PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 37 (51), 1985, pp. 65–71

# QUASI-FASTREKURRENTE UND SEMIQUASI-REKURRENTE BEWEGUNGEN DYNAMISCHER SYSTEME

**Ch. Djaja**

Es sei $R$ ein metrischer Raum mit dem Abstand $\rho$, $I$ die Menge der reellen Zahlen ($I^+$ die Menge der nichtnegativen und $I^-$ die Menge der nichtpositiven Zahlen), $f$ die Abbildung des topologischen Produktes $R \times I$ auf $R$, $(R, I, f)$ ein dymanisches System und $f(p,t)$ ($p$ =cons.), wobei $p \in R$, $t \in I$ ist, die Bewegung dieses Systems, deren positive (bzw. negative) Halbtrajetorie mit $f(p, I^+)$ (bzw. mit $f(p, I^{-1})$) und die ganze Trajektorie mit $f(p, I)$ bezeichnet werden.

In dieser Abhandlung wird der Begriff der semiquasi-rekurrenten Bewegung $f(p,t)$ dynamisches Systems in einem metrischen Raume definiert. Er wird auf dem Begriff der sogenannten quasi-gleichmässigen Approximation der Halbtrajektorie $f(p, I^+)$ (bzw. $f(p, I^-)$) gegründet. Weither werden einige Sätze, bezüglich auf dieses, bewiesen (S. [**2**]).

*Definition* 1. Eine Bewegung $f(p,t)$ heisst *positiv semiquasi-rekurrent* (weiterhin schreiben wir kurz $SQR^+$), wenn die Halbtrajektorie $f(p, I^+)$ selbst oder die Halbtrajektorie $f(p, I^-)$ quasi-gleichmässig approximiert, d. h. wenn

$$f(p, I^+) \subseteq S\left[f\left(p; L + K\binom{n}{2},\ L + K\binom{n+1}{2}\right), \varepsilon\right] \tag{1}$$

order

$$f(p, I^-) \subseteq S\left[f\left(p; L + K\binom{n}{2},\ L + K\binom{n+1}{2}\right), \varepsilon\right] \tag{2}$$

wobei $L \geq 0$, $K > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ , sind.

*Definition* 1*a*. Eine Bewegung $f(p,t)$ heisst *negativ semiquasi-rekurrent* ($SQR^-$), wenn die Halbtrajektorie $f(p, I^-)$ selbst oder die Halbtrajektorie $f(p, I^+)$ quasi-gleichmässig approximiert, d. h.

$$f(p, I^-) \subseteq \left[f\left(p; L + K\binom{n}{2},\ L + K\binom{n+1}{2}\right), \varepsilon\right] \tag{3}$$

---

*AMS Subject Classification* (1980): Primary 34 C 28.

order

$$f(p, I^+) \subseteq S\left[f\left(p; L + K\binom{n}{2},\ \ L + K\binom{n+1}{2}\right), \varepsilon\right] \tag{4}$$

ist, wobei $L \leq,\ K < 0,\ n = 1, 2, 3, \dots$ , sind.

Nach Definition 3 in [**7**, S. 339], um eine Bewgung $f(p, t)$ positiv quasi-rekurrent zu sein, ist es notwending und hinreichend, dass die Bezichungen (1) und (2) gleichzeitig erfüllt werden. Auch gilt das für die negativ quasi-rekurrente Bewegung.

*Bemerkung* 1. Für diese Behauptung ist es nicht unbedingt nötig , dass die Zahlen $L$ und $K$ in (1) und (2) (ozw. in (3) und (4)) gleich seien. Wenn, zum Beispiel, in (1) und (2) $L_1 \neq L_2$ und $K_1 \neq K_2$ sind, so lassen sich, nach Lemma 2 in [**3** S. 31], die Zahlen $L \geq 0$ und $K > 0$ finden derart, dass sich zwischen je zwei Gliedern der Folge $\left\{L + K\binom{n}{2}\right\}$ wenigstens ein Element der Folgen $\left\{L_i + K_i\binom{n}{2}\right\}$ $(i = 1, 2)$ befindet. Mit anderen Worten kann man setzen, dass die Zahlen $L$ und $K$ in (1) und (2) einzig sind. Es ist offenbar, dass das Zeichen $\subseteq$ unveränderlich bleibt.

