

Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung (TMW)

Stichworte: Massenträgheitsmoment, Winkelbeschleunigung

1. Versuchsziel

Bei diesem Versuch sollen Sie eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung untersuchen. Der vorliegende Versuchsaufbau ermöglicht es, den Zusammenhang zwischen Drehmoment \vec{M} und der Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ an einem Körper mit veränderbarem Massenträgheitsmoment J zu untersuchen. Für verschiedene Drehmomente wird die Winkelbeschleunigung einer Hantel gemessen, indem man die Zeit für eine definierte Anzahl von Umdrehungen stoppt. Durch graphische Auftragung wird die Linearität des Zusammenhangs verifiziert und aus der mittels linearer Regression ermittelten Steigung das Trägheitsmoment der Hantel errechnet. Der Versuch wird für Hanteln mit verschiedenen Abständen zwischen den Massen wiederholt. Wiederum durch graphische Auftragung wird verifiziert, dass das Trägheitsmoment wie von der Theorie gefordert vom Abstand der Massen abhängt.

2. Grundlagen

Das Verhalten eines Körpers bei Translationsbewegungen ist durch die Masse m bestimmt und es gilt das Newtonsche Trägheitsgesetz:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \vec{F} : \text{beschleunigende Kraft} \\ \vec{a} : \text{Translationsbeschleunigung.} \end{array} \quad (1)$$

Das Verhalten eines Körpers bei einer Drehbewegung ist nicht nur von der Masse, sondern auch von ihrer Verteilung bezüglich der Drehachse abhängig. Das Verhalten wird daher durch das Massenträgheitsmoment des Körpers bestimmt. Hier gilt das Newtonsche Gesetz für Drehbewegungen:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \vec{M} : \text{Drehmoment} \\ \vec{\alpha} : \text{Winkelbeschleunigung} \\ J : \text{Massenträgheitsmoment} \end{array} \quad (2)$$

Das Massenträgheitsmoment ist ein Maß dafür, wie sehr ein Körper sich dagegen "wehrt", in Drehung versetzt zu werden – in Analogie zur Masse, die ein Maß für den Widerstand ist, den ein Körper einer geradlinigen Beschleunigung entgegenstellt. Anders als die Masse, die für einen Körper einen eindeutigen Wert hat, hängt das Trägheitsmoment von der gewählten Drehachse ab. Es gilt:

$$J = \int_{\text{Masse}} r^2 dm \quad \text{mit } r: \text{Abstand des Massenelements } dm \text{ von der Drehachse.} \quad (3)$$

Zeit-Winkel-Gesetz

Die *Winkelgeschwindigkeit* gibt an, um wie viel sich der im Bogenmaß gemessene Winkel in einer bestimmten Zeitspanne ändert. Wenn sich das betrachtete Objekt immer gleich schnell dreht, so kann man sich eine beliebige Zeitspanne Δt herausgreifen und den überstrichenen Winkel messen, um ein Maß für die Drehgeschwindigkeit zu definieren, welches man Winkelgeschwindigkeit ω nennt:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi n}{\Delta t} \quad \text{mit } n: \text{ Anzahl der Umdrehungen.} \quad (4)$$

Bei diesem Versuch geht es um Drehungen, die mit der Zeit immer schneller werden. Die einfachste Form, in der das geschieht, liegt vor, wenn in gleichen Zeitspannen die Winkelgeschwindigkeit immer um den gleichen Wert zunimmt. Eine solche Bewegung heißt *gleichmäßig beschleunigt*. Die Rate, mit der sich die Winkelgeschwindigkeit ändert, ist die *Winkelbeschleunigung* α :

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (5)$$

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung wächst der zurückgelegte Winkel mit der Zeit gemäß:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (6)$$

Durch Messung des Winkels in Abhängigkeit von der Zeit kann dieser Zusammenhang nachgeprüft werden.

Zweite Newtonsche Gesetz für Drehbewegungen

Das Trägheitsmoment ist die Proportionalitätskonstante zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung. Durch die an der Masse angreifende Gewichtskraft F wird die Bewegung des Systems veranlasst. Es wird das Drehmoment erzeugt, durch das das System die Winkelbeschleunigung α erfährt. Es gilt:

$$r \cdot F = J \cdot \alpha \quad (7)$$

Die Winkelbeschleunigung erhält man aus der für n Umdrehungen benötigten Zeit t .

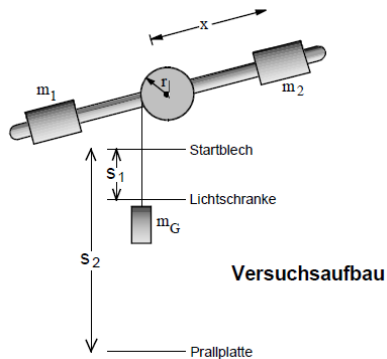
Diese Formel gilt eigentlich nur, so lange die Hantel stillsteht. Wenn die Zugmasse sich nach unten bewegt, wird ein Teil der an ihr angreifenden Gewichtskraft verwendet, um die Zugmasse selbst zu beschleunigen, und nur der Rest erzeugt ein Drehmoment auf die Achse. Man kann zeigen, dass der Aufbau so beschleunigt wird, als ob man mit mg am Seil zöge und die Zugmasse im Abstand r von der Achse auf der Hantel säße. Die dadurch bewirkte zusätzliche Trägheit ist klein gegenüber derjenigen der viel weiter außen sitzenden und schwereren Messingstücke, und wir wollen sie vernachlässigen.

