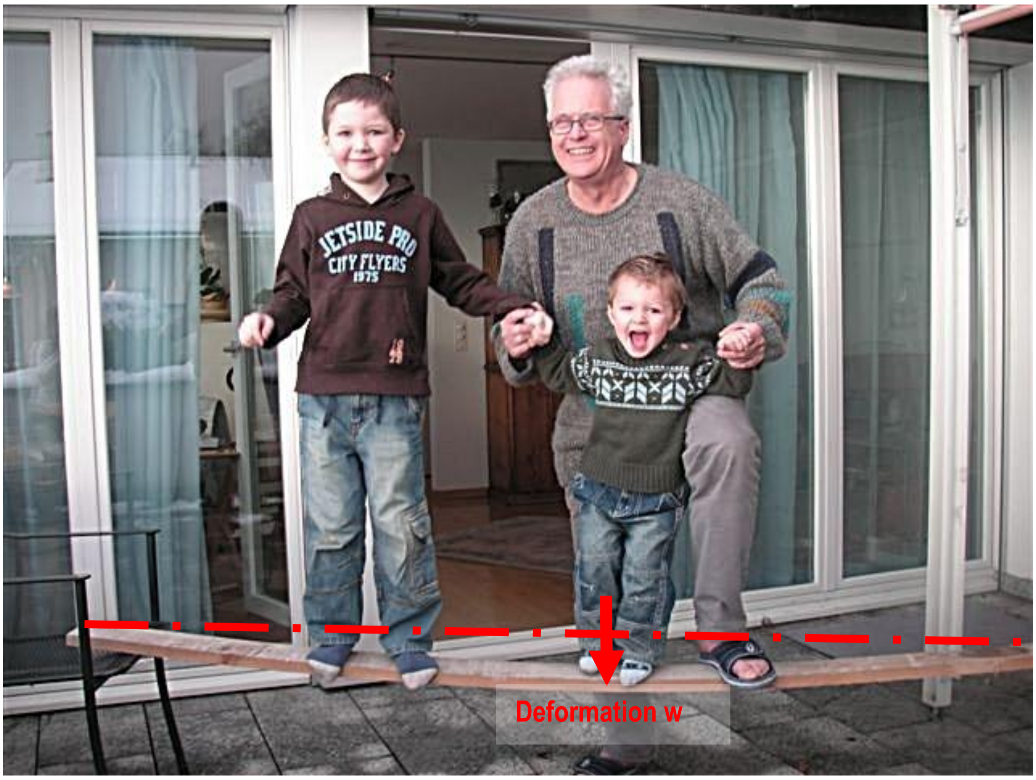
S T A T I K / F E S T I G K E I T S L E H R E

9) BERECHNUNG VON DURCHBIEGUNGEN

1) Die Biegelinie

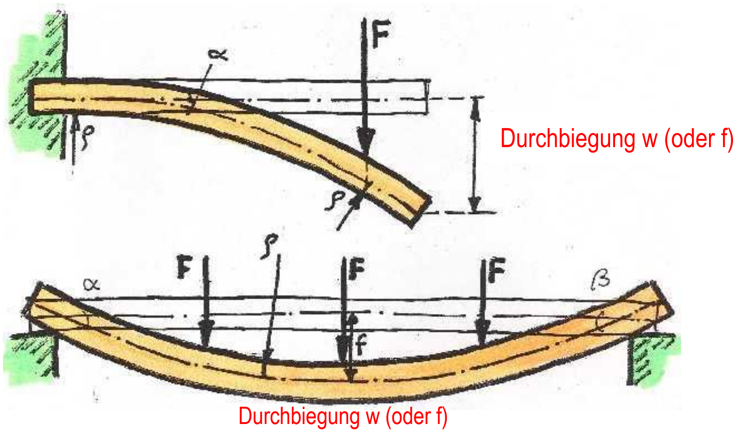
2) Berechnungen von Durchbiegungen und Winkeländerungen