In weiterem werden wir hauptsächlich über die positiv quasi-rekurrenten $QR^+$) Bewegungen und die positiven Halbtrajektorie reden, denn die Definitionen und die Sätze für die $QR^-$ Bewegungen und die negativen Halbtrajektorien ergeben sich auf ähnliche Weise.

Satz 1. *Wemm eine Bewegung $f(p, t)$ positiv quasi-fastrekurrent und positiv stabil im Sinne von Lagrange ist, so ist sie positiv semiquasi-rekurrent.*

*Beweis.* Nehmen wir beliebige Zahl $\varepsilon > 0$. Mit Rücksicht auf Definition der positiv quasi-fastrekurrenten (in weiterem $QFR^+$) Bewegung, [**4** S. 41] lassen sich zu diesem $\varepsilon$ die Zahlen $L_0(\varepsilon/2) \geq 0$ und $K_0(\varepsilon/2) > 0$ finden, die eine quasi-relativ dichte (in weiterem $QRD$) Menge $\{\tau_n\}$ auf $I^+$ (S. [**2**]), mit

$$L_0 + K_0\binom{n}{2} \leq \tau_n \leq L_0 + K_0\binom{n+1}{2}, \ \ (n = 1, 2, \dots),$$

bilden derart, dass

$$\rho[p, f(p, \tau_n)] < \varepsilon/2, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ist. Nach dem Satze 1 in [**4** S. 42], wenn $f(p, t)$ eine $QFR^+$ Bewegung ist, so ist zu jedem Punkte $p_\alpha \in f(p, I^+)$ die Bewegung $f(p_\alpha, t)$ auch quasi-fastrekurrent. Danach, zu schon genommenen $\varepsilon > 0$ existieren die Zahlen $L^\alpha(\varepsilon/2) \geq 0$, und $K^\alpha(\varepsilon/2) > 0$, die die $QRD$ Mengen $\{\tau_n^\alpha\}$ auf $I^+$, mit

$$L^\alpha + K^\alpha\binom{n}{2} \leq \tau_n^\alpha \leq L^\alpha + K^\alpha\binom{n+1}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

bilden derart, dass

$$\rho[p_\alpha, f(p_\alpha, \tau_n^\alpha)] < \varepsilon/2, \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{5}$$

ist. Wegen der Stabilität im Sinne von Lagrange ($L^+$- Stabilität) ist die Menge $\overline{f(p, I^+)}$ kompakt in sich. Dann können wir in ihr das endliche $\varepsilon/2$ Netz aufstellen derart, dass zu jedem $\alpha$ ein $i (i = 1, 2, \dots, k)$ existiert so, dass

$$\rho(p_\alpha, p_i) < \varepsilon/2 \tag{6}$$

ist, wobei $p_i \in f(p, I^+)$ ist, und

$$\rho[p_i, f(p_i, \tau_n^i)] < \varepsilon/2, \quad (i = 1, 2, \dots, k; \ n = 1, 2, \dots) \tag{7}$$

sind. Hier ist $L^i \geq 0, \ K^i > 0$ und

$$L^i + K^i \binom{n}{2} \leq \tau_n^i \leq L^i + K^i \binom{n+1}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k; \ n = 1, 2, \dots).$$

Mit Rücksicht auf die Tatsache, dass $p_i = f(p, t_i), \ (t_i > 0), \ p_i \in f(p, I^+)$ ist, so bekommt man aus (7)

$$\rho[p_i, f(p, t_i + \tau_n^i)] < \varepsilon/2, \quad (i = 1, 2 \dots, k; \ n = 1, 2 \dots), \tag{8}$$

wobei

$$t_i + L^i + K^i \binom{n}{2} \leq \tau_n^i + t_i \leq t_i + L^i + K^i \binom{n+1}{2} \tag{9}$$
$$(i = 1, 2, \dots, k; \ \ n = 1, 2, \dots).$$

Die Mengen $\{t_i + \tau_n^i\} \equiv A_i, \ (i = 1, 2, \cdots, k)$ sind $QRD$ auf $I^+$ und nach der Lemma 2. in [**3**, S. 31], lassen sich zwei Zahlen $L \geq 0$ und $K > 0$ derart finden, dass zwischen je zwei Gliedern der Folge $\left\{L + K\binom{n}{2}\right\}$ sich wenigstens ein Element jeder Menge $A_i (i = 1, 2, \dots, k)$ befindet. Dann erhält man aus (9)

$$L + K \binom{n}{2} \leq t_i + \tau_n^i \leq L + K \binom{n+1}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k; \ \ n = 1, 2, \dots)$$

und aus (8)

$$\rho \left[ p_i, f \left( p; L + K \binom{n}{2}, \ \ L + K \binom{n+1}{k} \right) \right] < \varepsilon/2 \tag{10}$$

