Begriffs-Bilden und Kalkulieren vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen [1]

Horst Hischer, Braunschweig

Computeralgebrasysteme stellen den Mathematikunterricht vor Herausforderungen, die weit über die Aspekte eines nur neuen, leistungsfähigeren Werkzeugs hinausgehen: Der Begriffsbildungsprozeß findet nämlich bei Einsatz von Computeralgebrasystemen in einer anderen „Umgebung" statt als bisher, weil durch diese Systeme das klassische „Kalkulieren" als eine wesentliche Säule beim Bilden von Begriffen einen drastisch anderen Stellenwert bekommen wird.

Dieses wird in diesem Beitrag begründet, indem grundsätzliche Betrachtungen zum Prozeß der Begriffsbildung durchgeführt werden. Und zwar wird unterschieden zwischen *ontogenetischer* und *kulturhistorischer Begriffsbildung*, wobei erstere noch in *kognitive* und *epistemologische Begriffsbildung* unterteilt wird. Darauf aufbauend wird einerseits die Notwendigkeit der Konkretion eines Begriffs durch Beispiele *und* Gegenbeispiele hervorgehoben, und vor allem wird das *epistemologische Dreieck* nach Bromme und Steinbring in modifizierter Fassung vorgestellt und begründend herangezogen.

1 Vorrede

Das Titelbild dieses Tagungsbandes (vgl. auch Abb. 1), das zugleich das Programmheft zur Tagung zierte, wirkt kryptisch und macht stutzig: Sollte hierin etwa das Tagungsthema aufgefangen sein? Die Antwort sei sogleich vorweggegeben: Es stellt meine subjektive Sicht des Tagungsthemas dar, und zwar als Adaption des sog. „epistemologischen Dreiecks" in Anlehnung an Bromme, Seeger und Steinbring. [2]

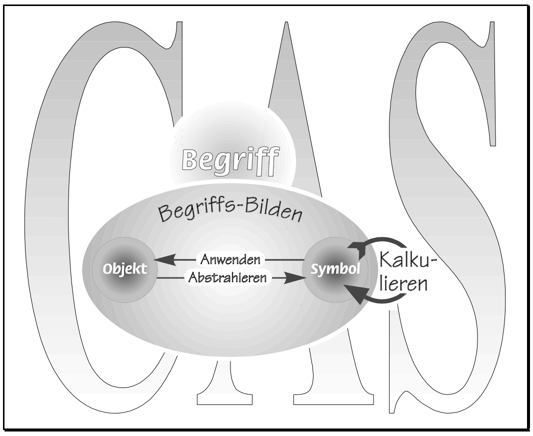


Abb. 1: Titelbild des Tagungsbandes – eine Adaption des „epistemologischen Dreiecks"

Aber warum muß das so kompliziert dargestellt werden? – so wurde ich manches Mal während der Tagung gefragt. —

Es ist das Wort „Begriffs-Bildung", das bei näherem Hinsehen die Schwierigkeiten bereitet – zusammengesetzt aus „Begriff" und „Bildung", und möglich wäre ja auch die Zusammensetzung „Bildungs-Begriff". [3]

Unternehmen wir zunächst einen kleinen Ausflug zu Begriffen – nein, hier stutze ich: „Begriffe" paßt jetzt wohl nicht, ich sage besser und treffender: „Bezeichnungen". Unternehmen wir also einen kleinen Ausflug zu Bezeichnungen, die mit dem Wort „Bildung" gebildet sind – nein, das paßt hier auch nicht, besser: „zusammengesetzt" sind*: Ausbildung, Einbildung, Abbildung, Nachbildung, Allgemeinbildung, Berufsbildung, Schulbildung, Halbbildung, Scheinbildung, Herzensbildung*, ... und natürlich: *Begriffsbildung*.

Schnell stellt man verblüfft fest, daß „Bildung" in jedem dieser Worte in einem neuen, eigenen Zusammenhang verwendet wird und auftaucht. So hat z. B. trotz des identischen grammatischen Aufbaus „Aus-Bildung" meist nichts mit „Ein-Bildung" zu tun, und einen Zusammenhang mit „Begriffs-Bildung" vermag ich auch nicht zu entdecken etc.

Lassen Sie uns nach diesem Abstecher auf den Begriff – aber nicht doch: auf das Wort! – „Begriffsbildung" zurückkommen: Vielleicht können Sie mir zustimmen, daß es hier um „Begriffs-Bilden" im Sinne des „Bildens eines Begriffs" oder des „Bildens von Begriffen" geht, und eine analoge Deutung paßt offenbar zu keinem anderen der o. g. Beispiele von „-Bildung". Aber was bedeutet denn nun „Begriffsbildung"?

---

[1] Ausarbeitung des Eröffnungsvortrags, der aus Zeitgründen nur einige der hier dargestellten Aspekte enthielt. Dank an W. Herget und M. Weiß für kritische Ratschläge.

[2] vgl. [Bromme & Steinbring 1990], [Seeger 1990] und [Steinbring 1993]

[3] vgl. [Fraunholz 1992]

2 Aspekte von „Begriffsbildung“

Das Wort „Begriff“ enthält eine philosophische *und* eine psychologische Dimension, auf die bereits Gottlob Frege im Jahre 1892 hinwies: [4]

> Das Wort „Begriff“ wird verschieden gebraucht, teils in einem psychologischen, teils in einem logischen Sinne, teils auch in einer unklaren Mischung von beiden.

Der zweite Wortbestandteil „Bildung“ suggeriert auch einen Zusammenhang von „Begriffsbildung“ mit der Pädagogik. Und so ist es nicht verwunderlich, daß „Begriffsbildung“ ein wesentlicher und klassischer Untersuchungsgegenstand dieser drei Disziplinen – nämlich Philosophie, Psychologie und Pädagogik – ist, wenn auch mit je spezifischen Blickrichtungen.

Blättert man nun in der einschlägigen Literatur, so fällt auf, daß unter der Bezeichnung „Begriffsbildung“ zumindest zwei völlig unterschiedliche Dimensionen diskutiert werden:

- Begriffsbildung im ontogenetischen Sinn
- Begriffsbildung im kulturhistorischen Sinn

Hinzu kommt, daß anstelle von „Begriffsbildung“ oft auch synonym die Bezeichnung „Begriffsentwicklung“ verwendet wird. Dies alles sei zunächst an dem kürzlich erschienenen Buch von Vollrath über „Algebra in der Sekundarstufe“ [5] exemplarisch belegt und erläutert (Abb. 2).

	2. Begriffsbildung im Algebraunterricht
	2.1 Begriffsbildungsprozesse
①	Der Zahlbegriff, der Verknüpfungsbegriff, die Begriffe Term und Gleichung, sowie der Funktionsbegriff bilden sich im Laufe des Algebraunterrichts heraus.
②	Diese Begriffsbildungsprozesse spiegeln bis zu einem gewissen Grade die historische Entwicklung wider.
③	Die Lernenden können sich dieser Begriffsentwicklungen in reflektierenden Phasen des Unterrichts bewußt werden.
④	Man sollte versuchen, ihnen den Eindruck zu vermitteln, daß diese Begriffsentwicklungen nicht abgeschlossen sind.
⑤	Tatsächlich besteht ja auch in der Sekundarstufe II die Möglichkeit, weiter an den Begriffen zu arbeiten und Neues zu schaffen.

Abb. 2: Aus Vollrath: „Algebra in der Sekundarstufe“

Hier werden also zugleich „Begriffsbildung“ und „Begriffsbildungsprozesse“ abgehandelt. Die Bezeichnung „Begriffsbildungsprozeß“ mag zwar redundant erscheinen, jedoch ist diese Bezeichnung üblich und hebt auf etwas Besonderes ab: Da „Bildung“ sprachlich sowohl einen Prozeß als auch einen Zustand bezeichnet, soll die Bezeichnung „Begriffsbildungsprozeß“ eine besondere Qualität von „Begriffsbildung“ hervorheben: nämlich den prozessualen, dynamischen Aspekt.

Im Satz ① sagt Vollrath etwas zur Herausbildung von Begriffen *„im Laufe des Algebraunterrichts“*, und damit spricht er den ontogenetischen Aspekt von „Begriffsbildung“ an. In Satz ② wird dann auch der kulturhistorische Aspekt von „Begriffsbildung“ betont und die Meinung vertreten, daß der ontogenetische Aspekt diesen widerspiegelt, wenn auch nur *„bis zu einem gewissen Grade“*.