3) Zulässige Durchbiegung - Gebrauchstauglichkeit



g.bettschen

1) Die Biegelinie

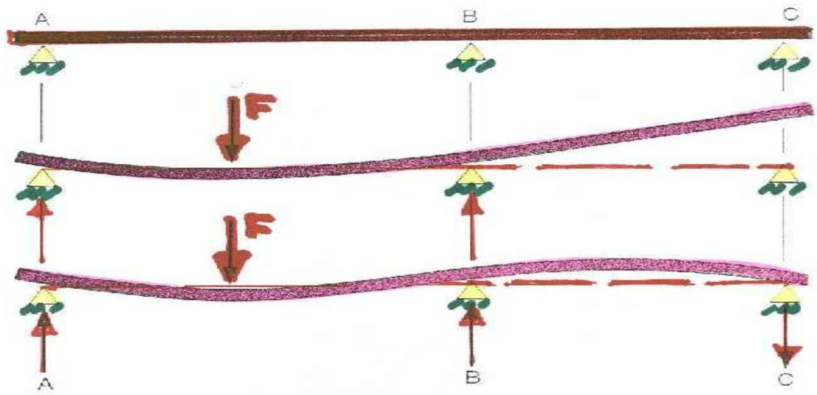


Bei Biegung treten Formänderungen auf, die aus **Winkeländerungen α und β** und **Durchbiegungen w (oder früher f)** der Stabachse bestehen. Diese Formänderungen hängen von der Krümmung der Biegelinie ab; also jener Linie, die die anfänglich gerade Stabachse eines Trägers unter der Belastung annimmt.
Bei grösser werdendem Biegemoment wird auch die Krümmung grösser, und entsprechend der dazugehörige Krümmungsradius ρ kleiner. Beim einfachen Balken auf zwei Stützen wird das Biegemoment bei den Auflagern gleich Null, die Krümmung ist hier ebenfalls gleich Null, während der Krümmungsradius unendlich gross wird.
Als Mass für die Krümmung gilt deshalb der umgekehrte Wert des Krümmungsradius:

$$\text{Krümmung} = 1 / \rho \ (1/\text{mm})$$

Die Biegelinie hängt auch von den Querkräften ab, weil ihr Einfluss aber so klein ist, wird er meistens, wie auch hier, vernachlässigt.

Beispiel: Deformationen (Durchbiegungen) beim Balken auf drei Stützen



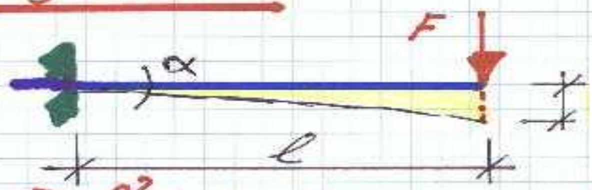
Balken ohne Verankerung in C

Balken mit Verankerung in C

2) Berechnungen von Durchbiegungen und Winkeländerungen

Auf Ableitungen zur Berechnung von Durchbiegungen beim Träger wird im Rahmen dieses Kurses verzichtet. Deshalb werden hier im Folgenden nur die wichtigsten Formeln aufgeführt:

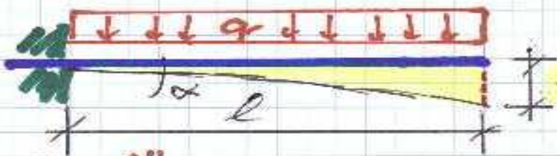
Kragarm



Duchbiegung w (oder f)
Beim Kragarm mit Einzellast am Balkenende

$$\alpha = \frac{F \cdot \ell^2}{E \cdot I} \quad \text{(im Bogenmass)}$$

$$w = \frac{M \cdot \ell^2}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

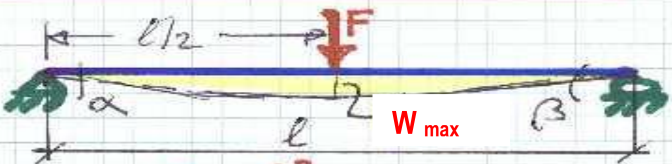


Duchbiegung w (oder f)
Beim Kragarm mit Streckenlast

$$\alpha = \frac{q \cdot \ell^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

$$w = \frac{M \cdot \ell^2}{4 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot \ell^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

