Flug auf das Kirchendach

Zum Artikel in „Freie Presse“ vom 14./15. Februar 2009
„Flug ins Kirchendach als Matheformel“

Meine Einwände:
- die Anfangsgeschwindigkeit beim freien Flug stimmt nicht mit der Fahrgeschwindigkeit überein,
- der Wurfwinkel α stimmt nicht mit dem Böschungswinkel ß überein
- zur Analyse muss man ein genaueres Modell des Fahrzeugs berücksichtigen

Die Federung des Fahrwerks, die zeitliche Abfolge der vertikalen Stoßerregung beim Fahren über Bordkante und Böschung und die Daten dieses Fahrzeugs, dessen Berechnungsmodell als Mehrkörpersystem aufgefasst werden kann, spielen bei diesem „Flug“ eine Rolle.
Schon mit einem einfachen Punktmassenmodell kann man zeigen, dass die Elastizität des Fahrwerks von Bedeutung ist. Wird zwischen der Höhe y der Fahrzeugmasse m und der Höhe des Fußpunkts y_1 der Radfeder unterschieden, kann man bereits den Unterschied zum „schrägen Wurf“ ermitteln.

Modellannahmen:
Horizontale Komponente der Fahrgeschwindigkeit v,
vertikale Federkonstante k zwischen Fahrzeug als Punktmasse m und Böschung,
Anlaufvorgang auf einer um den Winkel ß geneigten Geraden $y_1 = x \tan ß = vt \tan ß$
für die Zeit vor dem „Abflug“.
Während dieser „Vorgeschichte“ gilt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{y} + ky = k\, y_1 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \tan ß\; vt$$

Beim Aufprallen auf eine angenommene Böschungsgerade gelten die Anfangsbedingungen

$$t = 0: \qquad y(0) = 0, \qquad v_y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet mit $\omega^2 = k/m$:

$$y = (v/\omega) \tan ß\, (\omega\, t - \sin \omega\, t)$$

Die vertikale Komponente der Geschwindigkeit der Masse ändert sich während des Fahrens über die Böschung:

$$v_y = \dot{y} = v \tan ß\, (1 - \cos \omega\, t)$$

Sie kann den Maximalwert

$$v_y = 2\, v \tan ß$$

erreichen, wenn der Kontakt mit der Böschung bis zur Zeit $t_1 = \pi/\omega = 1/(2f)$ erhalten bleibt, da dann $\cos \omega\, t_1 = -1$ ist. Infolge der Federung steigt also die vertikale Komponente der Abfluggeschwindigkeit auf den doppelten Wert im Vergleich zum schrägen Wurf.
Der Wurfwinkel α^* ist größer als ß und ergibt sich aus der Bedingung

$$\tan \alpha^* = 2 \tan ß.$$

Unter diesen Modellannahmen kann ein Wurfwinkel von $\alpha^* = 36$ Grad ($\tan \alpha^* = 0{,}7279$) bereits beim Böschungswinkel von ß = 20 Grad auftreten.

Die Eigenfrequenz dieses Schwingers ist $f = \omega/(2\pi)$. Wenn sie bei dem Fahrzeug in der Größenordnung von $f = (2{,}5 \ldots 5)$ Hz liegt, würde eine Kontaktzeit von $t_1 = (0{,}1$ bis $0{,}2)$ s auftreten, in welcher das Fahrzeug die Strecke von $x_1 = vt_1$ auf der Böschungsgeraden zurücklegt. Bei einer Fahrgeschwindigkeit von $v = 20$ m/s wären das $x_1 = (2\ldots 4)$ m, was in der realen Größenordnung liegt.

Die vorstehenden Betrachtungen beziehen sich auf ein Punktmassenmodell. Man kann den realen Vorgang mit vorhandener Software genauer analysieren, wenn man ein Mehrkörpermodell mit mehreren Freiheitsgraden benutzt. Als Eingabedaten wären zu berücksichtigen:

- Profil der Fahrstrecke (mit Bordkante und Profil der Böschung)
- Radabstand, Feder- und Dämpferkonstanten der Räder (Reifen , Aufhängung)
- Masse, Trägheitsmoment und Schwerpunktlage des Fahrzeugs

Daraus würde der gesamte zeitliche Ablauf folgen, beginnend beim Aufprall auf die Bordsteinkante bis zum Auftreffen auf das Kirchendach, d.h. Kraftverläufe in Vorder- und Hinterrädern, Koordinaten des Schwerpunkts des Fahrzeugs, Nickwinkel des Fahrzeugs, Koordinaten der Reifen, Lage und Geschwindigkeitszustand des Fahrzeugkörpers beim Auftreffen. Vermutlich werden die Fachleute, welche die Staatsanwaltschaft Zwickau mit der Klärung dieses Falles beauftragt hat, dabei Berechnungsmodelle der Mehrkörperdynamik benutzen.