aligned}$$

zusammen mit der Stetigkeit von $\widehat{f \cdot \gamma_0^{-1}}$. Dabei ist $f\gamma_0 \in L^1(G)$ wegen $\gamma_0 \in L^\infty(G)$. Da die Umkehrabbildung $\gamma \to \gamma \cdot \gamma_0^{-1}$ aus demselben Grund stetig ist, ist T Homöomorphismus.

(iii) Seien $K \subseteq G$ kompakt und $r > 0$ fest, $\gamma_0 \in N(K,r)$ beliebig. Für jedes $x \in K$ gibt es, da $\gamma_0(x) \in U_r$ und aufgrund der Stetigkeit von S offene Umgebungen V_x von x und W_x von γ_0, sodass

$$S(V_x \times W_x) \subseteq U_r$$

Wegen der Kompaktheit von K existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{x_k}$$

[4] Vgl. Bemerkung 2.11: $\hat{f}(\gamma_0) = \Phi_{\gamma_0}(f)$ und $\Phi_{\gamma_0} \neq 0$.

Definiert man nun

$$W_0 := \bigcap_{k=1}^{n} W_{x_k} \in \mathfrak{U}(\gamma_0),$$

so folgt für ein beliebiges $\gamma \in W_0$ und für jedes $x \in K$

$$(x,\gamma) \in V_{x_k} \times W_{x_k} \quad \text{für ein } k \leq n,$$
$$\text{wodurch } \gamma(x) \in S(V_{x_k} \times W_{x_k}) \subseteq U_r$$

und aufgrund der Definition von $N(K,r)$

$$\gamma \in N(K,r)$$

also insgesamt $W_0 \subseteq N(K,r)$. Da γ_0 beliebig gewählt wurde ist $N(K,r)$ offen.

(iv) Diesen Punkt beweist man völlig analog zum letzten.

(v) Zunächst ist die Familie von Mengen der Form ($f_1, \ldots, f_n \in C_K(G,\mathbb{C})$, $\epsilon > 0$, $\gamma_0 \in \Gamma$)

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{\gamma \in \Gamma \colon |\widehat{f}_k(\gamma_0) - \widehat{f}_k(\gamma)| < \epsilon\} \tag{7}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_\Gamma$. Um dies einzusehen, seien $O \in \mathcal{T}_\Gamma$, $\gamma_0 \in O$ beliebig. Dann gibt es offene Mengen $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{E}$ und $g_1, \ldots, g_n \in L^1(G)$ sodass

$$\gamma_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} \widehat{g_k}^{-1}(O_k) \subseteq O$$

Sei nun $\epsilon > 0$ so klein, dass

$$U_{3\epsilon}(\widehat{g_k}(\gamma_0)) \subseteq O_k \quad \text{für } k \leq n.$$

Dann ergibt sich

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{\gamma \in \Gamma \colon |\widehat{g_k}(\gamma_0) - \widehat{g_k}(\gamma)| < 3\epsilon\} = \bigcap_{k=1}^{n} \widehat{g_k}^{-1}(U_{3\epsilon}(\widehat{g_k}(\gamma_0))) \subseteq O.$$

Wählt man weiters – was aufgrund der Dichtheit von $C_K(G,\mathbb{C})$ in $L^1(G)$ möglich ist, vgl. Satz 2.3 – $f_1, \ldots, f_n \in C_K(G,\mathbb{C})$ mit

$$\|f_k - g_k\|_1 < \epsilon,$$

so folgt für jene $\gamma \in \Gamma$ mit $|\widehat{f}_k(\gamma) - \widehat{f}_k(\gamma_0)| < \epsilon$

