Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
SS 2015

# Übungen zu Lineare Algebra II – Blatt 3

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Sei $b \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^4)$ die symmetrische Bilinearform dargestellt bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Man finde eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^4$ für $b$ und man bestimme den Typ von $b$.
(ii) Man finde eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{Mat}(4;\mathbb{R})$ so dass $M^\top BM$ diagonal ist mit Diagonaleinträgen $0, 1, -1$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Sei $V = \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ der Raum der $2 \times 2$ Matrizen mit reellen Koeffizienten. Man setze

$$b(X,Y) = 2\,\mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) \qquad \text{für alle } X, Y \in V.$$

(i) Man zeige, dass $b$ eine symmetrische Bilinearform auf $V$ definiert.
(ii) Man schreibe die darstellende Matrix von $b$ bezüglich der Standardbasis der Elementarmatrizen (siehe [Skript Lineare Algebra I, 2.4.2.3]).
(iii) Sei $W = \{X \in V \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ der Unterraum der spurlosen Matrizen. Man zeige, dass die Einschränkung von $b$ auf $W$ nicht-ausgeartet ist. Definiert diese Einschränkung ein Skalarprodukt auf $W$?
(iv) Man bestimme das Radikal von $b$.

**Aufgabe 3** (2+2 Punkte)**.** Sei $V$ ein reeller Vektorraum und $b$ eine Bilinearform auf $V$. Sei $H \subseteq V$ ein nicht-trivialer Untervektorraum, und sei $b|_H$ die Einschränkung von $b$ auf $H$. Welche folgender Aussagen sind richtig?

(a) Ist $b$ nicht ausgeartet, dann ist auch $b|_H$ stets nicht ausgeartet.
(b) Ist $b$ positiv definit, dann ist auch $b|_H$ stets positiv definit.

Man beweise jede Aussage (falls sie stimmt), oder man finde ein Gegenbeispiel.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Man zeige: Gegeben eine Abbildung $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j \le j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$$

gibt es eine affine Isometrie $D\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$(q \circ D)(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \lambda_{k+1} y_{k+1} + \cdots + \lambda_n y_n + \lambda_0$$

für geeignetes $k$ und geeignete reelle $\lambda_i$. (Man sagt dann, die Quadrik gehe „unter unserer Bewegung $D$ in ihre Standardform über".)

Abgabefrist: **Freitag**, den 15. Mai **um 10.00 Uhr.**