Aus (6) und (10) folgt

$$\rho \left[ p_\alpha, f \left( p; L + K \binom{n}{2}, \ \ L + K \binom{n+1}{2} \right) \right] \leq \rho(p_\alpha, p_i) +$$
$$+ \rho \left[ p_i, f \left( p; L + K \binom{n}{2}, \ \ L + K \binom{n+1}{k} \right) \right] < \varepsilon.$$

Weil die Ungleicheit (11) für jeden Punkt $p_\alpha \in f(p, I^+)$ gilt, können wir schreiben

$$f(p, I^+) \subseteq S \left[ f \left( p; L + K \binom{n}{2}, \ \ L + K \binom{n+1}{2} \right), \varepsilon \right], \quad (n = 1, 2, \dots),$$

wobei $L \geq 0$ und $K > 0$ ist. Nach Definition 1, ist die Bewegung $f(p,t)$ positiv semiquasi-rekurrent. Damit ist der Satz bewiesen.

Auf dieselbe Weise kann man den Satz für die negative Semiquasi-rekurrenz beweisen:

Ist die Bewegung $f(p,t)\, QFR^-$ und $L^-$-stabil, so ist sie negativ semi-quasi-rekurrent.

*Bemerkung* 2. Nach diesem Satze, approximiert gleichmässig (s. [**2**] selbst die positive (bzw. negative) Halbtrajetkorie $f(p,I^+)$ (bzw. $f(p,I^-)$).

Satz 2. *Wenn solche quasi-relativ dichte Menge $\{\tau_n\}$ auf $I^+$ existiert, dass $lim_{n\to\infty} f(p,\tau_n) = q$ ist, dann gilt zur Bewegung $f(q,t)$ folgendes:* $\lim_{n\to\infty} f(q,t_n) = q$, *wobei $\{t_n\}$ eine relativ dichte Menge auf $I^+$ ist, die gegen Unendlichkeit strebt, wenn $n \to \infty$. Mit anderen Worten, $q$ ist $\psi$-Grenzpunkt der Bewegung $f(q,t)$* [**6**, S. 103].

*Beweis*. Sei $\{\tau_n\}$ eine $QRD$ Menge auf $I^+$ mit

$$L + K\binom{n}{2} \leq \tau_n \leq L + K\binom{n+1}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{12}$$

wobei $L \geq 0$, $K > 0$. Dann ist

$$L + K\binom{n+1}{2} \leq \tau_{n+1} \leq L + K\binom{n+2}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{13}$$

Nach Subtrahieren der Ungleichheit (12) von (13) bekommt man

$$K\left[\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2}\right] \leq \tau_{n+1} - \tau_n \leq K\left[\binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2}\right], \ (n = 1, 2, \dots)$$

Wenn wir setzen: $\tau_n = \tau_{n+1} - \tau_n$, so wird $Kn \leq t_n \leq K(n+1)$, $(n = 1, 2, \dots)$ sein.

Die Folge $\{t_n\}$ ist auf $I^+$ relativ dicht und unbegrenzt und dann kann man aus ihr eine Teilfolge $\{t_n\}$ auswählen, die aut $I^+$ relativ dicht ist und die gegen Unendlichkeit konvergiert, wenn $k \to \infty$, d. h. $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = \infty$. Anderseits ist, nach der Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} f(p, t_n + \tau_n) = \lim_{n\to\infty} f(p, \tau_{n+1}) = q.$$

Aber, die Folge $\{f(p, t_{n_k} + \tau_n)\}$ ist die Teilfolge der konvergierten Folge $\{f(p, t_n + \tau_n)\}$ und so konvergiert sie auch und hat denselben Limes $q$. Nun können wir schreiben

$$q = \lim_{n\to\infty} f(p, t_{n_k} + \tau_n) = \lim_{n\to\infty} f[f(p,\tau_n), t_{n_k}].$$

Wenn wir an der rechten Seite $t_{n_k}$ fixieren, bekommen wir

$$q = \lim_{n\to\infty} f[f(p,\tau_n), t_{n_k}] = \lim_{n\to\infty} f(q, t_{n_k}),$$

was man beweisen sollte.