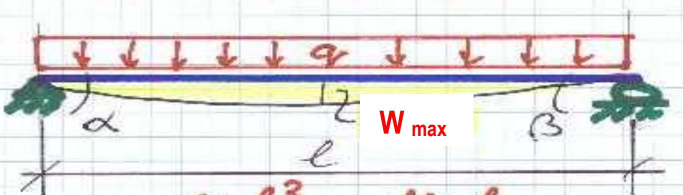
Einfacher Balken



Duchbiegung w (oder f)
Beim einfachen Balken mit Einzellast

$$\alpha = \beta = \frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$W_{max} = \frac{M \cdot \ell^2}{12 \cdot E \cdot I} = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I}$$



Duchbiegung w (oder f)
Beim einfachen Balken mit Streckenlast

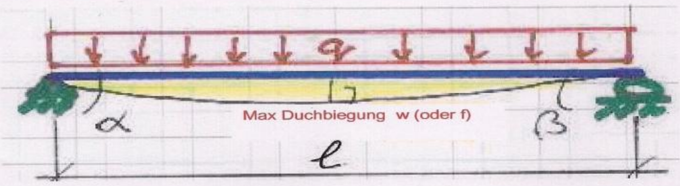
$$\alpha = \beta = \frac{q \cdot \ell^3}{24 \cdot E \cdot I} = \frac{M \cdot \ell}{3 \cdot E \cdot I} \quad (M = M_{max})$$

$$W_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot \ell^4}{E \cdot I} = \frac{M \cdot \ell^2}{9.6 \cdot E \cdot I}$$

Achtung: Bei allen Berechnungen auf richtige Einheiten und Zahlengrössen achten

Beispiel:

Berechnungen der maximalen Durchbiegung
Beim einfachen Balken mit Streckenlast



$$\boxed{w_{max} = \frac{M \cdot \ell^2}{9{,}6 \cdot E \cdot I}}$$

Biegemomente M siehe Kapitel 6

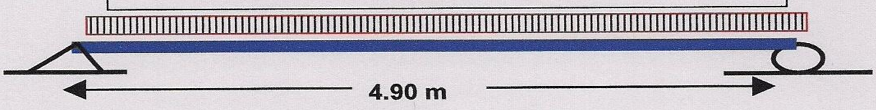
$$M = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$$

E : siehe Kap. 8 (Elastizitätsmodul)

I : siehe Kap. 7 (Trägheitsmoment)

Durchbiegung eines Stahlträgers HEA 160

Die Lastenberechnung ergibt folgende gleichmässig verteilte Last :
Ständige Last g_k = 2 kN/m' und Nutzlast q_k = 4 kN/m'



Stahlträger HEA 160, Material S235 Träger hochkant
Eigengewicht Träger vernachlässigen!

Ausschnitt aus Stahltabelle SZS:

HEA	m kg/m	A mm²	A_v mm²	A_w mm²	I_y mm⁴ x 10⁶	W_{ely} mm³ x 10³	$\overline{W}_y$ mm³ x 10³	W_{ply} mm³ x 10³	i_y mm	I_z mm⁴ x 10⁶	W_{elz} mm³ x 10³	W_{plz} mm³ x 10³	i_z mm	$K = I_x$ mm⁴ x 10⁶
		Statische Werte / Valeurs statiques												
100*	16,7	2120	756	440	3,49	72,8	79	83,0	40,6	1,34	26,8	41,2	25,1	0,0520
120*	19,9	2530	846	530	6,06	106	114	119	48,9	2,31	38,5	58,9	30,2	0,0596
140*	24,7	3140	1012	685	10,3	155	166	173	57,3	3,89	55,6	84,8	35,2	0,0803
160*	30,4	3880	1321	858	16,7	220	234	245	65,7	6,16	76,9	118	39,8	0,118
180*	35,5	4530	1447	969	25,1	294	311	∘325	74,5	9,25	103	∘157	45,2	0,147
200*	42,3	5380	1808	1170	36,9	389	410	∘429	82,8	13,4	134	∘204	49,8	0,204

Deformation ohne Sicherheitsfaktoren rechnen!