Satz ③ ist mehrdeutig, weil hier auch aus dem Kontext heraus sowohl der ontogenetische als auch der kulturhistorische Aspekt subsumiert werden können: Sollen sich die Schülerinnen und Schüler der Begriffsentwicklung bei sich selbst bewußt werden, oder geht es um die Bewußtmachung der Historizität dieser Begriffsentwicklung? (Beides könnte und wird bildungsbedeutsam sein – übrigens ein anderer Aspekt von „Bildung“!) Entsprechendes gilt auch in Satz ④: Sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, daß die Begriffsentwicklung bei ihnen selbst nicht abgeschlossen ist, oder geht es um die Erkenntnis, daß Begriffe der Mathematik im Fluß und damit im Wandel sind?

Satz ⑤ führt zwar explizit zum ontogenetischen Aspekt zurück. Berücksichtigt man aber das didaktische Prinzip des „entdeckenden Lernens“ in dem Sinn, daß auch kulturhistorische Aspekte „wiederentdeckt“ werden können, so liegt hier implizit auch eine Verbindung zum kulturhistorischen Aspekt vor.

Ich komme nun zu einer Klärung der Begriffe „Begriffsbildung im ontogenetischen Sinn“ und „Begriffsbildung im kulturhistorischen Sinn“:

„Normalerweise“ versteht man in Pädagogik, Psychologie und Philosophie „Begriffsbildung“ ontogenetisch, indem gefragt wird, wie sich der *Begriffsbildungsprozeß* bei den Menschen vollzieht. Die **Psychologie** betrachtet dabei vornehmlich das jeweilige Individuum – untersucht dann also den Aufbau sog. *kognitiver Strukturen*; die **Philosophie** dagegen betrachtet

[4] Vgl. [Frege 1892] in [Patzig, 1962, S. 64]; Logik war übrigens damals noch eine philosophische Disziplin, und erst Frege hat sie bekanntlich der Philosophie entrissen und der Mathematik zugeführt!

[5] Aus [Vollrath 1994, S. 253]; unterstreichende Hervorhebungen und Satznumerierungen nebst Absatzformatierung von mir.

„Begriffsbildung“ im Rahmen erkenntnistheoretischer Reflexionen beim Menschen schlechthin – hier geht es dann um sog. *epistemologische Strukturen*, also nicht um subjektive Strukturen des Wissens beim Individuum, sondern eher um *intersubjektive Strukturen* dieses Wissens, über die also viele Menschen gleichermaßen verfügen. Solche Strukturen eignen sich die Menschen *im sozialen Kontext kommunikativ und interaktiv* an. So führt Seeger hierzu aus: [6]

> „Wissen“ kann sowohl unter einer psychologischen wie unter einer epistemologischen Perspektive betrachtet werden.
> Es kann einmal als Wissen eines individuellen Menschen, als kognitive Struktur rekonstruiert werden oder es kann als Produkt eines Gemeinwesens, einer „Sprachgemeinschaft“ usw. unter epistemologischen Aspekten betrachtet werden.

Das paßt zu dem vorhin erwähnten Zitat von Frege. Die hier mehrfach verwendete Bezeichnung „Epistemologie“ geht auf das griechische „episteme“ für „Wissen“ zurück [7] und ist damit als „Erkenntnistheorie“ aufzufassen. Sie hat sich in der mathematikdidaktischen Literatur der letzten 15 Jahre ausgebreitet [8], wohl als deutsches Pendant zum angloamerikanischen „epistemology“, und zwar in einem Zweig der empirischen Unterrichtsforschung, der sich mit der Analyse der „Entwicklung von Wissen“ befaßt. [9]

In der **Pädagogik** und in den **Fachdidaktiken** fließen nun *beide Aspekte des Begriffsbildungsprozesses* zusammen, nämlich die Untersuchung von kognitiven *und* epistemologischen Strukturen.

Stets wird dabei auch untersucht, was denn diese Begriffsbildung eigentlich sei, natürlich mit ausführlicher Reflexion über den *Begriff „Begriff“* (sic!) selbst – auf einer metasprachlichen Ebene. Aus Gründen der Konkretion werden solche Untersuchungen von diesen „Metawissenschaften“ dann an Begriffen z. B. aus anderen Fachwissenschaften wie etwa Mathematik duchgeführt, die dabei in diesem Sinne als „Objektwissenschaften“ dienen.

Dieser ontogenetische Aspekt von „Begriffsbildung“ spielt jedoch in jenen „Objektwissenschaften“ wie Mathematik eher keine Rolle, es sei denn, es findet eine Reflexion der eigenen Methoden und Zielsetzungen im wissenschaftstheoretischen Sinne statt. Vielmehr tritt der Aspekt der Begriffsbildung innerhalb dieser Objektwissenschaften – wenn überhaupt – im Rahmen kulturhistorischer Untersuchungen auf, speziell innerhalb der Wissenschaftsgeschichte der jeweiligen Disziplin, also z. B. in der „Geschichte der Mathematik“, die sich zu einem wichtigen Forschungszweig entwickelt hat.

So ist also beispielsweise die in der Mathematikdidaktik gängige Bezeichnung „*Entwicklung des Zahlbegriffs*“ doppeldeutig und höchst mißverständlich, etwa

> „*Entwicklung des Zahlbegriffs ...*
> ... beim Kinde“

oder

> „*Entwicklung des Zahlbegriffs* ...
> ... von den Pythagoreern über Dedekind und Peano bis Hilbert“.

Ich fasse zusammen (vgl. Abb. 3 [10]):

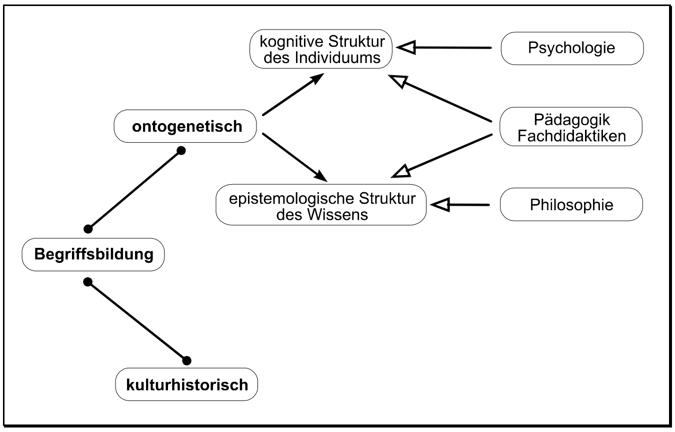


Abb. 3: Aspekte von Begriffsbildung

1. **„Begriffsbildung“** enthält zunächst einen ***ontogenetischen Aspekt***,
- der sich einerseits auf die ***kognitive Struktur*** (des Individuums) bezieht und dann schwerpunktmäßig der *Psychologie* zuzuordnen ist,
- der sich andererseits aber im erkenntnistheoretischen Sinn auf die ***epistemologische Struktur*** (des Wissens im sozialen Kontext) bezieht und dann schwerpunktmäßig der *Philosophie* zuzuordnen ist,

---

[6] Siehe [Seeger 1990, S. 130]; [Edelmann 1996 b, S. 22] schränkt hingegen „Wissen“ so ein, daß dieses „*in jedem Fall subjektiv*“ sei. Hiermit meint er „*subjektive kognitive Strukturierungsprozesse*“ im von mir erwähnten Sinn.

[7] vgl. etwa [Edelmann 1996 a]

[8] vgl. etwa [Seeger 1990] und [Steinbring 1993]

[9] Maßgeblich wird diese Forschungsrichtung von Bromme und Steinbring verfolgt, während die komplementäre Forschungsrichtung, nämlich die sog. „Interaktionsanalyse“, vor allem mit dem Namen Jörg Voigt verbunden ist ; vgl. [Seeger 1990], ferner [Bromme & Steinbring 1990], [Steinbring 1993].

[10] Man überlege sich eine passende Interpretation der – bewußt unterschiedlichen – Striche und Pfeile!