Satz 3. *Ist $f(p,t)$ positiv quasi-fastrekurrente Bewegung $(QFR^+)$ mit einer quasi-relativ dichten menge $\{\tau_n\}$ auf $I^+$, unabhängier vom Punkte $p$, so ist sie positiv quasi-fastperiodische Bewegung* [**5**, S. 15].

*Beweis.* Nach dem Satze 1. in [**4** S. 42], wenn $f(p,t)$ $QFR^+$ Bewgung ist, dann ist zu jedem Punkte $q = f(p,t_0) \in \overline{f(p,I)}\, f(q,t)$ $QFR^+$ Bewegung, aber mit $QRD$ Menge $\{\tau_n\}$ auf $I^+$, die vom Punkte $q$ abhängt. Aber, da die Menge, nach der Voraussetzung, $\{\tau_n\}$ vom Punkte $q$ nicht abhängt, so ist zu jedem $\varepsilon > 0$, $\rho[q, f(q,\tau_n)] < \varepsilon$, wobei $q = f(p,t_0)$, und weither $\rho[f(p,t_0), f(p,t_0+\tau_n)] < \varepsilon$ für jedes $t_0 \in I$. Das zeigt, dass $f(p,t)$ positiv quasi-fastperiodiche Bewegung ist.

Satz 4. *Sei $R$ ein lokalkompakter Raum und besitze $f(p,I^+)$ zu einem $\varepsilon > 0$ endliches $\varepsilon$-Netz. Wenn die Bewegung $f(p,t)$ nicht stabil im Sinne von Lagrange (L-stabil) ist, dann ist die Menge der $\varphi_p$-Grenzpunkte $\Phi_p$ leer.*

*Beweis.* Setzen wir umgekehrt voraus: existiere ein Punkt $q \in \Phi_p$. Dann lassen sich eine $\varepsilon$-Umgebung $U$ des Punktes $q$, deren abgeschlossene Hülle kompakt in sich ist, und die Zahlen $L \geq 0$, $K > 0$, die eine $QRD$ Menge $\{\tau_n\}$ auf $I^+$ mit

$$L + K\binom{n}{2} \leq \tau_n \leq L + K\binom{n+1}{2} \tag{14}$$

bilden, finden derart, dass

$$f\left(p; \left[L + K\binom{n}{2},\ L + K\binom{n+1}{2}\right]\right) \bigcap U \neq \varnothing, \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{15}$$

ist, bzw. nach der Beziehung (14) existieren die Zahlen $\tau_n (n = 1, 2, \dots)$ derart, dass auf Grund der Lemma 1 in [**3**, S. 30], $f(p,\tau_n) \in U(q,\varepsilon)$, $(n = 1, 2, \dots)$. ist. Wenn wir $L = t_\alpha + L_\alpha$, wobei $t_\alpha \geq 0$ beliebiges ist, setzen, kann man (15) schreiben

$$f\left(f(p,t_\alpha); \left[L_\alpha + K\binom{n}{2},\ L + K\binom{n+1}{2}\right]\right) \bigcap U \neq \varnothing.$$

Bezeichnen wir $f(p,t_\alpha) = p_\alpha$, $(p_\alpha \in f(p,I^+))$, so wird

$$f\left(p_\alpha; \left[L_\alpha + K\binom{n}{2},\ L_\alpha + K\binom{n+1}{2}\right]\right) \cap U \neq \varnothing, \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{16}$$

sein. Fixieren wir ein $n \in N$. Aus (16) folgt, dass ein

$$\tau_n \in \left[L_\alpha + K\binom{n}{2},\ L_\alpha + K\binom{n+1}{2}\right]$$

existiert derart, dass $f(p_\alpha, \tau_n^\alpha) \in U(q,\varepsilon)$ ist, und dann

$$p_\alpha \in f(U, -\tau_n^\alpha) \subset f\left(U; \left[-L_\alpha - K\binom{n+1}{2},\ -L_\alpha - K\binom{n}{2}\right]\right).$$

Da ein endliches $\varepsilon$–Netz auf $f(p,I^+)$ : $p_1, p_2, \dots, p_k$ existiert, gibt es zu jedem $p \in f(p,I^+)$ ein $p_k$ derart, dass

$$\rho(p_\alpha, p_k) < \varepsilon \tag{17}$$

ist und nach (16)

$$f\left(p_k; \left[L_k + K\binom{n}{2},\ L_k + K\binom{n+1}{2}\right]\right) \bigcap U \neq \varnothing. \tag{18}$$