$$
\begin{aligned}
|\widehat{g}_k(\gamma) - \widehat{g}_k(\gamma_0)| &\le |\widehat{g}_k(\gamma) - \widehat{f}_k(\gamma)| + |\widehat{f}_k(\gamma) - \widehat{f}_k(\gamma_0)| + |\widehat{f}_k(\gamma_0) - \widehat{g}_k(\gamma_0)| \\
&< \epsilon + 2\|\widehat{g}_k - \widehat{f}_k\|_\infty \le \epsilon + 2\|g_k - f_k\|_1 < 3\epsilon,
\end{aligned}
$$

woraus unmittelbar

$$
\bigcap_{k=1}^{n} \{\gamma \in \Gamma \colon |\widehat{f}_k(\gamma_0) - \widehat{f}_k(\gamma)| < \epsilon\} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \{\gamma \in \Gamma \colon |\widehat{g}_k(\gamma_0) - \widehat{g}_k(\gamma)| < 3\epsilon\} \subseteq O
$$

und damit die behauptete Basiseigenschaft folgt.

Sei zunächst $O \in \mathcal{T}_\Gamma$ mit $1 \in O$.[5] Es existieren also $f_1, \dots, f_n \in C_K(G, \mathbb{C})$ und $\epsilon > 0$, sodass

$$
\bigcap_{k=1}^{n} \{\gamma \in \Gamma \colon |\widehat{f}_k(1) - \widehat{f}_k(\gamma)| < \epsilon\}
$$

eine Teilmenge von O ist. Mit der Wahl

$$
K := -\bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{supp} f_k \qquad 0 < r < \epsilon \cdot (\max_{k=1\dots n} \|f_k\|_1)^{-1}
$$

ergibt sich für $\gamma \in N(K, r)$

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}_k(\gamma) - \widehat{f}_k(1)| &= \left| \int_{-K} f_k(x)(\gamma(-x) - 1)\, d\mu(x) \right| \le \\
\int_K |f_k(-x)| \cdot |(\gamma(x) - 1)|\, d\mu(x) &\le \int_K |f_k(-x)| r \, d\mu(x) \le r\|f_k\|_1 < \epsilon,
\end{aligned}
$$

wordurch

$$
N(K, r) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \{\gamma \in \Gamma \colon |\widehat{f}_k(\gamma_0) - \widehat{f}_k(\gamma)| < \epsilon\} \subseteq O.
$$

Sei nun ein allgemeines $O \in \mathcal{T}_\Gamma \setminus \{\emptyset\}$, $\gamma_0 \in O$ gegeben. Dann ist $1 \in \gamma_0^{-1} O$ gemäß (ii) offen, womit $N(K, r) \subseteq \gamma_0^{-1} O$ und damit $\gamma_0 \cdot N(K, r) \subseteq O$ für ein gewisses kompaktes $K \subseteq G$ und $r > 0$. Insbesondere ergibt sich daraus, dass die Familie $\{\gamma_0 N(K, r) \colon r > 0, K \subseteq G \quad \text{kompakt}\}$ eine Filterbasis des Umgebungsfilters von γ_0 ist.

[5] $1 \in \Gamma$ ist die Funktion $x \mapsto 1$ für $x \in G$.

(vi) Die Stetigkeit der Gruppenoperationen ist äquivalent zu der von $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1\gamma_2^{-1}$. Diese ist gemäß dem letzten Punkt bewiesen, wenn

$$\gamma_1 N(K, \frac{r}{2})(\gamma_2 N(K, \frac{r}{2}))^{-1} \subseteq \gamma_1\gamma_2^{-1} N(K, r)$$

gezeigt ist. Für $\gamma', \gamma'' \in N(K, \frac{r}{2})$ ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} |\gamma'(x)\gamma''(x)^{-1} - 1| & = & |\gamma''(x)^{-1}|\,|\gamma'(x) - \gamma''(x)| \leq \\ |\gamma'(x) - 1| + |1 - \gamma''(x)| & < & r,\, x \in K, \end{array}$$

womit laut Definition $\gamma'\gamma''^{-1} \in N(K, r)$ und in Folge

$$\gamma_1\gamma'(\gamma_2\gamma'')^{-1} \in \gamma_1\gamma_2^{-1} N(K, r)$$

gilt.

