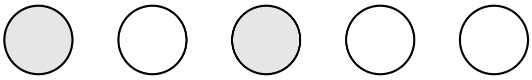
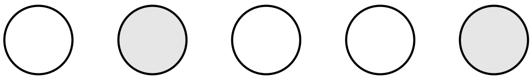
Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$



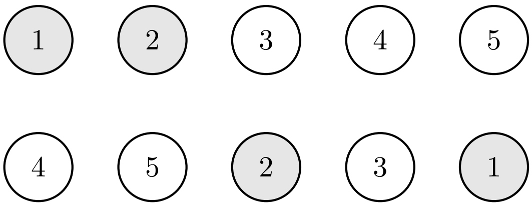
1. Muster



2. Muster

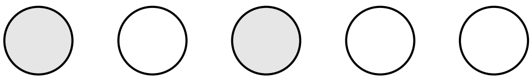
Wir wollen herausfinden, wie viele Muster der abgebildeten Art es gibt.
Von $n = 5$ Plätzen werden hier $k = 2$ ausgewählt.
Die Anzahl wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet (sprich n über k). Wie groß ist diese Anzahl nun?

Wenn die 5 Elemente (Kugeln) nummeriert sind, können wir die Anzahl $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ der Permutationen (Vertauschungen) bestimmen. Für die 1 gibt es n Plätze, für die 2 sind es $n-1$ Plätze, usw. Die Färbung der Elemente 1 und 2 ist ohne Belang:



...

Die Anzahl der Permutationen kann auf eine zweite Art bestimmt werden.
Wir gehen von der (noch unbekannten) Anzahl $\binom{n}{k}$ der Muster aus.



Die grau gefärbten Plätze lassen sich auf 2-fache Weisen mit den Zahlen 1 und 2 belegen, die restlichen auf $3! = 6$ Arten mit 3, 4 und 5.
Insgesamt erhaltenen wir mit $\binom{5}{2} \cdot 2! \cdot 3!$ alle 5! Permutationen. Daraus folgt $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!}$

und mit derselben Überlegung allgemein: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Binomialkoeffizient

Die Umformung

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)}{k!}$$

erleichtert in vielen Fällen die händische Rechnung.

Bei einer Urne mit n nummerierten Kugeln gibt es $\binom{n}{k}$ ungeordnete Stichproben vom Umfang k (k-elementige Teilmengen).

Auf wie viele Arten können 3 von 5 Tieren ausgewählt werden?

Lösung:

$$\binom{n}{k} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Die Menge der Tiere sei $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$
Dann gibt es die 10 Möglichkeiten:

$\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, b, e\}$ $\{a, c, d\}$ $\{a, c, e\}$
$\{a, d, e\}$ $\{b, c, d\}$ $\{b, c, e\}$ $\{b, d, e\}$ $\{c, d, e\}$

1. In einem Käfig sind 20 mit den Nummern 1 bis 20 versehene Mäuse.
   5 Mäuse werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für
   a) eine ganz bestimmte Auswahl,
   b) eine Auswahl von Mäusen, deren Nummern nicht größer als 10 sind?

2. Ein Test besteht aus 6 Fragen. Zu jeder Frage sind 4 Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät man zufällig 6 richtige Antworten?

3. Vor einem Entscheidungsrennen lassen sich die 8 teilnehmenden Skiläufer fotografieren. Auf einer Aufnahme sind immer 3 Läufer. Wie viele Bilder müssen mindestens gemacht werden, um garantiert die späteren drei Sieger auf einem Bild zu haben?

4. Bei einer Tombola gibt es unter 100 Losen 4 Gewinne. Der erste Käufer erwirbt 10 Lose.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gewinnlos dabei?

5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto "6 aus 49" mit einer Tippreihe
   a) genau 4 Richtige,
   b) mindestens 4 Richtige zu haben.

Binomialkoeffizient Aufgaben Lösungen

1. In einem Käfig sind 20 mit den Nummern 1 bis 20 versehene Mäuse.
   5 Mäuse werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für

   a) eine ganz bestimmte Auswahl, $\dfrac{1}{\binom{20}{5}}$

   b) eine Auswahl von Mäusen, deren Nummern nicht größer als 10 sind? $\dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = 1{,}6\,\%$

2. Ein Test besteht aus 6 Fragen. Zu jeder Frage sind 4 Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät man zufällig 6 richtige Antworten? $\dfrac{1}{4^6}$

3. Vor einem Entscheidungsrennen lassen sich die 8 teilnehmenden Skiläufer fotografieren. Auf einer Aufnahme sind immer 3 Läufer. Wie viele Bilder müssen mindestens gemacht werden, um garantiert die späteren drei Sieger auf einem Bild zu haben? $\binom{8}{3}$

4. Bei einer Tombola gibt es unter 100 Losen 4 Gewinne. Der erste Käufer erwirbt 10 Lose.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gewinnlos dabei?
   $$1 - \frac{\binom{96}{10}}{\binom{100}{10}} = 34{,}8\,\%$$

5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto “6 aus 49“ mit einer Tippreihe

   a) genau 4 Richtige,
   $$\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0{,}000969$$

   b) mindestens 4 Richtige zu haben.
   $$\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} =$$
   $$\frac{13545}{13983816} + \frac{258}{13983816} + \frac{1}{13983816} = 0{,}001$$

Siehe auch (Sek I): n-Fakultät, Binomialkoeffizient