11. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Montag, den 8.07.2013 bis 11:00 Uhr in den Briefkästen, Eckerstr. 1, UG.

Aufgabe 1: Es seien (V, g) und (W, h) zwei n-dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume mit Skalarprodukt. Zeigen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren, dass es einen Isomorphismus $F\colon V \to W$ gibt, so dass

$$g(u, v) = h(F(u), F(v)) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta \in \mathbb{R}^3$ mit den Ecken e_1, e_2, e_3. Verschieben Sie dazu Δ so, dass eine Ecke im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ zu liegen kommt, und ergänzen Sie Δ zu einem Parallelogramm der doppelten Fläche.

Aufgabe 3: Es sei (V, g) ein $\Bbbk$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei $U \subset V$ ein linearer Unterraum und $p : V \to U$ die orthogonale Projektion aus Bemerkung 7.20. Zeigen Sie, dass für beliebige $v \in V$ der Vektor $p(v) \in U$ der eindeutig bestimmte Vektor $u \in U$ ist, so dass $\|v - u\|_g$ den kleinsten möglichen Wert annimmt.

Aufgabe 4: Es sei (V, g) ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Wir definieren eine Abbildung $F : V^r \to \mathbb{R}$ durch

$$F(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det(g(v_p, v_q))_{1 \le p,q \le r}}.$$

Zeigen Sie, dass F folgende Eigenschaften hat:

(a) $F(v_1, \dots, v_{p-1}, v_p \,.\, s, v_{p+1}, \dots, v_r) = F(v_1, \dots, v_r) \cdot |s|$ für alle $p \in \{1, \dots, r\}$,

(b) $F(v_1, \dots, v_{p-1}, v_p + v_q \,.\, s, v_{p+1}, \dots, v_r) = F(v_1, \dots, v_r)$ für alle $1 \le p, q \le r$ mit $p \ne q$,

(c) $F(v_1, \dots, v_r) = 1$ falls $g(v_p, v_q) = \delta_{p,q}$ für alle $1 \le p, q \le r$,

für alle $v_1, \dots, v_r \in V$ und alle $s \in \mathbb{R}$.