□

Satz 2.14 zeigt, dass $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ eine lokalkompakte, abelsche, topologische Gruppe ist, die gemäß 1.5 ein bis auf eine Konstante eindeutiges Haar'sches Maß μ_Γ besitzt.

3 Die Pontryagin-Dualität

Definition 3.1. Sei G eine abelsche Gruppe. Eine Funktion $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ heißt *positiv definit*, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ und $x_1, \ldots, x_N \in G$

$$\sum_{m,n=1}^{N} c_m \overline{c_n} \phi(x_m - x_n) \geq 0 \tag{8}$$

gilt.

Beispiel 3.2. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe. Für jedes reguläre Borelmaß ν auf $\mathcal{B}(\mathcal{T}_\Gamma)$ lässt sich eine stetige, positiv definite Funktion auf G angeben:

$$\phi(x) := \int_\Gamma \gamma(x)\, d\nu(\gamma) \tag{9}$$

Für die Stetigkeit dieser Funktion siehe [2], S. 19. Dass ϕ positiv definit ist folgt aus

$$\sum_{m,n=1}^{N} c_m\overline{c_n}\phi(x_m - x_n) = \sum_{m,n=1}^{N} c_m\overline{c_n}\int_\Gamma \gamma(x_m - x_n)\,d\nu(\gamma) =$$

$$\int_\Gamma \sum_{m,n=1}^{N} c_m\overline{c_n}\gamma(x_m)\overline{\gamma(x_n)}\,d\nu(\gamma) = \int_\Gamma \sum_{m=1}^{N} c_m\gamma(x_m)\overline{\sum_{n=1}^{N} c_n\gamma(x_n)}\,d\nu(\gamma) \geq 0$$

Ein weiteres Beispiel stetiger, positiv definiter Funktionen ist $g := f * \tilde{f}$, wenn $f \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$. Gemäß Lemma 2.6 ist g stetig. Die Definitheit folgt für $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ und $x_1, \ldots, x_N \in G$ aus

$$\sum_{m,n=1}^{N} c_m\overline{c_n}g(x_m - x_n) = \sum_{m,n=1}^{N} c_m\overline{c_n}\int_G f(x_m - x_n - y)\overline{f(-y)}\,d\mu(y) =$$

$$\sum_{m,n=1}^{N} c_m\overline{c_n}\int_G f(x_m - y)\overline{f(x_n - y)}\,d\mu(y) =$$

$$\int_G \sum_{m=1}^{N} c_m f(x_m - y)\overline{\sum_{n=1}^{N} c_n f(x_n - y)}\,d\mu(y) \geq 0$$

Der folgende Satz von Bochner liefert die Umkehrung der oben angestellten Beobachtung:

Satz 3.3. (ohne Beweis; vgl. [2], S. 19) Eine stetige Funktion $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ ist genau dann positiv definit, wenn ein reguläres Borelmaß ν auf $\mathcal{B}(\mathcal{T}_\Gamma)$ existiert, sodass (9) gilt.

Definition 3.4. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe. Wir definieren $B(G)$ als die Menge aller Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}$ darstellbar durch

$$f(x) = \int_\Gamma \gamma(x)\,d\nu(\gamma),$$

wobei ν ein reguläres, *komplexes* Borelmaß ist.[6] Man beachte, dass $B(G)$ gemäß

[6] Für einen Messraum $(X, \mathfrak{S})$ ist ein komplexes Maß ν als eine σ-additive Mengenfunktion $\nu\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{C}$ definiert. Ein Resultat aus der Maßtheorie besagt, dass dann

$$|\nu|(B) := \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(A_j)| \colon n \in \mathbb{N}, A_j \in \mathfrak{S}, B = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j\right\}$$

ein nichtnegatives Maß ist. ν heißt dann *regulär*, wenn $|\nu|$ im Sinne von Definition 1.4 regulär ist. Da für nichtnegative Maße $\nu = |\nu|$ gilt, ist das eine Verallgemeinerung des bekannten Begriffs.

