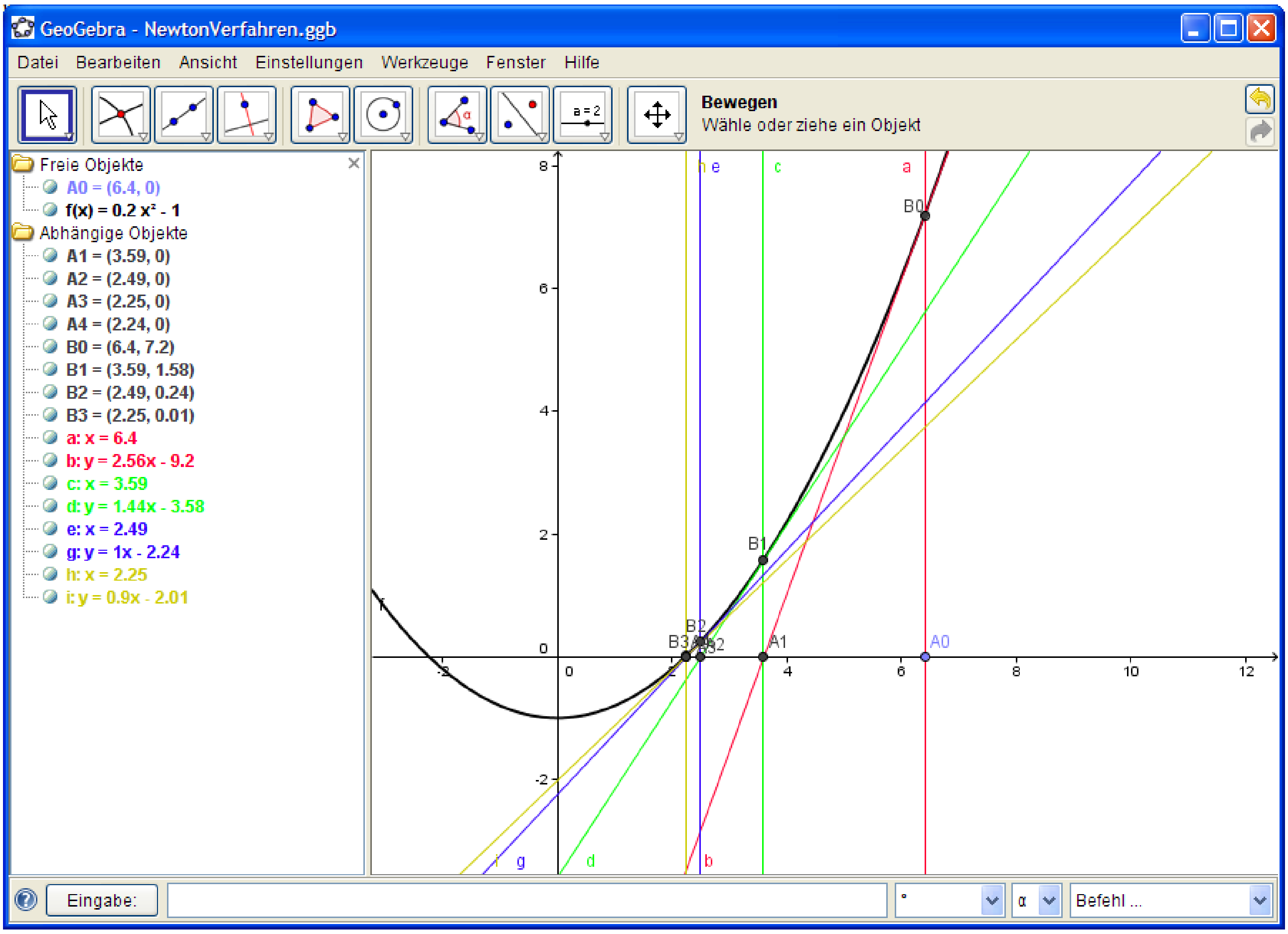
# Newtonsches Näherungsverfahren




Es gibt verschiedene Verfahren, um numerisch Näherungswerte für die Nullstellen von Funktionen zu finden, wenn diese Nullstellen nicht explizit bestimmt werden können.

Ein schnell konvergierendes Verfahren ist das Newtonsche Näherungsverfahren.

