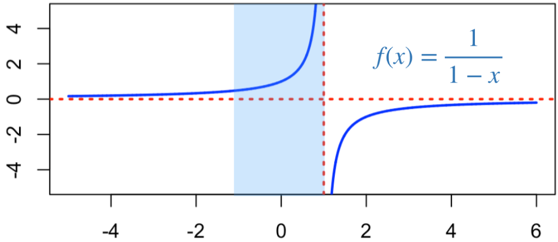
6.7 Potenzreihen

Geometrische Reihe

- Wir hatten gesehen, dass das Konvergenzverhalten der **geometrischen Reihe** ($\sum_{n=0}^{\infty} x^n$) von x abhängt.
- für $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

- rechte Seite: Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$; linke Seite: Wert der unendlichen Reihe, nur für $|x| < 1$ definiert
- Gleichung (1) gilt also nur im Intervall $(-1, 1)$



Potenzreihen

Definition:

Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der Form:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)$$

mit (a_n) einer reellen Folge und $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

- die a_n sind die **Koeffizienten** der Reihe
- der Wert x_0 ist der **Entwicklungspunkt** der Potenzreihe

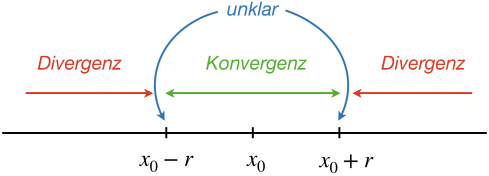
Beispiel: geometrische Reihe ist eine Potenzreihe mit $(a_n) = 1$ und $x_0 = 0$

Konvergenzbereich / Konvergenzradius

- Das Konvergenzverhalten der Potenzreihe hängt von den Werten von x ab
- Die Menge aller Werte x, für die die Potenzreihe konvergiert nennt man **Konvergenzbereich**.
- Der Konvergenzbereich läßt sich schreiben als:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

  wobei $r \in \mathbb{R}$ der **Konvergenzradius** ist.
- $|x - x_0| > r$: Divergenz
- $|x - x_0| = r$: Potenzreihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.



Bestimmung des Konvergenzbereichs

- Quotientenkriteriums: Potenzreihe konvergiert (absolut), wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| < 1 \tag{2}$$

- Annahme: Folge (a_n) hat die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$
- Daher aus (2):

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{=q}|x-x_0| < 1 \iff |x-x_0| < \frac{1}{q}$$

- Konvergenzradius $r = \frac{1}{q}$
- ist $q = 0$ so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $r = \infty$: Konvergenz für alle x
- Das Quotientenkriterium liefert eine **hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung!**

Beispiel 1: Quotientenkriterium

Potenzreihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n\right)$; Konvergenzradius?

- hier ist $a_n = \frac{1}{n}$ und der Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-1)^{n+1}}{a_n(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1}(x-1) \right| = |x-1|$$

- daher konvergiert die Reihe für $|x-1| < 1$ und der Konvergenzradius ist $r = 1$.
- Was passiert an den Rändern $\{0, 2\}$?
  - $x = 0$: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\right)$: alternierende harmonische Reihe: **konvergiert**!
  - $x = 2$: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$: harmonische Reihe: **divergiert**!

Beispiel 2: Wurzelkriterium

Potenzreihe $(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n)$; Konvergenzradius?

- hier ist $a_n = 2^n$ und der Entwicklungspunkt $x_0 = 1$
- Wurzelkriterium: Potenzreihe konvergiert (absolut), wenn:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n (x-1)^n|} = 2|x-1| < 1$$

- daher konvergiert die Reihe für $|x-1| < \frac{1}{2}$ und der Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{2}$.
- Was passiert an den Rändern $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$?
  - $x = \frac{1}{2}$: $(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n)$: alternierende Reihe: **divergiert**!
  - $x = \frac{3}{2}$: $(\sum_{n=0}^{\infty} 1)$: **divergiert**!

Potenzreihe als Funktion

- Innerhalb des Konvergenzbereiches definiert die Potenzreihe eine Funktion

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < r : f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Diese Funktion ist innerhalb des Konvergenzbereiches **stetig**.
- D.h. :

$$\lim_{x \to \tilde{x}} f(x) = \lim_{x \to \tilde{x}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lim_{x \to \tilde{x}} x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n = f(\tilde{x})$$

Weitere Eigenschaften der Funktion

- **Summe von Potenzreihen:**
  Potenzreihen $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)$ und $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n)$ mit Konvergenzradius a und b, dann gilt:

  $$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)(x-x_0)^n$$

  für $|x - x_0| < \min(a, b)$
- Bemerkungen:
  - der Konvergenzradius der neuen Reihe ist also **der kleinere der beiden Konvergenzradii**!
  - der Entwicklungspunkt beider Potenzreihen muß identisch sein!

Beispiel von Summe von Potenzreihe

- Wir betrachten die Funktionen $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$.
- Beide Potenzreihen haben Konvergenzradius $r = 1$
- Was ist die Potenzreihe von $g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x^2}$?
- Für $|x| < 1$ gilt

$$g(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{=1+x+x^2+x^3+\ldots} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}}_{=1+x^2+x^4+\ldots}$$

daher

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 2 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Weitere Eigenschaften der Funktion

- **Produkt von Potenzreihen:**
  Potenzreihen $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)$ und $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n)$ mit Konvergenzradius a und b, dann gilt:

  $$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

  mit

  $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

  für $|x-x_0| < \min(a,b)$
- Bemerkungen:
  - der Konvergenzradius der neuen Reihe ist also **der kleinere der beiden Konvergenzradii**!
  - der Entwicklungspunkt beider Potenzreihen muß identisch sein!

Verständnisfragen 6.7

- Kann der Konvergenzbereich einer Potenzreihe auch die Nullmenge sein?
- Welche dieser Mengen können den Konvergenzbereich einer Potenzreihe darstellen:

$$(-2,2) \quad (0,\infty) \quad \{-1\} \quad [1,3] \quad \mathbb{R}$$

  Überlegen Sie, was der Konvergenzradius und der Entwicklungspunkt sein könnten.
- Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x - x_0)^{2n+1}\right)$$