3.3 die positiv definiten Funktionen umfasst, allerdings eine echte Obermenge ist.

Satz 3.5. (ohne Beweis; vgl. [2], S. 22) Ist $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, $f \in L_1(G) \cap B(G)$, so folgt $\hat{f} \in L_1(\Gamma)$. Das Haar'sche Maß auf $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ kann so normiert werden, dass für solche f gilt

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\gamma(x)\, d\mu_\Gamma(\gamma).$$

Mit Hilfe der Inversionsformel lässt sich nun folgendes Lemma zeigen, das für den Beweis der Pontryagin-Dualität wichtig ist. Insbesondere ergibt sich, dass die Dualgruppe Γ punktetrennend auf G operiert.

Lemma 3.6. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte abelsche Gruppe, dann gilt

(i) Die Mengen der Form $x + N(C, r)$ (definiert wie in Satz 2.14), wobei $x \in G$, $r > 0$ und $C \subseteq \Gamma$ kompakt ist, bilden eine Basis von $\mathcal{T}$.

(ii) Für $x, y \in G, x \neq y$ existiert ein $\gamma_0 \in \Gamma$ sodass $\gamma_0(x) \neq \gamma_0(y)$.

Beweis

(i) Sei $V \in \mathfrak{U}(e)$ beliebig. Dann existiert ein kompaktes $W \in \mathfrak{U}(e)$ sodass $W - W \subseteq V$.[7] Definiere nun

$$f := (\mu(W)^{-\frac{1}{2}})\mathbb{1}_W, \quad g := f * \tilde{f}.$$

Insbesondere gilt $g(0) = \displaystyle\int_G f(-x)\overline{f(-x)}\, d\mu(x) = \int_{-W} \mu(W)^{-1}\, d\mu(x) = 1$

Wegen $f \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$ ist g nach Lemma 2.6 stetig. Aus Lemma 2.12 (iii) folgt

$$\hat{g} = \hat{f}\hat{\tilde{f}} = \hat{f}\overline{\hat{f}} = |\hat{f}|^2 \geq 0,$$

wobei $\hat{\tilde{f}} = \overline{\hat{f}}$ im Beweis von Punkt (iv) desselben Lemmas gezeigt wurde. Desweiteren ist g gemäß Beispiel 3.2 g positiv definit. Mit dem Satz

[7] Für gegebenes $V \in \mathfrak{U}(e)$ sei U eine Umgebung von e mit $U - U \subseteq V$. Für jedes $Q \in \mathfrak{U}(e)$ gilt $\overline{Q} \subseteq Q + Q$, da für $x \in \overline{Q}$ die Menge $x - Q$ eine Umgebung ist und daher $Q \cap (x - Q) \neq \emptyset$ und deswegen existieren $q_1, q_2 \in Q$, sodass $q_1 = x - q_2$ also $x \in Q + Q$. Für ein geeignetes $Q \in \mathfrak{U}(e)$ folgt $\overline{Q} \subseteq Q + Q \subseteq U$. Definiert man $W := K \cap \overline{Q} \in \mathfrak{U}(e)$ mit einer kompakten Umgebung K des neutralen Elements, so ergibt sich $W - W \subseteq \overline{Q} - \overline{Q} \subseteq U - U \subseteq V$ und W ist kompakt.