– der damit schließlich *multiperspektivisch* der *Pädagogik* und den *Fachdidaktiken* zuzuordnen ist.

2. **„Begriffsbildung“** enthält aber auch einen ***kulturhistorischen Aspekt***, der sich auf die Entstehung einzelner Begriffe und deren historisch veränderte Sichtweisen innerhalb einer Wissenschaft oder eines kulturellen Bereichs bezieht, mithin ebenfalls Reflexionsgegenstand der Fachdidaktiken ist.

Um nun zwecks Vermeidung von Mißverständnissen diese unterschiedlichen Aspekte von „Begriffsentwicklung“ voneinander abzuheben, könnte man separierende Bezeichnungen wählen oder geeignete Attribute vergeben. Ein naheliegender Versuch der Trennung zwischen „Begriffsbildung“ und „Begriffsentwicklung“ scheidet aus, weil er dem Sprachgebrauch zuwiderliefe (s. o.) und einer Klärung damit nicht diente. Auch wenn man für den ontogenetischen Aspekt eine eigene Bezeichnung wie „Begriffsaneignung“ oder etwa – gemäß Holland [11] – „Begriffserwerb“ wählen würde, fehlte eine passende – und vor allem sinnfällige! – Bezeichnung, die den kulturhistorischen Aspekt trifft. [12] Bleibt eine Attribuierung, etwa im Sinne der bisherigen Betrachtungen gemäß Abb. 3: [13]

- *ontogenetische Begriffsbildung*
  - *kognitive Begriffsbildung*
  - *epistemologische Begriffsbildung*
- *kulturhistorische Begriffsbildung*

Bei Untersuchungen zur kognitiven Begriffsbildung geht es also eher um *subjektive* Aspekte des Wissens beim Individuum, während Untersuchungen zur epistemologischen Begriffsbildung an *intersubjektiven*, beobachtbaren (also „objektiven“) Aspekten der Entwicklung von Wissen innerhalb einer Gemeinschaft orientiert sind. Beide Aspekte sind jedoch im Rahmen didaktischer Untersuchungen wichtig und damit nicht trennbar.

Darüber hinaus sind alle vier genannten Aspekte der Begriffsbildung didaktisch nicht trennscharf, sondern nur unterschiedliche „Sichtweisen“ von Begriffsbildung! [14]

3 Zur ontogenetischen Begriffsbildung im Unterricht

Dieses ist ein wesentlicher Untersuchungsaspekt der pädagogisch orientierten Lernpsychologie [15] und der Mathematikdidaktik. Der wichtige Fall der Bildung von sog. „Begriffen höherer Ordnung“ läßt sich in klassischer Sichtweise wie folgt darstellen (Abb. 4): [16]

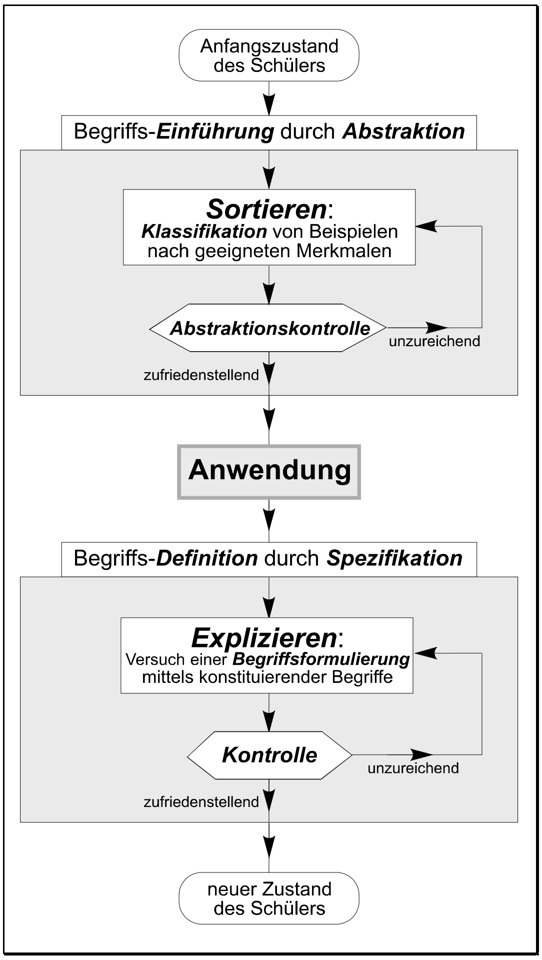


Abb. 4: Bildung von „Begriffen höherer Ordnung“ — klassische Sichtweise

Hierbei kommt es darauf an, verschiedene *Phasen bei der Begriffsbildung* zu unterscheiden, nämlich die

11 [Holland 1996] verwendet die Bezeichnung „Begriffserwerb“ für den ontogenetischen Aspekt, bezogen auf die kognitive Struktur, und widmet diesem Thema ein eigenes Kapitel.

12 Zwar liegt für den kulturhistorischen Aspekt „*Begriffsgenese*“ oder „*Begriffsentstehung*“ nahe, aber auch diese Bezeichnungen sind mißverständlich und könnten ontogenetisch verstanden werden.

13 Diese Vorschläge sind allerdings (noch) nicht üblich. Natürlich wäre es sprachlich sauberer, anstelle von „ontogenetischer Begriffsbildung“ etc. vom „ontogenetischen Aspekt der Begriffsbildung“ etc. zu sprechen. Jedoch ist diese Sprecehweise zu schwerfällig, und bei Klärung des Kontextes dient auch die vorgeschlagene Kurzform der Verständigung unter Fachleuten.

14 Ich verweise auf die reichhaltige Gliederung der Aspekte von „Begriffserwerb“ bei [Holland 1996], während hier eine andere Systematik im Vordergrund steht.

15 vgl. [Edelmann 1996 b] in diesem Tagungsband

16 vgl. [Hischer 1982] in Anlehnung an [Bock & Gimpel 1975], [van Dormolen 1978], [Wittmann 1978]

- ***Einführung*** *des Begriffs*

und zum anderen die

- ***Definition*** *des Begriffs*. [17]

1. Bei der *Einführung* wird der Schüler bzw. die Schülerin durch Vorlegen von Beispielen und Gegenbeispielen, z. B. im Rahmen „gelenkter Entdeckung“, mit Inhalt und Umfang des neuen Begriffs vertraut gemacht. Durch „Sortieren“ gelangt er bzw. sie zu einer „Klassifikation“ von Beispielen nach geeigneten Merkmalen, d. h. er bzw. sie gewinnt diesen Begriff durch Klassenbildung, also durch *Abstraktion*. Auf diese Weise entsteht ein *Begriff höherer Ordnung*. Ein wirkliches Verständnis solcher Begriffe ist gemäß Skemp nur über derartige Klassenbildung möglich. [18]
2. Nach zufriedenstellender Abstraktionskontrolle versucht man, diesen Begriff auf schwierigere Fälle anzuwenden, was eine Präzisierung der Begriffsvorstellung erfordert. Das geschieht in einer mehr oder weniger formalen *Definition*. Dieses Begriffsfestlegen nennt man auch *Explizieren*. In dieser Phase versucht man, den Begriff mittels bekannter, sog. konstituierender Begriffe durch Spezifizieren festzulegen. Nach zufriedenstellender Abstraktionskontrolle ist der Schüler bzw. die Schülerin dann von dem jeweiligen Anfangszustand, der durch sein Vorwissen gegeben ist, zu einem neuen Zustand gelangt.

In der Praxis treten vor allem Probleme beim Explizieren auf: Wie soll man methodisch vorgehen, um eine in der Mathematik übliche „formale Definition“ zu erarbeiten, so daß sie für Anwendungsuntersuchungen handhabbar ist? Hierfür eignet sich oftmals die folgende

Strategie: „Verbot des Unerwünschten“ [19]

Diese sei an zwei Beispielen skizziert.

