Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2016/17

Übungen zu Algebra und Zahlentheorie – Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(\mathbb{N}, S)$ die Menge der natürlichen Zahlen mit Nachfolgerabbildung und bezeichne $+$ ihre Addition.

Man zeige: Es gibt genau eine Verknüpfung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto ab$ mit der Eigenschaft $a0 = 0$ und $a(Sb) = ab + a$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$. Mit dieser Verknüpfung wird $\mathbb{N}$ ein kommutatives Monoid mit neutralem Element $1 := S0$ und es gilt das Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$.

*Diese Verknüpfung heißt die **Multiplikation** auf den natürlichen Zahlen.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige: Das Urbild von einem Ideal unter einem Ringhomomorphismus ist stets wieder ein Ideal, und desgleichen das Bild eines Ideals unter einem *surjektiven* Ringhomomorphismus.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Man zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 \in \mathbb{Q}$ ist $\mathbb{Q}[z] \subset \mathbb{C}$ ein Körper.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Man konstruiere einen Ringisomorphismus zwischen $\mathbb{R}[X]/(X^3 + 1)$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

Abgabefrist: Mittwoch, den 16. November um 8.15 Uhr.