$\ell = 4{,}9 \cdot 10^3\ mm$

$(g+q)d = 2{,}0 + 4{,}0 = 6{,}0\ kN/m'$

$M_{od} = \frac{q_d \cdot \ell^2}{8} = \frac{6 \cdot 4{,}9^2}{8} = 18\ kN \cdot m$

$= 18 \cdot 10^6\ N \cdot mm$

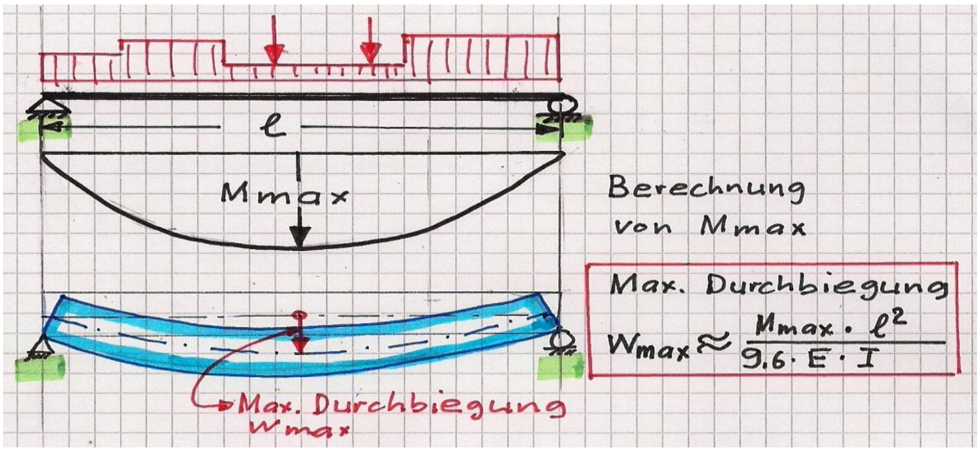
$E = 210000\ N/mm^2 = 210 \cdot 10^3\ N/mm^2$

HEA 160 : $I_y = 16{,}7 \cdot 10^6\ mm^4$ (Tabelle)

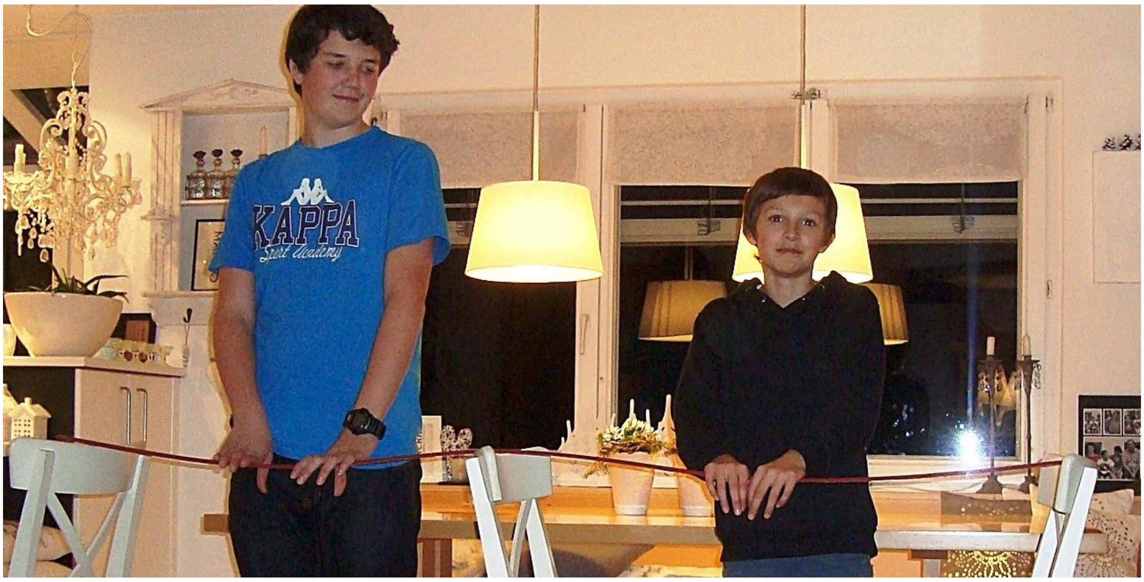
Durchbiegung $w = \frac{M \cdot \ell^2}{9{,}6 \cdot E \cdot I}$ $\boxed{\left[\frac{\cancel{N} \cdot \cancel{mm} \cdot \cancel{mm} \cdot \cancel{mm} \cdot \cancel{mm}^2}{\cancel{N} \cdot \cancel{mm}^4}\right] = mm}$