- **Beispiel 1: Stetigkeit**

Wenn es etwa darum geht, nach dem Modell von Abb. 4 eine formale Definition für einen Stetigkeitsbegriff zu erarbeiten, so liegt es nahe, nach der Sortierphase die gemeinsamen Eigenschaften der „positiv“ aufgefallenen Beispiele formal zu beschreiben und auf diese Weise eine Kennzeichnung von „Stetigkeit“ zu erhalten. [20] Dieser Weg erweist sich jedoch häufig – und auch in diesem Beispiel – als recht schwierig. Angenommen, es soll eine „ε-δ-Definition“ der lokalen Stetigkeit [21] erarbeitet werden, so müßte sich für das Definiendum

„ f ist (lokal) stetig an der Stelle a “

schließlich folgendes Definiens ergeben: [22]

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathrm{IR}^+}\bigvee_{\delta\in\mathrm{IR}^+}\bigwedge_{x\in D_f}\left(x\in U_\delta(a)\rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(f(a))\right)$$

Nun wird den Schülerinnen und Schülern in der Sortierphase wohl kaum auffallen, daß eine bestimmte Klasse vorgelegter Funktionen die Eigenschaft hat, daß es jeweils *„zu jedem beliebig gewähltem* ε *... ein* δ *... gibt, so daß für alle* x *... gilt ...“*! Zwar wird genau dies im Unterricht (meist) erzwungen, indem diese Eigenschaft nahegelegt oder gar vorgelegt wird, jedoch kann es dann nur noch ein Nachvollziehen von Mathematik als Fertigprodukt sein. Gibt es andere Lösungen zu diesem methodisch harten Problem?

In der Sortierphase wurde ja eine Einteilung der betrachteten Funktionen in zwei Klassen vorgenommen, nämlich eine *Klasse für den* (noch zu erarbeitenden!) *Begriff* und eine *weitere Klasse für den Komplementärbegriff*. So könnte man ersatzweise versuchen, den Komplementärbegriff zu charakterisieren und durch logische Negation daraus eine Definition *für* den Begriff zu erhalten, was u. U. leichter sein kann. In diesem Sinne hat Kroll bereits 1976 vorgeschlagen, anstelle der Stetigkeit zunächst die Unstetigkeit zu definieren. So würde es also in obigem Beispiel darum gehen, für das Definiendum

„ f ist (lokal) unstetig an der Stelle a “

folgendes Definiens zu erarbeiten:

$$\bigvee_{\varepsilon\in\mathrm{IR}^+}\bigwedge_{\delta\in\mathrm{IR}^+}\bigvee_{x\in D_f}\left(x\in U_\delta(a)\wedge f(x)\notin U_\varepsilon(f(a))\right)$$

[17] Gemäß [Bock & Gimpel 1975]; „Definition“ meint hier die in der Mathematik übliche formale (oder verbalisierte) Fassung eines Begriffs. Versteht man unter „De-finition“ nur „Ab-grenzung“, so findet natürlich bereits in der sog. „Einführungs-Phase“ eine Definiton statt, was jedoch nicht gemeint ist.

[18] vgl. z. B. [van Dormolen 1978, S. 54]

[19] Explizit von mir 1976 in Oberwolfach für die Behandlung der Differenzierbarkeit vorgeschlagen, implizit bereits in [Hischer & Lucht 1976] für die vollständige Induktion.

[20] vgl. hinsichtlich *unterschiedlicher* Stetigkeitsbegriffe etwa [Hischer & Scheid 1995]

[21] Hier soll mitnichten für die ε-δ-Definition geworben werden. Ein Zugang über Folgen ist eine interessante Alternative, vgl. [Hischer & Scheid 1995, S. 128 f., 149 f.].

[22] Wegen der Quantorenschreibweise verwende ich den Subjunktionspfeil → anstelle des Implikationspfeils ⇒!

Hier braucht man also „nur“ zu entdecken, daß es bei einigen Funktionen möglich ist, jeweils ein ε so anzugeben, daß man für jedes beliebig gewählte δ ein geeignetes x mit „ausreißendem“ $f(x)$ zu finden vermag. [23]

Und diese „Erkenntnis“ läßt sich dann wie o. a. zu einer Definition der Unstetigkeit formalisieren, aus der eine für die Stetigkeit folgt. Ich nenne diese Strategie zur Gewinnung formalisierter Definitionen „Verbot des Unerwünschten“ und möchte sie an einem weiteren, ganz anders gearteten Beispiel erläutern.

- **Beispiel 2: Vollständige Induktion**

Über einen langen Zeitraum hinweg entwickelt sich bei den Schülerinnen und Schülern eine Vorstellung von dem, was die Struktur der natürlichen Zahlen ausmacht – hoffentlich gekrönt von dem Prinzip der vollständigen Induktion. An diesem Beispiel sieht man besonders eindrucksvoll, daß die (ontogenetische) Entwicklung eines Begriffs kein zeitlich lokaler Akt ist, vielmehr (spiralig) verläuft und auch mit Abschluß der Schule keinesfalls abgeschlossen ist.

Wie aber kann man nun das Induktionsaxiom, das sich bei den Schülerinnen und Schülern im Laufe der Zeit implizit entwickelt, bei diesen explizit machen, so daß es über eine formale Fassung dann für systematische Untersuchungen diskreter Probleme (und genau dort ist es unverzichtbar!) verwendbar wird?

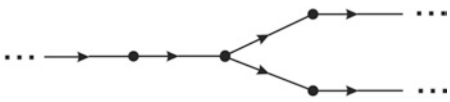
Ein möglicher Weg hierzu führt über die „Entdeckung“ der Peanoaxiome anhand eines „Kettenmodells“ der natürlichen Zahlen. [24]

> Die Anleitung zum Auffinden dieses Axiomensystems folgt Freudenthal [...]: „Die Zahlengerade ist der ganze reelle Körper im Keim mit all seinen Elementen und Operationen. Erst sieht man auf ihr wie Meilensteine die natürlichen Zahlen ...“

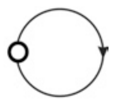
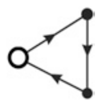
Dieses „Kettenmodell“ veranschaulicht die Grundbegriffe $\mathbb{N}$, ν, 0, deren wechselseitige Beziehungen hieraus abzulesen und als Axiome zu formulieren sind. Wir wählen folgende Strategie:

Haben wir ein System von Axiomen gefunden, das außer dem Kettenmodell noch davon abweichende Modelle besitzt, so bedarf es offenbar der Hinzunahme weiterer Axiome.

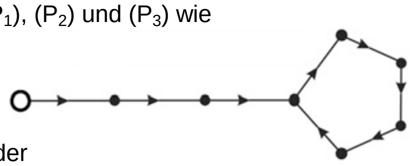
Dem Kettenmodell entnehmen wir $0 \in \mathbb{N}$, also (P_1).Insbesondere ist damit $\mathbb{N}$ nicht leer. Ferner erkennen wir, daß die Funktionswerte von ν wieder in $\mathbb{N}$ liegen, also (P_2). Man beachte, daß Verzweigungen wie



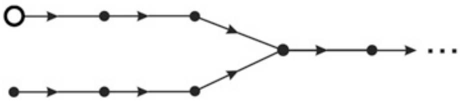
nicht möglich sind, weil ν als Funktion auf $\mathbb{N}$ erklärt ist. Aber auch die Diagramme

 oder  oder

sind Modelle für (P_1) und (P_2); durch (P_3) werden sie ausgeschlossen. Modelle für (P_1), (P_2) und (P_3) wie

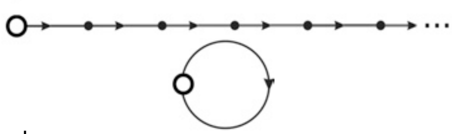


oder

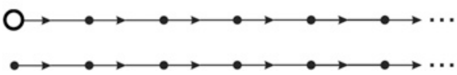


,

in denen ein Punkt verschiedene Vorgänger hat, schaltet (P_4) aus. Das heißt, ν ist injektiv. Aber dies alles reicht zur Charakterisierung von $\mathbb{N}$ noch nicht aus. Betrachten wir die Modelle



oder



,

so stellen wir fest:

a) (P_1) bis (P_4) sind jeweils erfüllt.

b) Es gibt jeweils ein echtes Teilmodell (nämlich die obere Kette), in dem (P_1) bis (P_4) gelten.

23 Also zunächst als subjektive, empirische Erkenntnis (des Individuums bzw. der Gemeinschaft); vgl. hierzu auch den schönen Vorschlag von [Malle 1977] über „Stetigkeits- und Grenzwertspiele“.