## Beschreibung des Näherungsvorgangs

Man gibt sich einen ersten Näherungswert $x_0$ vor, der möglichst nahe an der Nullstelle $x_N$ der untersuchten Funktion f(x) liegt. In der Zeichnung liegt der Punkt A0 an der Stelle $x_0$.
Die Senkrechte zur x-Achse durch den Punkt A0 schneidet den Graphen von f im Punkt B0. Zu B0 gehört der Funktionswert $f(x_0)$.
Im Punkt B0 wird die Tangente an den Graphen von f gelegt. Die Steigung der Tangente im Punkt B0 ist gleich der Steigung des Graphen von f an der Stelle $x_0$ und beträgt deshalb $f'(x_0)$.
Die Nullstelle A1 der Tangente beim x-Wert $x_1$ liegt (meistens) näher an $x_N$ als $x_0$.
Wiederholt man den beschriebenen Vorgang (rote Geraden in der Zeichnung) jeweils mit dem neu gefundenen Näherungswert mehrmals (blaue und gelbe Geraden in der Zeichnung), so nähern sich die Näherungswerte immer mehr der Nullstelle an.

## Herleitung der Näherungsformel

Aufstellen der Tangentengleichung für die Tangente im Punkt B0 mit dem x-Wert $x_0$:

Die Tangentengleichung ist eine Geradengleichung der Form $t_{x_0}(x)=m\cdot x+b$ .

Die Steigung m ergibt sich aus dem oben Gesagten zu $m=f'(x_0)$ . Daraus folgt $t_{x_0}(x)=f'(x_0)\cdot x+b$ .

Der Punkt mit den Koordinaten $\left(x_0/f(x_0)\right)$ gehört zum Graph von f und zur Tangente.

Einsetzen in die Tangentengleichung ergibt: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$ .

Aus dieser Gleichung lässt sich b berechnen: $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ .

Damit gilt für die Tangentengleichung: $t_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ .

Die Nullstelle $x_1$ der Tangente erhält man, wenn man setzt $x = x_1$ und $t_{x_0}(x_1) = 0$ :

$$0 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) \rightarrow -f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \rightarrow -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

### Berechnung mit Hilfe der Näherungsformel

Aus einem Näherungswert $x_0$ lässt sich ein besserer Näherungswert $x_1$ berechnen mit der Gleichung

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Man subtrahiert also vom Näherungswert den negativen Quotienten von Funktionswert bei $x_0$ und Ableitung bei $x_0$.

Beispiel: Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 1$ und dem Näherungswert $x_0 = 6{,}4$ (siehe Zeichung auf Seite 1)

Mit $f'(x) = 0{,}4 \cdot x$ gilt $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{0{,}2 \cdot x_0^2 - 1}{0{,}4 \cdot x_0} = \frac{0{,}4 \cdot x_0^2 - 0{,}2 \cdot x_0^2 + 1}{0{,}4 \cdot x_0} = \frac{0{,}2 \cdot x_0^2 + 1}{0{,}4 \cdot x_0}$

$$x_1 = \frac{0{,}2 \cdot x_0^2 + 1}{0{,}4 \cdot x_0} = \frac{0{,}2 \cdot 6{,}4^2 + 1}{0{,}4 \cdot 6{,}4} \approx 3{,}59$$

$$x_2 = \frac{0{,}2 \cdot x_1^2 + 1}{0{,}4 \cdot x_1} = \frac{0{,}2 \cdot 3{,}59^2 + 1}{0{,}4 \cdot 3{,}59} \approx 2{,}49$$

$$x_3 = \frac{0{,}2 \cdot x_2^2 + 1}{0{,}4 \cdot x_2} = \frac{0{,}2 \cdot 2{,}49^2 + 1}{0{,}4 \cdot 2{,}49} \approx 2{,}25$$

$$x_4 = \frac{0{,}2 \cdot x_3^2 + 1}{0{,}4 \cdot x_3} = \frac{0{,}2 \cdot 2{,}25^2 + 1}{0{,}4 \cdot 2{,}25} \approx 2{,}24$$

Der exakte Wert ist $x_N = \sqrt{\frac{1}{0{,}2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$ als Lösung der Gleichung $f(x_N) = 0 = 0{,}2 \cdot x^2 - 1$ .

---

## Anmerkungen:

1. Das Verfahren ist sehr gutartig.
   Verrechnet man sich bei einem Teilrechenschritt, so korrigiert der Algorithmus diesen Fehler meistens selbstständig.
   Man darf hier also ruhig mit gerundeten Zwischenergebnissen weiter rechnen.
2. Nicht immer konvergiert das Verfahren.
   Siehe dazu beim Wikipedia-Artikel http://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren den Abschnitt „Konvergenzbetrachtungen“
3. Ein GeoGebra-Applet zum Newtonverfahren finden Sie unter
   http://gfs.khmeyberg.de/Materialien/IIMathematik/Geogebra/NewtonVerfahren.html