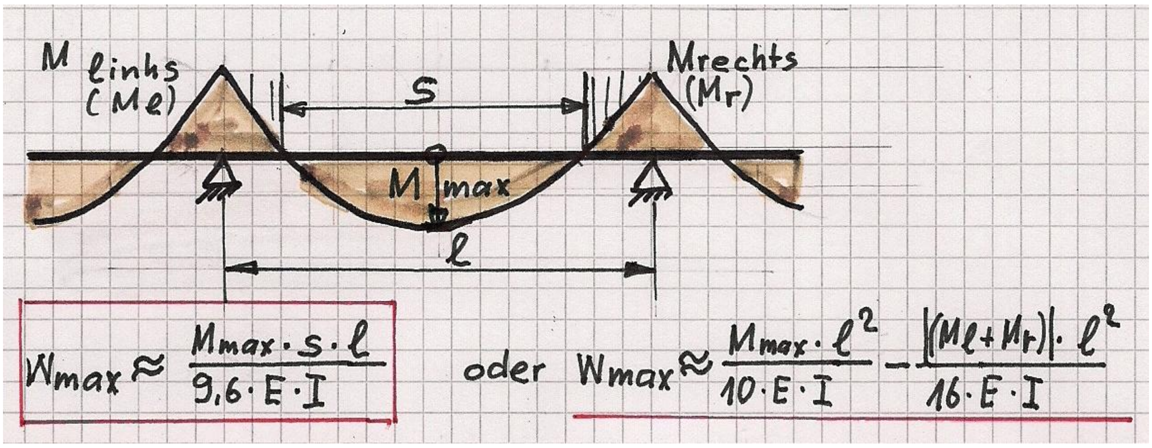
$\underline{\underline{w}} = \frac{18 \cdot \cancel{10^6} \cdot 4{,}9 \cdot 10^3 \cdot 4{,}9 \cdot 10^3}{9{,}6 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 16{,}7 \cdot \cancel{10^6}} = \underline{\underline{12{,}8\ mm}}$

Näherungsberechnungen für Durchbiegungen
bei unregelmässiger Belastung



Näherungsberechnungen für Durchbiegungen
bei Mehrfeldträgern





3) Zulässige Durchbiegung - Gebrauchstauglichkeit

In der SIA-Norn 260 'Grundlagen der Projektierung von Tragwerken' ist in Ziff. 4.4.4 das Vorgehen beim Nachweis der Gebrauchstauglichkeit beschrieben.

Die Gebrauchstauglichkeit gilt als nachgewiesen, wenn folgendes Bemessungskriterium erfüllt ist:

$$E_d \leq C_d$$

Der Bemessungswert Ed der massgebenden Auswirkung wird meist mit dem **Sicherheitsfaktor 1.0** gerechnet. Für andauernde und vorübergehende Bemessungssituationen können diese Faktoren für Nutzlasten noch reduziert werden.