24 Vgl. die Darstellung in [Hischer & Lucht 1976], deren relevanter Teil im folgenden wiedergegeben wird (S. 229 - 231). Im Unterschied zu dort wird hier jedoch „0“ anstelle von „1“ für die „*erste natürliche Zahl*“ verwendet. In den Diagrammen wird dieses „*ausgezeichnete Element*“ durch „•“ im Unterschied zu „○“ für die anderen dargestellt.

Die Peanoaxiome (P_1) bis (P_5) werden hier nicht explizit vorangestellt, sie werden im Zusammenhang klar. Sie werden auch in [Hischer & Scheid 1995] ausführlich dargestellt, und zwar dort für eine beliebige Peanoalgebra (M, e, φ), die hier konkret mit ($\mathbb{N}$, 0, ν) zu bezeichnen wäre, worin ν die „*Nachfolgerfunktion*“ bedeutet.

Gemäß unserer Strategie verbieten wir b):

IN darf keine echten Teilmenge besitzen, die (P_1) bis (P_4) erfüllen.

Das heißt, ist T eine Teilmenge von IN mit den Eigenschaften

$$0 \in T\,,$$
$$\bigwedge_n \left(n \in T \to \nu(n) \in T\right),$$
$$\bigwedge_{n\in T} \nu(n) \neq 0\,,$$
$$\bigwedge_{m,n} \left(\nu(m) = \nu(n) \to m = n\right)$$

so soll $T = \mathbb{N}$ sein. Da die beiden letztgenannten Eigenschaften von ν in der umfassenden Menge IN gelten, so bleiben sie in T für die Restriktion von ν auf T erhalten: Sie brauchen nicht mehr genannt zu werden. Übrig bleibt

$$\bigwedge_{T\subset \mathbb{N}} \left[\left[0 \in T \wedge \bigwedge_n \left(n \in T \to \nu(n) \in T\right)\right] \to T = \mathbb{N}\right],$$

und das ist das Induktionsaxiom (P_5) [...] [25]

Darauf aufbauend läßt sich die Gültigkeit des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion zeigen. [26]

- **Resümee**

An den beiden Beispielen wird deutlich, daß sich das klassische Begriffsbildungsmodell nach Abb. 4 nicht nur für den Prozeß des Bildens von Begriffen höherer Ordnung eignet, sondern auch darüber hinaus. Schließlich deckt sich dieses klassische Modell der ontogenetischen Begriffsbildung auch mit meinen langjährigen Unterrichtserfahrungen in Schule und Hochschule:

So bin ich zu der Auffassung gelangt, daß ein mathematischer Begriff (nicht nur höherer Ordnung!) inhaltlich nicht allein durch Rezeption einer vorgelegten Definition zu verstehen ist, sondern daß unverzichtbar dazu gehört, den Begriffsumfang mit Hilfe von Beispielen und Gegenbeispielen exemplarisch zu konkretisieren und abzugrenzen, in diesem Sinne also tatsächlich im Sinne der lateinischen Bedeutung zu „*de-finieren*“ (= ab-grenzen).

Leider wird nicht immer so verfahren, und zwar weder in der Schule noch in der Hochschule. So findet man etwa in der Literatur immer wieder die Behauptung, *eine* Möglichkeit des Lernens von Begriffen bestünde auch in einem Weg über Definitionen (ohne daß dabei dann allerdings stets auf die Notwendigkeit von Beispielen *für* den Begriff und von Beispielen *gegen* den Begriff eingegangen wird).

Auch Vollrath widmet in seinem neuen Buch über „Algebra in der Sekundarstufe“ im Kapitel „Begriffsbildung“ einen Abschnitt dem „*Lernen durch Definitionen*“, und er schreibt in diesem Zusammenhang: [27]

> Die definierende Eigenschaft bezeichnet man auch als den *Inhalt* des Begriffs.
>
> Beispiel: Eine natürliche Zahl heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler besitzt. Die Eigenschaft, genau zwei Teiler zu besitzen, ist der Inhalt des Begriffs Primzahl.

Hier werden also Eigenschaftsbegriffe im Sinne von Edelmann angesprochen: „Inhalt“ eines Begriffs ist seine „logische Struktur“, und diese besteht aus der *Kombination der kritischen Attribute*. [28] Weiter sagt Vollrath:

> Den Lernenden muß bewußt werden, daß sie einen Begriff nur verstehen können, wenn sie seinen Inhalt erfassen. Es genügt also nicht, die Begriffsbezeichnung zu kennen. [...]

Auch dies ist einleuchtend und entspricht Edelmann, der dazu schreibt: [29]

> Obwohl sprachliche Etiketten, die Begriffsnamen, für das Behalten und auch für die Kommunikation von Bedeutung sind, ist der *Inhalt* der Begriffe, die *Bedeutung* oder die *Aussage* von weit größerer Wichtigkeit.

Wie aber *erfaßt* man nun den *Inhalt* eines Begriffs, der ja nur seine logische Struktur, also das Definiens ist (vgl. etwa obiges Beispiel 1)? Vollrath schreibt hierzu weiter: [30]

> Um den Inhalt eines Begriffs zu erfassen, muß man die in der Formulierung der definierenden Eigenschaften auftretenden Begriffe und Zeichen kennen. Bei Definitionen algebraischer Begriffe setzt dies meist das Verstehen der algebraischen Formelsprache voraus. [...]

Einverstanden! Aber reicht das aus?

---

25 Aus struktureller Sicht ist es bekanntlich belanglos, ob 0 oder 1 (oder irgendeine andere „Zahl“) die „erste“ natürliche Zahl ist, aber genau dies läßt sich bei dieser Vorgehensweise von den Schülerinnen und Schülern entdecken. Lediglich mengentheoretische Aspekte (natürliche Zahlen als Kardinalzahlen) legen IN = {0, 1, 2, ...} gemäß DIN nahe – eine Vereinbarung, die m. E. auch für den Mathematikunterricht sinnvoll ist. Sonst könnte man sich auch auf die Pythagoreer berufen und IN = {2, 3, 4, ...} festsetzen, was wohl niemand ernsthaft vorschlägt.

26 vgl. [Hischer & Scheid 1995, S. 28]

27 [Vollrath 1994, S. 255]

28 vgl. [Edelmann 1996 b] in diesem Band

29 [Edelmann 1996 b, S. 30]

30 [Vollrath 1994, S. 255]

Vollrath ergänzt daher: [31]

> Die Menge der Objekte, die unter einen Begriff fallen, stellt seinen *Umfang* dar. [...] In der Algebra ist es häufig schwierig, den Umfang eines Begriffs zu überblicken. Nehmen wir z. B. den Begriff der irrationalen Zahl. Zwar lernen die Schüler in der 9. Jahrgangsstufe mit Wurzeln aus Primzahlen wichtige Beispiele für Irrationalzahlen kennen, aber wichtige Typen bleiben ihnen verborgen. Man wird sich häufig damit begnügen, einige Beispiele kennenzulernen und im Verlaufe der Schulzeit weitere Beispiele entdecken zu lassen.

Und hier halte ich es für wesentlich, zu ergänzen, daß man nicht nur „*wichtige Beispiele*“ und „*im Verlauf der Schulzeit weitere Beispiele*“ kennenlernt, sondern daß die Schülerinnen und Schüler auch hinreichend viele *Gegenbeispiele* kennenlernen (s. o.).

Dann sind wir jedoch wieder bei der Klassifikation im Sinne des klassischen Modells in Abb. 4, nur mit dem Unterschied, daß nicht mit der Sortierphase begonnen wird, sondern mit der Explikationsphase, an die sich jedoch notwendig die Sortierphase anschließt. Das Diagramm in Abb. 4 wäre somit als Kreisprozeß zu denken, der prinzipiell nicht abgeschlossen ist und damit Stufen des Begriffsverständnisses beschreibt. Dies führt mich zu folgender

These:

Zum wirklichen Begriffsverständnis ist stets ein kritischer Bezug auf vorhandene oder zu suchende Objekte im Sinne einer Einteilung in Beispiele und Gegenbeispiele erforderlich.

Konsequenz:

Ein „Lernen von Begriffen durch Definitionen“ ohne gleichzeitigen Bezug auf Beispiele und Gegenbeispiele kann es gar nicht geben.