Auf Grund der Lemma 2 in [**3**, S. 31] lassen sich zu den Zahlen $L_k$ und $K(k = 1,2,\dots,k)$ die einzingen Zahlen $L_0$ und $K_0$ finden derart, dass sich zwischen je zwei Gliedern der Folge $\left\{L_0 + K_0\binom{n}{2}\right\}$ wenigstens einer der Gliedern der Folgen $\{\tau_n^k\}$ mit $\left\{L_k + K\binom{n}{2}\right\}(k = 1,2,\dots,k; n = 1,2,\dots)$ befindet. Dann wird erst recht

$$f\left(p_k; \left[L_0 + K_0\binom{n}{2},\ L_0 + K_0\binom{n+1}{2}\right]\right) \bigcap U \neq \varnothing$$

sein. Das bedeutet existiere ein $\tau_n^0$ mit

$$L_0 + K_0\binom{n}{2} \leq \tau_n^0 \leq L_0 + K_0\binom{n+1}{2}$$

so, dass

$$f(p_k, \tau_n^0) \in U, \ \ (k = 1,2,\dots,k;\ \ n = 1,2,\dots) \tag{19}$$

ist. Für schon bestimmtes $n \in N$ ergibt sich aus (19)

$$p_k \in f(U, -\tau_n^0), \ \ (k = 1,2,\dots k),$$

d. h.

$$p_k \in f\left(U; \left[-L_0 - K_0\binom{n+1}{2},\ -L_0 - K_0\binom{n}{2}\right]\right). \tag{20}$$

Mit Rücksicht auf (17) und (20) ergibt sich weiter für jeden Punkt $p_\alpha \in f(p,I^+)$

$$\begin{aligned} p_\alpha \in S\Big\{ f\left(U; \left[-L_0 - K_0\binom{n+1}{2},\ -L_0 - K_0\binom{n}{2}\right]\right), \varepsilon\Big\} \subseteq \\ \subseteq \overline{S}\Big\{ f\left(\overline{U}; \left[-L_0 - K_0\binom{n+1}{2},\ -L_0 - K_0\binom{n}{2}\right]\right), \varepsilon\Big\}. \end{aligned}$$

Da der Punkt $p_\alpha \in f(p,I^+)$ beliebig ausgewählt wurde, so wird

$$\overline{f(p,I^+)} \subseteq \overline{S}\Big\{ f\left(\overline{U}; \left[-L_0 - K_0\binom{n+1}{2},\ -L_0 - K_0\binom{n}{2}\right]\right), \varepsilon\Big\}.$$

Aber, die Menge $\overline{S}\Big\{ f\left(\overline{U}; \left[-L_0 - K_0\binom{n+1}{2},\ -L_0 - K_0\binom{n}{2}\right]\right), \varepsilon\Big\}$ ist kompakt in sich und ist auch $\overline{f(p, I^+)}$ kompakt und damit ist $L^+$-stabil, was der Voraussetzung im Satze widerspricht. Der Satz ist bewiesen.

## LITERATUR


[1] V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, New Jersey, 1960, pp. 307–420.

[2] Ch. Djaja, *Quasigleichmässige Approximation und Bewegungen stabil im Sinne von Lagrange*, Math. Balkanica **4.29** (1974), 173–177.

[3] Ch. Djaja, *Kvaziuniformna aproksimacija i svojstva kretanja u dinamičkim graničnim skupovima*, Math. Vesnik **12** (**27**) (1975), 29–40.

[4] Ch. Djaja, *Kvazi-skoro rekurentna kretanja i trajektorije dinamičkih sistema*, Mat. Vesnik **12** (**27**) (1975), 41–45.

[5] Ch. Djaja, *Kvazi-skoro periodična kretanja dinamičkih sistema u metričkim prostorima*, Mat. Vesnik **3** (**16**) (1979), 15–21.

[6] К. С. Сибирский, *Введение в топологическую динамику*, Акад. наук Молдав. ССР Кишинэв, 1970.

[7] Ch. Djaja, *Kvazi-rekurentna kretanja dinamičkih sistema u metričkim prostorima*, Mat. Vesnik **2** (**15**)(**30**) (1978), 339–349.



Poljoprivredni fakultet
Beogradski univerzitet
11080 Zemun
Yugoslavia


(Eingegangen den 30 12 1983)