Wir beschränken uns aber hier aber auf den Fall:

→ **alle Lasten und Schnittkräfte werden ohne Lastfaktoren gerechnet!**

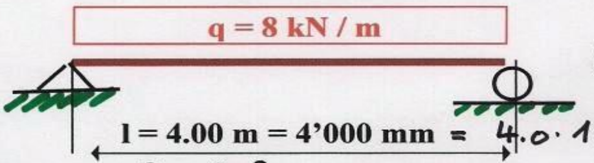
Der Bemessungswert Cd ist die zugehörige Gebrauchsgrenze.
Im Anhang a) der Norm SIA 260 sind in Tabelle 3 Richtwerte für die Durchbiegung von Decken und Balken aufgeführt.
Wir vergleichen hier alle gerechneten Durchbiegungen w_d mit folgendem meist verwendeten zulässigen Wert

$$w_d \leq l / 350$$

Beispiel:
Einfacher Balken aus Bauholz C24,
Querschnitt 160/260 mm

$I_y = 234 \cdot 10^6\ mm^4$ **(Berechnung** $\frac{160 \cdot 260^3}{12}$ **oder Tabelle)**

$E = 11'000\ N/mm^2$ **(aus Norm bzw. Script Kap. 8, Seite 9)**



$$M_o = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$$

l = 4.00 m = 4'000 mm = $4.0 \cdot 10^3$ mm

$$M_d = \frac{8.0 \cdot 4.0^2}{8} = 16.0\ kN \cdot m = 16.0 \cdot 10^6\ N \cdot mm$$

(für Durchbiegungsberechnungen immer ohne Sicherheitsfaktoren rechnen !!!!!!!!!)

$$W_d = \frac{M_d \cdot \ell^2}{9.6 \cdot E \cdot I_y} \quad \left[\frac{N \cdot mm \cdot mm \cdot mm}{N/mm^2 \cdot mm^4} = \frac{\cancel{N} \cdot mm^5}{mm^4} = mm\right]$$

$$W_d = \frac{16.0 \cdot \cancel{10^6} \cdot 4.0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 4.0 \cdot 10^3}{9.6 \cdot 11 \cdot \cancel{10^3} \cdot 234 \cdot \cancel{10^6}} = 10.4\ mm$$

oder mit $E = 11'000\ N/mm^2 = 0.011 \cdot 10^6\ N/mm^2$

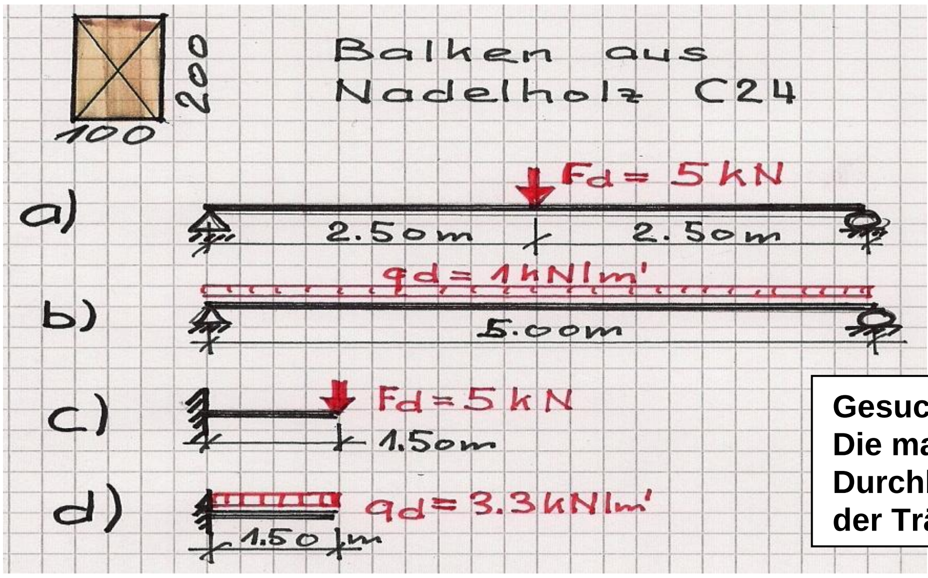
$$W_d = \frac{16 \cdot \cancel{10^6} \cdot 4.0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 4.0 \cdot \cancel{10^3}}{9.6 \cdot 0.011 \cdot \cancel{10^6} \cdot 234 \cdot \cancel{10^6}} = \frac{16 \cdot 4.0^2}{9.6 \cdot 0.011 \cdot 234} = 10.4\ mm$$

wd zulässig = l / 350 = 4'000 / 350 = 11 mm

w_d **= 10.4 mm < 11 mm → o.k.**

W_d = 10.4 mm ist kleiner als die zulässige Durchbiegung 11 mm → also o.k.