Den hier behaupteten Sachverhalt konnte ich immer wieder in Unterrichtssituationen beobachten, an denen ich selbst beteiligt war. Wenn das aber so ist, dann ist die (bei gegebenem Kontext einleuchtende) Bezeichnung „Lernen von Begriffen durch Definitionen“ irreführend, weil sie bei Unterrichtenden, die diesen Kontext nicht genau lesen, Fehleinschätzungen aufbauen kann. Sie sollte daher so nicht verwendet werden. [32]

Um so mehr empfinde ich Genugtuung, daß neuere empirische mathematikdidaktische Untersuchungen über die Entstehung von Wissen meine These stützen. Zugleich ist dies ein Beleg dafür, daß empirische Untersuchungen, wie etwa *Interaktionsanalysen*, keinesfalls nur der didaktischen Forschung als *l'art pour l'art* dienen, sondern daß auf diese Weise Maximen unterrichtlichen Handelns ableitbar werden. Dies möchte ich im folgenden skizzieren.

4 Das epistemologische Dreieck [33]

Bromme und Steinbring haben für ihr Konzept der empirischen Analyse von Wissensentstehung im Unterricht das sog. „epistemologische Dreieck“ entwickelt, das in seinem Ansatz auf ein Werk von Ogden & Richards aus dem Jahre 1923 zurückgeht, jedoch eine neue Qualität aufweist. [34]

Gemäß dieser Auffassung ist im Rahmen ontogenetischer Begriffsbildung zu unterscheiden zwischen *Objekt*, *Symbol* und *Begriff*, die sie in dem sog. *epistemologischen Dreieck* anordnen (Abb. 5).

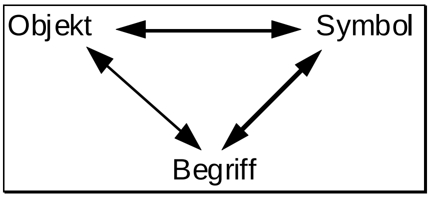


Abb. 5: epistemologisches Dreieck

Steinbring führt dazu aus: [35]

> Die im alltäglichen Mathematikunterricht beobachtbaren Probleme liegen nicht bloß auf der Ebene sprachlicher Kommunikation, sie beinhalten zugleich immer einen epistemologischen Anteil, der in der *theoretischen* Natur des Wissens begründet ist. Beide Perspektiven sind für die Analyse von mathematischer Interaktion notwendig. [...] Und im Lehrprozeß müssen die Lehrerinnen explizit auf die erkenntnistheoretischen Aspekte des schulmathematischen Wissens Bezug nehmen, um die zunächst als Namen für gegebene „Objekte“ gebrauchten sprachlichen Bezeichnungen mit mathematisch-begrifflicher Bedeutung füllen und damit einen Übergang von

31 [Vollrath 1994, S. 255]

32 Zwar gehen wir selbst bei der Aneignung eines neuen Gebiets mittels Definitionen an neue Begriffe heran, aber *verstehen* tun wir diese wohl erst dann, wenn wir (subjektiv ausreichend viele!) Beispiele *für* und *gegen* diesen für uns neu zu begreifenden Begriff gefunden haben!

33 vgl. [Seeger 1990] und [Steinbring 1993]

34 Vgl. [Seeger 1990, S. 139] und [Steinbring 1993, S. 118]; ferner daselbst Literaturhinweis auf: Ogden, C. K. & Richards, I. A.: The Meaning of Meaning. London: Kegan Paul, Trench, Trubner & Co. 1923; vgl. ferner die Ausführungen von [Weigand 1996] in diesem Tagungsband zur Dreirelationalität in der Semiotik gemäß Peirce.

35 [Steinbring 1993, S. 115]; Unterstreichungen von mir.

sprachlichen Zeichen zu mathematischen Symbolen (Symbole als Repräsentanten für *begriffliche Beziehungen*) in Gang setzen zu können.

Wir sollten also festhalten, daß hier die Bezeichnung „Symbol" (kontextbezogen) im Sinne von *Repräsentant für begriffliche Beziehungen* verwendet wird. Steinbring führt weiter aus:

> In Situationen der Problemlösung oder der Weiterentwicklung mathematischen Wissens sieht man sich somit der Anforderung ausgesetzt, eine Beziehung zwischen allgemeinen strukturellen Aspekten des Wissens und Bedingungen einer mehr oder weniger konkreten, gegenständlichen Situation vorzunehmen. [36]
>
> [...] Dieses für den Mathematikunterricht zentrale Problem der Herstellung einer Beziehung zwischen *symbolisch-struktureller Ebene* und *gegenständlich-kontextbezogener Ebene* des Wissens ist beispielhafter Ausdruck für die Wechselbeziehung zwischen *subjektbezogenen* und *objektiven* Momenten in der Wissensentwicklung.
> [...] Wir gehen davon aus, daß die Bedeutung des mathematischen Begriffes sich als eine Beziehungsform zwischen *Zeichen* (*oder Symbol*) und *Gegenstand* (*oder Objekt*) im epistemologischen Dreieck konstituiert. [37]

[Seeger 1990] analysiert in diesem Zusammenhang die Basisarbeit von [Bromme & Steinbring 1990] und verweist auf deren

Hypothese:

Nur die Objektebene und die Symbolebene sind einer direkten Beobachtung zugänglich, während sich die Begriffsebene nur indirekt beobachten läßt.

Die empirischen Unterrichtsanalysen von Bromme & Steinbring stützen diese Hypothese mit folgender bedeutsamen

Konsequenz:

*Der **mathematische Begriff entsteht erst** in kommunikativen Situationen **durch Herstellung von Beziehungen zwischen den Gegenständen** bzw. Objekten **auf einer** sog. „**Empirieebene**" einerseits **und Zeichen** bzw. Symbolen **auf einer** sog. „**Kalkülebene**" andererseits. Nur diese beiden Ebenen sind einer Beobachtung im Unterricht direkt zugänglich, weil Kommunikation und Handlungen von sowohl Schülerinnen und Schülern als auch der Lehrkraft sich hierauf beziehen.*

[36] [Steinbring 1993, S. 116]; Unterstreichungen von mir

[37] [Steinbring 1993, S. 117]; Unterstreichungen von mir

Hierdurch wird meine These gestützt, daß es ein „Lernen von Begriffen durch Definitionen" nicht geben kann. [Seeger 1990] erläutert obige Konsequenz wie folgt:

> Vergegenwärtigen wir uns noch einmal, daß diese zentrale Hypothese ihren Ausgang von den Relationen im Dreieck „Objekt, Symbol und Begriff" genommen hat. Bromme/Steinbring nehmen in dieser Hypothese an, daß die Beziehung zwischen der Kalkül-Ebene (Symbol) und der Empirieebene (Objekt) sozusagen automatisch durch den mathematischen Begriff vermittelt wird oder werden muß. [38]

Und [Bromme & Steinbring 1990] selbst führen dazu folgendes aus:

> Wie weit der Begriffsinhalt im Unterrichtsverlauf entwickelt wird, läßt sich aus der Art erschließen, in der die Beziehung zwischen der Ebene der mathematischen Struktur und der Ebene der Anwendungsfälle gehandhabt wird. Werden diese Ebenen im Unterricht als relativ eigenständig zueinander angesehen – und so eine Reduktion mathematischer Bedeutung auf ausschließlich formale Aspekte bzw. ausschließlich empirische Aspekte vermieden –, so lassen sich auch von Schülern Aspekte des mathematischen Begriffsinhalts den Äußerungen des Unterrichts entnehmen. Dies gilt vor allem dann, wenn Aspekte der beiden Ebenen des Symbols und des Objekts in eine (explizite) Relation zueinander gestellt werden. Die Elemente des relationalen Dreiecks 'Objekt, Symbol und Begriff' lassen sich auf diese Weise in Unterrichtsinteraktionen beobachten, z. B. durch die Explikation von Aspekten von Aufgaben und Anwendungsfällen (Gegenstand), z. B. durch die Rechnungen, Verfahren, Zahlen usw. (Zeichen) oder durch die Nennung einer Beziehung zwischen Aspekten des Gegenstandes und des Zeichens (Begriff).
>
> [...] Damit ist eine Hypothese möglich, was 'gute' von weniger 'guten' ... Lehrern unterscheidet: Es ist für den Unterrichtserfolg förderlich, wenn Lehrer die genannten Ebenen der mathematischen Bedeutung im Unterricht gleichmäßig verwenden und ihre Beziehung deutlich machen. Es ist förderlich, wenn für die Schüler Beziehungen zwischen der Kalkülebene und der Empirieebene im Unterricht hergestellt werden. [39]