von Bochner folgt daraus $g \in B(G)$. Daher ist die Inversionsformel auf g anwendbar und es gilt

$$\int_\Gamma \hat{g}(\gamma)\, d\mu_\Gamma(\gamma) = g(0) = 1.$$

Aufgrund der Dichtheit von $C_K(\Gamma, \mathbb{C})$ in $L^1(\Gamma)$ (vgl. Satz 2.3) existiert ein $f \in C_K(\Gamma, \mathbb{C})$ mit $\|f - \hat{g}\|_{L^1(\Gamma)} < \frac{1}{3}$. Es folgt mit $C := \operatorname{supp}(f)$ aus

$$\frac{1}{3} > \|f - \hat{g}\|_{L^1(\Gamma)} \geq \int_{\Gamma \setminus C} |f - \hat{g}|\, d\mu_\Gamma = \int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}\, d\mu_\Gamma$$

$$\text{dass } \int_C \hat{g}\, d\mu_\Gamma = 1 - \int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}\, d\mu_\Gamma > \frac{2}{3}.$$

Für ein $x \in N(C, \frac{1}{3})$ folgt

$$1 - \operatorname{Re}(\gamma(x)) \leq |\operatorname{Re}(1 - \gamma(x))| \leq |1 - \gamma(x)| < \frac{1}{3}$$

$$\text{und daher } \frac{2}{3} < \operatorname{Re}(\gamma(x)),\ \gamma \in C.$$

Das Inversionstheorem ergibt

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(g(x)) = \\ &\int_C \hat{g}(\gamma) \operatorname{Re}\gamma(x)\, d\mu_\Gamma(\gamma) + \int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma) \operatorname{Re}\gamma(x)\, d\mu_\Gamma(\gamma) \geq \\ &\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \int_{\Gamma \setminus C} |\hat{g}(\gamma) \operatorname{Re}\gamma(x)|\, d\mu_\Gamma(\gamma) \geq \\ &\frac{4}{9} - \int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma)|\gamma(x)|\, d\mu_\Gamma(\gamma) \geq \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $g(x) \neq 0$ und damit

$$N(C, \frac{1}{3}) \subseteq \operatorname{supp}(g) \subseteq W - W \subseteq V.$$

Also bilden die Mengen $N(C, r)$ eine Umgebungsbasis des neutralen Elements und damit ihre Translate eine Basis von $\mathcal{T}$.

(ii) Für $x \in G \setminus \{e\}$ sei $\gamma(x) = 1$ für jeden Charakter $\gamma \in \Gamma$ angenommen. Wähle $V \in \mathfrak{U}(e)$ mit $x \notin V$. Das in (i) konstruierte g erfüllt $g(0) = 1$ und verschwindet außerhalb von V. Es folgt der Widerspruch

$$0 = g(x) = \int_\Gamma \hat{g}(\gamma)\gamma(x)\, d\mu_\Gamma(\gamma) = \int_\Gamma \hat{g}(\gamma)\, d\mu_\Gamma(\gamma) = g(0) = 1$$

Für beliebige $x \neq y \in G$ existiert wegen $x - y \neq 0$ ein $\gamma_0 \in \Gamma$ mit $\gamma_0(x)\gamma_0(y)^{-1} = \gamma_0(x-y) \neq 1$, woraus die Behauptung folgt.

□

Mit einigen Resultaten, von denen vorallem das letztzitierte umfangreiche Vorarbeit benötigt, die an dieser Stelle nicht möglich ist, lässt sich nun das Pontryagin-Dualitätstheorem beweisen:

Lemma 3.7. (ohne Beweis; vgl. [2], S. 17) Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe und $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ ihre Dualgruppe, $\nu\colon \mathcal{B}(\mathcal{T}_\Gamma) \to \mathbb{C}$ ein komplexes, reguläres Borel-Maß und es gelte

$$\int_\Gamma \gamma(x)\, d\nu(\gamma) = 0,\ x \in G.$$

Dann gilt bereits $\nu = 0$.

Lemma 3.8. Sei $(X, \mathfrak{S}, \nu)$ ein Maßraum mit nichtnegativem ν und $f \in L^1(X, \mathfrak{S}, \nu, \mathbb{C})$. Durch

$$\sigma(A) := \int_A f\, d\nu =$$
$$\int_A (\operatorname{Re} f)^+\, d\nu - \int_A (\operatorname{Re} f)^-\, d\nu + i\int_A (\operatorname{Im} f)^+\, d\nu - i\int_A (\operatorname{Im} f)^-\, d\nu$$

ist ein komplexes Maß definiert (da die rechte Seite eine Linearkombination aus endlichen Maßen ist). Gilt $\sigma = 0$, so muss schon $f = 0$ ν-fast überall gelten.