Abhängigkeit Trägheitsmoment vom Abstand der Hantelmassen

Das Verhalten eines Körpers bei einer Drehbewegung ist nicht nur von der Masse, sondern auch von ihrer Verteilung bezüglich der Drehachse abhängig. Das Verhalten wird daher durch das Massenträgheitsmoment des Körpers bestimmt. Das Massenträgheitsmoment eines Systems bestehend aus einer Stange und Massestücke setzt sich zusammen aus den Teilen:

$$J_{\text{System}} = J_{\text{Scheibe-Stange}} + J_{\text{Massenstücke}} \quad . \quad (8)$$

3. Versuchsaufbau



Der Versuchsaufbau besteht aus einem drehbar gelagerten System, das sich im Wesentlichen aus einer Aluminiumscheibe (Fadenscheibe) mit einer Nute zur Aufnahme des Zugfadens und einer Stange mit verschiebbaren Massestücken m_1 und m_2 zusammensetzt. Ein definiertes Drehmoment entsteht durch die Gewichtskraft eines Massenstückes m_G , die tangential an der Fadenscheibe angreift. Wird die Arretierung der Scheibe gelöst, so wird die Masse m_G konstant beschleunigt, während der Zugfaden von der Fadenscheibe abrollt. Gleichzeitig setzt sich das drehbar gelagerte System mit konstanter Winkelbeschleunigung in Bewegung. Durch die Messung der Zeit t für n Umdrehungen kann die Beschleunigung bzw. die Winkelbeschleunigung bestimmt werden.

4. Aufgabenstellung

Alle Zeiten in diesem Versuch sind zur Verbesserung der Genauigkeit 10 Mal zu messen.

Der Versuch besteht aus drei Teilen:

a. Winkel-Zeit-Gesetz

Untersuchen Sie das Winkel-Zeit-Gesetz, indem Sie bei kleinem Drehmoment die Zeit für $n = 1, 2, 3, \dots$ Umdrehungen messen und n als Funktion von t auftragen.

b. Zweite Newtonsche Gesetz für Drehbewegungen

Messen Sie dazu für verschiedene Drehmomente die Winkelbeschleunigung, indem Sie die Zeit für eine definierte Anzahl von Umdrehungen stoppen.

Beachten Sie: Führen Sie die Versuche durch, indem Sie den Abstand der Massenstücke beibehalten und jeweils den anderen Scheibenradius auswählen.

c. Abhängigkeit Trägheitsmoment vom Abstand der Hantelmassen

Messen Sie dazu die Winkelbeschleunigung für verschiedene Masseabstände, indem Sie die Zeit für eine definierte Anzahl von Umdrehungen stoppen.

Beachten Sie: Wenn Sie vor dem Versuchsaufbau stehen, werden Sie sehen, dass r_1 und r_2 nicht gut mit hoher Genauigkeit zu messen sind, da die Mitte der Drehachse nicht angezeichnet ist. Der

Abstand d der Massen voneinander ist hingegen leicht zu messen. Außerdem sollen Sie die Hantel immer ausbalancieren, so dass $r_1 = r_2$.

5. Auswertung

a. Winkel-Zeit-Gesetz

Stellen Sie mit Ihren Messdaten das Winkel-Zeit-Gesetz dar, indem Sie n als Funktion von t auftragen (mit Fehlerrechnung für t).

b. Zweite Newtonsche Gesetz für Drehbewegungen

Tragen Sie die Winkelbeschleunigung als Funktion des Drehmoments auf.

Zeichnen Sie Unsicherheitskreuze an die Messpunkte.

Legen Sie eine Regressionsgerade durch die Messpunkte und geben Sie an, ob die Punkte mit der Geraden verträglich sind.

c. Abhängigkeit Trägheitsmoment vom Abstand der Hantelmassen

Tragen Sie $1/\alpha$ gegen das Abstandsquadrat auf und versehen Sie die Messpunkte mit Unsicherheitskreuzen.

Legen Sie eine Regressionsgerade hindurch und geben Sie an, ob die Punkte mit der Geraden verträglich sind.

Beachten Sie: Im Praktikumsaufbau entsteht kein nennenswerter Fehler, wenn man die beiden Messingstücke als Punktmassen betrachtet.

Literatur:

Joos (Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig)

Dobrinski / Krakau / Vogel : *Physik für Ingenieure*, B. G. Teubner-Verlag Stuttgart