[38] [Seeger 1990, S. 141]; Unterstreichungen von mir

[39] [Bromme & Steinbring 1990], zitiert nach [Seeger 1990, S. 140]

Im epistemologischen Dreieck bilden somit „Objekt“ und „Symbol“ aufgrund ihrer konkret beobachtbaren Zugänglichkeit die *Basis*, während „Begriff“ als abstraktes Konstrukt zwischen „Objekt“ und „Symbol“ auf einer höheren Ebene zu denken ist. Daher schlage ich für das epistemologische Dreieck unter Berücksichtigung auch der anderen Erläuterungen eine Modifikation vor, indem es sinnfälliger gemäß Abb. 6 „auf den Kopf gestellt“ wird. [40]

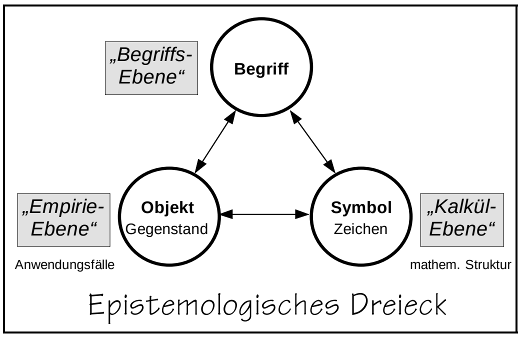


Abb. 6: Modifkation des epistemologischen Dreiecks (auf den Kopf gestellt)

5 Kalkulieren

Bereits im Titel dieses Beitrags und in Abbildung 1 taucht die Bezeichnung (ich sage jetzt bewußt nicht: „der Begriff“) „Kalkulieren“ auf. Das bedarf einer Erläuterung, und deshalb nehme ich das Tagungsthema in den Blick:

Rechenfertigkeit und Begriffsbildung angesichts von Computeralgebrasystemen

Über *Begriffsbildung* habe ich im Rahmen dieser Einleitung bereits vieles ausgeführt, wenn auch thematisch noch viel zu wenig. Mit *Rechenfertigkeit* ist offenbar die „Fertigkeit zum Rechnen“ gemeint, aber da beginnt ja bereits das Problem: Was soll denn unter „Rechnen“ verstanden werden? Ein Blick in die Fachliteratur macht ratlos – meist Fehlanzeige! Offensichtlich haben wir alle eine Vorstellung von „Rechnen“ (gar etwa einen Begriff davon?), halten es aber nicht für nötig (oder können es etwa nicht?), eine verbale Definition dafür anzugeben! Vielleicht liegt hier ein prototypischer Begriff [41] vor (wie etwa „Tisch“, „Vogel“ oder „Spiel“), für den wir gar keine Definition angeben können?

Sicher ist zumindest, daß „Rechnen“ sich nicht nur auf den Umgang mit Zahlen beziehen kann, sonst wäre ja die Bezeichnung „Differential*rechnung*“ sinnlos. „Rechnen“ muß also irgendetwas mit einem auf bestimmten Regeln beruhenden Umgang mit Objekten aus einer überschaubaren (?) Menge zu tun haben. So können wir ja auch von „Vektor*rechnung*“ oder „Wahrscheinlichkeits*rechnung*“ sprechen, ohne daß es hier (nur!) um den Umgang mit Zahlen gehen würde.

Ich kann diese Reflexion hier nicht vertiefen und helfe mir in für Mathematiker bewährter Weise aus der Schwierigkeit, indem ich eine weniger übliche Bezeichnung verwende: „Kalkulieren“.

Wenn Sie vielleicht einwenden, daß dies durch die Kaufleute bereits durch „Kalkulation“ belegt sei, schreckt mich das wenig, denn immerhin besitzen wir in der mathematischen Grundlagenforschung und in der Informatik den „Kalkül“, und damit kann ich an die „Kalkülebene“ im epistemologischen Dreieck von Bromme und Steinbring anschließen, indem ich festsetze:

1. „*Kalkulieren*“ (anstelle von „rechnen“) ist jegliches Anwenden von Kalkülen.
2. „*Kalkülkompetenz*“ (anstelle von „Rechenfertigkeit“) ist die (noch zu bewertende) Fähigkeit eines Individuums, einen gegebenen Kalkül in konkreten Situationen zielgerichtet anwenden zu können.

Da Sie als kompetente Mathematikdidaktikerinnen bzw. Mathematikdidaktiker bereits über hinreichende Vorerfahrungen verfügen, darf ich bei dieser ontogenetischen „Begriffsbildung“, die z. Z. bei Ihnen stattfindet, mit der Explikationsphase einsteigen und Sie zugleich bitten, für sich selbst an dieser Stelle zur Sortierphase zurückzukehren (s. o.). Denn meiner These folgend können Sie aufgrund dieser verbalen Definition nicht verstehen, was ich meine, wenn Sie nicht hinreichend viele Beispiele und Gegenbeispiele präsent haben! – Fertig? – Dann können wir weitermachen.

Natürlich bleiben obige Vereinbarungen unklar, wenn wir kein Begriffsverständnis von „Kalkül“ haben. Die deutsche Sprache kennt hier sowohl „das Kalkül“ als auch „den Kalkül“. Ersteres bezieht man in seine Überlegungen ein, und um letzteres geht es hier.

Zunächst einige Beispiele für die Verwendung des Begriffs „Kalkül“ in Mathematik und Informatik:

- Logik-Kalkül, Mengen-Kalkül, Lorenzen-Kalkül (Friedhofs-Kalkül [42]), Gentzen-Kalkül, arithmetische Kalküle (Gödel), ...

[40] Interpretation der Pfeile?

[41] vgl. [Edelmann 1996 b] in diesem Band

[42] vgl. z. B. [Baumann 1990, S. 155]

Weiterhin einige Namen, die mit dem Begriff „Kalkül" zu verbinden sind:

- Ackermann, Church, Fraenkel, Gentzen, Gödel, Herbrand, Turing, ...

Schließlich ein Beispiel für etwas, was vom „Kalkül" zu unterscheiden ist:

- Algorithmus

Einige Zitate: So findet man in den *Grundzügen der Mathematik* von Behnke: [43]

> Wesentlich für einen Kalkül ist, daß zur Ausübung des Verfahrens keine besonderen Eingebungen und keine Erfindergabe erforderlich sind. Es wird nur die Fähigkeit verlangt, Zeichenreihen in ihrem Aufbau zu erkennen und sie nach den im Kalkül vorgeschriebenen Regeln zusammenzusetzen und zu zerlegen. Es handelt sich hier um so elementare Prozesse, wie sie im Prinzip auch von einer Maschine ausgeführt werden können.
>
> [...] Kalküle werden im allgemeinen so beschrieben, daß jeder Schritt eindeutig festgelegt ist. Man kann aber auch zulassen, daß bei jedem Schritt mehrere (endlich viele) Möglichkeiten des Fortschreitens wahlweise offen gelassen werden. Als Beispiel sei ein Kalkül [...] genannt, der von irgend welchen (in Dezimaldarstellung) vorgegebenen ganzen Zahlen a, b ausgeht, und in jedem Schritt wahlweise zwei Möglichkeiten offen läßt: (1) die Bildung der Summe zweier bereits vorher gefundener Zahlen (wozu jedenfalls a und b gerechnet werden), (2) die Bildung der Differenz zweier solcher Zahlen. In diesem Kalkül kann man alle Zahlen des von a und b erzeugten Moduls (a, b) gewinnen.