Beweis Gemäß [1], S. 135 gilt für $A \in \mathfrak{S}$

$$|\sigma|(A) = \int_A |f|\, d\nu.$$

Aus $\sigma = 0$ folgt $|\sigma| = 0$ und insbesondere $\int_X |f|\, d\nu = 0$. Also muss schon $f = 0$ ν-fast überall gelten. □

Lemma 3.9. (ohne Beweis; vgl. [2], S. 27) Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe mit Dualgruppe Γ, $\emptyset \neq E \subseteq \Gamma$ offen. Dann gibt es ein $f \in L^1(G)$, sodass $\hat{f} \neq 0$ mit $\hat{f}(\gamma) = 0$ für $\gamma \notin E$.

Satz 3.10. (Pontryagin Dualitätstheorem, vgl. [2], S. 28f) Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte, abelsche Gruppe, $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ ihre Dualgruppe und $(\hat{G}, \hat{\mathcal{T}})$ deren Dualgruppe. Dann ist die Abbildung

$$\Psi\colon \begin{cases} G \to \hat{G} \\ x \mapsto \psi_x \end{cases}$$
$$\text{mit } \psi_x(\gamma) := \gamma(x) \text{ für } \gamma \in \Gamma$$

ein Gruppenisomorphismus und ein Homöomorphismus.

Beweis Der Beiweis wird in folgenden Schritten geführt:

(i) Ψ ist ein injektiver Homomorphismus.

(ii) Ψ ist ein Homöomorphismus auf das Bild $(\Psi(G), \hat{\mathcal{T}}|_{\Psi(G)})$.

(iii) $\Psi(G)$ ist abgeschlossen in $\hat{G}$.

(iv) $\Psi(G)$ ist dicht in $\hat{G}$.

(v) $(G, \mathcal{T})$ und $(\hat{G}, \hat{\mathcal{T}})$ sind homöomorph und isomorph.

Punkt (i) ergibt sich aus

$$\psi_{x+y}(\gamma) = \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y) = \psi_x(\gamma)\psi_y(\gamma) \Rightarrow \psi_{x+y} = \psi_x\psi_y$$

Da gemäß Lemma 3.6 Γ punktetrennend agiert, gibt es zu $x \neq y \in G$ ein γ_0, sodass $\gamma_0(x) \neq \gamma_0(y)$ und damit $\psi_x(\gamma_0) \neq \psi_y(\gamma_0)$, also $\psi_x \neq \psi_y$.

(ii) Gemäß Satz 2.14 (v) und Lemma 3.6 bilden die Mengen

$$N(C, r) := \{x \in G\colon |1 - \gamma(x)| < r \quad \forall \gamma \in C\}$$
$$\hat{N}(C, r) := \{\hat{x} \in \hat{G}\colon |1 - \hat{x}(\gamma)| < r \quad \forall \gamma \in C\}$$

wobei $C \subseteq \Gamma$ kompakt, $r > 0$ eine Umgebungsbasis des neutralen Elements in G bzw. $\hat{G}$. Da Homomorphismen zwischen topologischen Gruppen stetig sind, wenn sie beim neutralen Element stetig sind, reicht es, letztere Eigenschaft für Ψ und Ψ^{-1} zu überprüfen. Es gilt

$$\Psi(N(C, r)) = \{\psi_x \in \hat{G}\colon |1 - \gamma(x)| < r \quad \forall \gamma \in C\} =$$
$$\{\psi_x \in \hat{G}\colon |1 - \psi_x(\gamma)| < r \quad \forall \gamma \in C\} = \hat{N}(C, r) \cap \Psi(G).$$

Da die Mengen der rechten Seite eine Umgebunsbasis des neutralen Elements in $(\Psi(G), \hat{\mathcal{T}}|_{\Psi(G)})$ bilden, ist sowohl Ψ als auch Ψ^{-1} stetig.