Übungsaufgaben zu Durchbiegungsberechnungen



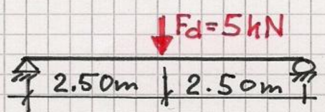
Gesucht:
Die maximalen Durchbiegungen w_d der Träger a) bis d)

Lösungen:

Lösung Beispiel a)

Bauholz C24 100/200mm, $I_y = 66.7 \cdot 10^6\ mm^4$

$E = 11'000\ N/mm^2$



$$M_{od} = \frac{F_d \cdot \ell}{4} = 6.25\ kN \cdot m$$

$$\underline{\underline{w_d}} = \frac{M_d \cdot \ell^2}{12 \cdot E \cdot I_y} = \frac{6.25 \cdot \cancel{10^6} \cdot 5.0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 5.0 \cdot \cancel{10^3}}{12 \cdot 0.011 \cdot \cancel{10^6} \cdot 66.7 \cdot \cancel{10^6}} = \underline{\underline{18\ mm}}$$

oder:

$$\underline{\underline{w_d}} = \frac{F_d \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_y} = \frac{5.0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 5.0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 5.0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 5 \cdot \cancel{10^3}}{48 \cdot 0.011 \cdot \cancel{10^6} \cdot 66.7 \cdot \cancel{10^6}} = \underline{\underline{18\ mm}}$$

($E = 11'000\ N/mm^2 = 0.011 \cdot 10^6\ N/mm^2$, $\ell = 5.0\ m = 5'000\ mm = 5 \cdot 10^3\ mm$)

$F_d = 5'000\ N = 5 \cdot 10^3\ N$

Fortsetzung Lösungen:

b) 1 kN/m', 5.0 m

$M_{0d} = \frac{q \cdot \ell^2}{8} = 3.13 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$w_d = \frac{M_d \cdot \ell^2}{9.6 \cdot E \cdot I_y} = \frac{3.13 \cdot 10^6 \cdot 5.0 \cdot 10^3 \cdot 5.0 \cdot 10^3}{9.6 \cdot 0.011 \cdot 10^6 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 11 \text{ mm}$

oder

$w_d = \frac{5 \cdot q_d \cdot \ell^4}{384 \cdot E \cdot I_y} = \frac{5 \cdot 1.0 \cdot 5.0 \cdot 10^3 \cdot 5.0 \cdot 10^3 \cdot 5.0 \cdot 10^3 \cdot 5.0 \cdot 10^3}{384 \cdot 0.011 \cdot 10^6 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 11 \text{ mm}$

c) 5 kN, 1,50 m

$M_{Ad} = -5.0 \cdot 1.5 = -7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$w_d = \frac{M_d \cdot \ell^2}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{7.5 \cdot 10^6 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3}{3 \cdot 0.011 \cdot 10^6 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 8 \text{ mm}$

oder

$w_d = \frac{F_d \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I_y} = \frac{5.0 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3}{3 \cdot 0.011 \cdot 10^6 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 8 \text{ mm}$

d) 3.3 kN/m', 1,5 m

$M_{Ad} = \frac{q_d \cdot \ell^2}{2} = \frac{3.3 \cdot 1.5^2}{2} = 3.71 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$w_d = \frac{M_d \cdot \ell^2}{4 \cdot E \cdot I_y} = \frac{3.71 \cdot 10^6 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3}{4 \cdot 0.011 \cdot 10^6 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 3 \text{ mm}$

oder

$w_d = \frac{q_d \cdot \ell^4}{8 \cdot E \cdot I_y} = \frac{3.3 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3}{8 \cdot 0.011 \cdot 10^6 \cdot 66.7 \cdot 10^6} = 3 \text{ mm}$

1 kN/m' = 1'000 N/m = 1 N/mm'