Und Baumann schreibt in seiner Didaktik der Informatik: [44]

> Ein *Kalkül* besteht aus Regeln, nach welchen aus einer endlichen Menge von Zeichenreihen (Wörtern) beliebig viele weitere Zeichenreihen hergestellt werden können.
>
> [...] Kalküle können zur Festlegung formaler Sprachen benutzt werden. Wesentlich am Begriff des Kalküls ist, daß es sich beim Ableiten von Wörtern um ein *regelgeleitetes Operieren mit Zeichen* handelt, wobei die Regeln nur auf Form und Anordnung – nicht jedoch auf eine eventuell vorhandene Bedeutung – der Zeichen Bezug nehmen: das Operieren vollzieht sich interpretationsfrei.
>
> Vom Begriff des Kalküls ist der des *Algorithmus* zu unterscheiden. Gemeinsam ist beiden Begriffen, daß mit Zeichen formal operiert wird. Ein Kalkül ist aber im wesentlichen nur ein Regelsystem; in der Anwendung der Regeln besteht Freiheit. Beim Algorithmus hingegen ist die Folge der Operationen (Regelanwendungen) fest vorgegeben. Ein Kalkül wird also zum Algorithmus, wenn eine feste Reihenfolge der Regelanwendungen vorgeschrieben ist.

Kommen wir damit zurück zum epistemologischen Dreieck in Abb. 6:

„Kalkulieren" ist dann das regelgeleitete Umgehen mit Symbolen bzw. Zeichen innerhalb der sog. „Kalkülebene", wobei diese Tätigkeit interpretationsfrei ist, mithin unabhängig von einer möglichen begrifflichen Bedeutung dieser Zeichen stattfindet.

Genau das trifft nun aber die Theorie von Bromme und Seeger, die ja feststellen (s. o.),

- *daß die Bedeutung des mathematischen Begriffes sich als eine Beziehungsform zwischen Zeichen (oder Symbol) und Gegenstand (oder Objekt) im epistemologischen Dreieck konstituiert.*

Also erst durch den Wechsel der individuellen und sozialen Handlungen von der Empirieebene in die Kalkülebene und zurück erwächst der Begriff in seiner Bedeutung für das Individuum und die Gemeinschaft. Dieser Ebenenwechsel ist unverzichtbar, und das (insbesondere im Gymnasium) oft zu beobachtende Verharren in der Kalkülebene, also die Beschränkung auf das „Kalkulieren" (bzw. nunmehr schlichter: das „Rechnen") kann zu keinem Begriffsverständnis führen.

Dieses allmähliche und geradezu vage Entstehen des Begriffs wird in Abb. 1 dadurch angedeutet, daß die konkret im Unterricht zu beobachtenden Ebenen für Gegenstand und Zeichen eindringlich im Vordergrund stehen, während der dritte Pol des epistemologischen Dreiecks, nämlich die Begriffsebene, schemenhaft und verschämt, ja geradezu nebulös, zurückgetreten ist. Wesentlich an dem so bildhaft dargestellten Begriffsbildungsprozeß sind dann die folgenden drei hervorgehobenen Handlungen:

- Kalkulieren
- Abstrahieren
- Anwenden

Diese Dreiheit ist also unterrichtsmethodisch unverzichtbar, um zu einem wirklichen Begriffsverständnis zu gelangen. Jeglicher Mathematikunterricht müßte somit darauf ausgerichtet sein, diese Handlungen in angemessener Weise zu berücksichtigen.

[43] [Behnke 1962, S. 33 f.]

[44] [Baumann 1990, s. 57 f.]

6 Computeralgebrasysteme

Und wo bleiben die Computeralgebrasysteme? Hier steckt das eigentliche Problem: Computeralgebrasysteme stellen für den Anwender ein System von Kalkülen durch die implementierte Datenbank bereit. [45] Als Anwender muß man die Kalküle nicht mehr selbst in dem Maße beherrschen, wie es zur händischen Lösung von Problemen beim traditionellen Wechsel zwischen Empirieebene und Kalkülebene erforderlich gewesen wäre.

Damit entsteht aber folgendes Problem: Wenn das Nutzen oder Verwenden eines Computeralgebrasystems nicht mehr ein Kalkulieren im bisherigen Sinn des händischen Umgehens mit Zeichen und Symbolen ist, was ist es denn dann? Kann es vielleicht sein, daß das Computeralgebrasystem auf diese Weise *zum Objekt* wird, das Umgehen mit Computeralgebrasystemen also ein Handeln auf der Empirieebene darstellt? Wenn das tatsächlich so sein sollte, so müßten wir uns jedoch ernsthaft Sorgen um die ontogenetische Begriffsbildung machen, falls in Zukunft Computeralgebrasysteme in großem Maße in der Weise im Mathematikunterricht Verwendung finden, daß sie einfach an die Stelle des bisherigen händischen Kalkulierens treten. Genau dies darf offenbar nicht sein!

So steht wohl in der Tat der Mathematikunterricht vor ganz neuen Herausforderungen, weil wir uns Gedanken darüber machen müssen, *welche Handlungen künftig in der Kalkülebene ihren Platz finden sollen*. Dieses ist ein neues mathematikdidaktisches Forschungsfeld; erste Antworten und Vorschläge werden in diesem Band zu finden sein.

7 Literatur

Baumann, Rüdeger [1990]: Didaktik der Informatik. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Behnke, Heinrich et. al. (Hrsg.) [1962]: Grundzüge der Mathematik. Band 1: Grundlagen der Mathematik – Arithmetik und Algebra. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bock, Hans & Gimpel, Manfred [1975]: Probleme, die beim Definieren mathematischer Begriffe auftreten. In: [Bock & Walsch 1975, S. 143 - 159].

Bock, Hans & Walsch, Werner [1975]: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

Bromme, Rainer & Steinbring, Heinz [1990]: Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß. Eine empirische Analyse von vier Unterrichtstunden in der Sekundarstufe I. In: Bromme, R. & Steinbring, H. & Seeger, F. (Hrsg.): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler – Empirische Untersuchungen. Köln: Aulis Verlag Deubner & Co.

van Dormolen, Johan [1978]: Didaktik der Mathematik. Braunschweig: Vieweg.

Edelmann, Walter [1996 a]: Lernpsychologie. Weinheim: Beltz, Psychologie-Verlags-Union (5. Auflage).

Edelmann, Walter [1996 b]: Begriffsbildung und Wissenserwerb aus lernpsychologischer Sicht. In diesem Tagungsband.

Fraunholz, Lioba [1992]: Ein roter Faden oder nur Patchwork? – Vom Bildungsbegriff zur Begriffsbildung. In: [Hischer 1992, S. 134 - 138].

Frege, Gottlob [1892]: Begriff und Gegenstand. In: [Patzig 1962, S. 64-78]; (Original in: *Vjschr. f. wissensch. Philosophie*, **16**(1892), S. 192 - 205).

Hischer, Horst [1976]: eine „Herleitung“ der Lipschitz-Differenzierbarkeit. Vortrag auf der Tagung zur Didaktik der Mathematik im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vom 05.-11.12.1976 (nicht veröffentlicht).

Hischer, Horst & Lucht, Lutz [1976]: Zum Verständnis des Induktionsaxioms. In: *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, **23**(1976)2, 228 - 236.

Hischer, Horst [1982]: Freiräume im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Vortrag am 26.02.1992 auf dem Niedersächsischen Mathematikerkolloquium in Osnabrück (nicht veröffentlicht).

Hischer, Horst (Hrsg.) [1992]: Mathematikunterricht im Umbruch? – Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 1991 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Hischer, Horst & Scheid, Harald [1995]: Grundbegriffe der Analysis – Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Heidelberg/Berlin/ Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Holland, Gerhard [1996]: Geometrie in der Sekundarstufe – Didaktische und methodische Fragen. 2. Auflage.

Malle, Günter [1977]: Stetigkeits- und Grenzwertspiele. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1977. Hannover: Schroedel, S. 168 - 171.

Patzig, Günther (Hrsg.) [1962]: Gottlob Frege – Funktion, Begriff und Bedeutung (Fünf logische Studien). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Seeger, Falk [1990]: Die Analyse von Interaktion und Wissen im Mathematikunterricht und die Grenzen der Lehrbarkeit. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **11**(1990)2, 129 - 153.

Steinbring, Heinz [1993]: Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht – Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **14**(1993)2,113 - 145.

Vollrath, Hans-Joachim [1994]: Algebra in der Sekundarstufe. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag.

Wittmann, Erich Chr. [1978]: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg, 5. Auflage.

[45] vgl. [Oberschelp 1996] in diesem Tagungsband