(iii) Sei $\hat{x} \in \overline{\Psi(G)}$ und wähle ein dagegen konvergentes Netz $(\hat{x}_i)_{i\in I}$ aus $\Psi(G)$. Da $(\hat{x}_i)_{i\in I}$ konvergent ist, gibt es zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(e)$ einen Index $i_0 \in I$, ab dem $\hat{x}_i - \hat{x}_j \in U$ für $i, j \succeq i_0$ gilt[8]. Um das einzusehen sei V eine Umgebung des neutralen Elements mit der Eigenschaft $V - V \subseteq U$. Dann gilt ab einem i_0, dass $\hat{x}_i \in V + \hat{x}$, woraus $\hat{x}_i - \hat{x}_j \in V - V \subseteq U$ für $i, j \succeq i_0$ folgt. Es gilt daher für entsprechende i, j sogar $\hat{x}_i - \hat{x}_j \in U \cap \Psi(G) \in \mathfrak{U}_{\Psi(G)}(e)$. Sei nun $U \in \mathfrak{U}(e)$ sodass $U \cap \Psi(G)$ kompakt ist (U existiert, da $(\Psi(G), \hat{\mathcal{T}}|_{\Psi(G)})$ lokalkompakt ist). Dann gilt $x_i \in x_{i_0} + U \cap \Psi(G)$ für $i \succeq i_0$. Aufgrund der Kompaktheit hat das Netz $(\hat{x}_i)_{i\in I, i\succeq i_0}$ ein in $x_{i_0} + U \cap \Psi(G)$ konvergentes Teilnetz $(\hat{x}_{i(j)})_{j\in J})$ und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss gelten $\hat{x}_{i(j)} \longrightarrow \hat{x} \in U \cap \Psi(G) \subseteq \Psi(G)$, also $\overline{\Psi(G)} = \Psi(G)$.

(iv) Angenommen $\Psi(G)$ wäre nicht dicht in $\hat{G}$, d.h. das Komplement enthält eine nichtleere, offene Menge $E \subseteq \hat{G}$. Gemäß Lemma 3.9 existiert ein $F \in L^1(\Gamma)$ sodass $\hat{F} \neq 0$ und $\hat{F}$ außerhalb von E verschwindet. Definiert man ein komplexes Maß ν auf $\mathcal{B}(\mathcal{T}_\Gamma)$ gemäß $\nu(B) := \int_B F \, d\mu_\Gamma$ so folgt wegen $\Psi(G) \subseteq E^C$

$$\int_\Gamma \gamma(-x) \, d\nu(\gamma) = \int_\Gamma F(\gamma)\gamma(-x) \, d\mu_\Gamma = \int_\Gamma F(\gamma)\psi_x(-\gamma) \, d\mu_\Gamma = \hat{F}(\psi_x) = 0$$

für alle $x \in G$. Also muss nach Lemma 3.7 ν bereits das 0-Maß sein. Mit Lemma 3.8 folgt $F = 0$ μ_Γ-fast überall, und damit $\hat{F} \equiv 0$, im Widerspruch zur Wahl von F.

(v) Die Punkte (iii) und (iv) ergeben $\Psi(G) = \hat{G}$. Damit ist Ψ wegen (i) ein Isomorphismus und wegen (ii) ein Homöomorphismus nach $\hat{G}$.

□

Literatur

[1] Donald L. Cohn. *Measure theory.* Birkhäuser Boston Inc., 1993.

[2] Walter Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience Publishers, New York, London, 1962.

[3] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

[4] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[8] Das bedeutet $(\hat{x}_i)_{i\in I}$ ist ein Cauchynetz bezüglich der von der Gruppe induzierten Uniformität.