

Versuch: Koaxiale Meßleitung

Die theoretischen Grundlagen dieses Versuchs sind an sich nicht übermäßig schwierig, aber umfangreich. Zudem erhält man lästigerweise erst ganz zum Schluß meßtechnisch verwertbare Ergebnisse. Als zusätzliche Belastung werden oft die zahlreichen Begriffe der Hochfrequenzmeßtechnik empfunden, denen viele Praktikanten bei diesem Versuch erstmals begegnen.

Daher soll in dieser Anleitung die Erarbeitung der Theorie durch systematisch aufbauende Aufgaben erleichtert werden. Deren handschriftlich aufgezeichnete Lösungen können den Theorieteil der Ausarbeitung ersetzen.

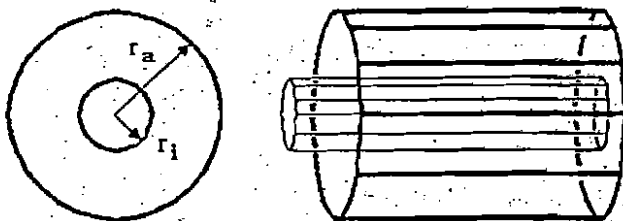
ACHTUNG: Erfahrungsgemäß ist es absolut hoffnungslos, diesen Versuch ohne ein zumindest prinzipielles Verständnis der Theorie durchführen zu wollen. Es wird daher dringend empfohlen, die Aufgaben vor Versuchsbeginn zu bearbeiten.

Als Hilfe ist die Literatur in den Leihmappen geeignet, insbesondere die Auszüge aus MEYER/POTTEL. (Beachte jedoch die mitunter abweichenden Vorzeichenkonventionen. Die hier eingeführten Vorzeichen sind direkt auf die Anordnung übertragbar.)

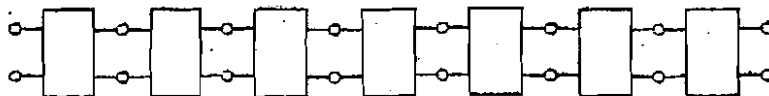
Im Anschluß an die Theorie werden die Standard-Meßaufgaben beschrieben. Die Ausstattung des Versuchs läßt noch eine Reihe weiterer Messungen zu, die bei Interesse durchgeführt werden können.

Theorie

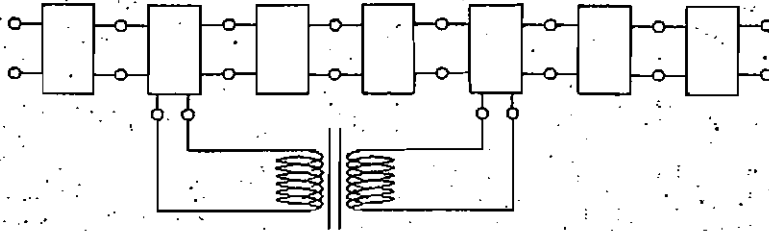
Eine Koaxialleitung besteht aus zwei kreiszylindrischen Leitern mit gemeinsamer Mittelachse, dem Außen- und dem Innenleiter:



Solange r_1 , r_a klein gegen die Vakuumwellenlänge λ ($c = \lambda v$; c : Lichtgeschwindigkeit, v : Frequenz) sind und für sehr gut leitendes Material, haben \vec{E} - und \vec{B} -Felder nur Komponenten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, also der Symmetrieachse der Leitung. Folglich läßt sich jeder kurze Leitungsabschnitt durch einen Ersatzvierpol und die gesamte Leitung als Verkettung vieler solcher Vierpole darstellen:



Um die Abhängigkeit der beiden Aussagen zu verdeutlichen: Angenommen, es gäbe E-/B-Felder längs zur Ausbreitungsrichtung. Je zwei beliebige Leitungsabschnitte im obigen Sinn würden sich dann gegenseitig durch dieses E-/B-Feld beeinflussen. Wollte man dies in einem Ersatzschaltbild ausdrücken, müßte man jedes mögliche Paar mit einer Koppelinduktivität/-kapazität verbinden (hier nur eine Induktivität gezeichnet):



Die einzelnen Leitungsabschnitte sind dann aber keine Vierpole mehr, sondern hätten (unendlich) viele Ein-/Ausgänge.

!gemein werden Wellen, die nur Feldkomponenten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung haben, als TEM-Wellen bezeichnet!

TEM: transversal elektrisch und transversal magnetisch

TM: transversal magnetisch

TE: transversal elektrisch

Aufgabe 1):

Bestimme für den oben beschriebenen TEM-Fall die Feldverteilung in einer Koaxialleitung aus den MAXWELL-Gleichungen!

Welche Form dieser Gleichungen eignet sich?

Eine Größe tritt in den MAXWELL-Gleichungen auf, die auch nach unseren Voraussetzungen Longitudinalkomponenten hat. Welche?

Welche Kapazität pro Längeneinheit C' und welche Induktivität pro Längeneinheit L' ergibt sich bei gegebenem r_i , r_a und ϵ_r , μ_r des Materials zwischen Innen- und Außenleiter aus der errechneten Feldverteilung?

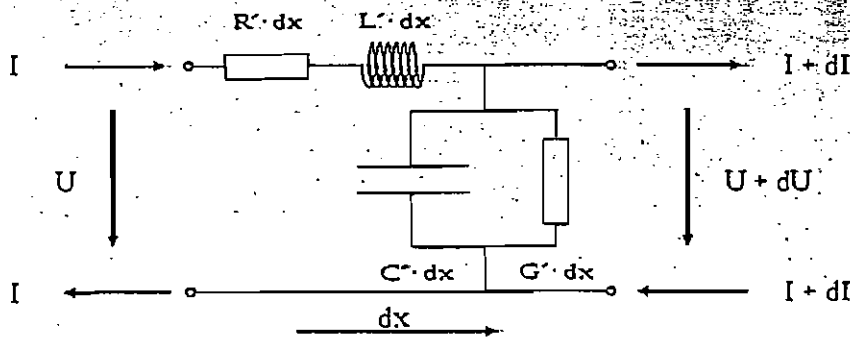
Ein Leitungsstück der Länge dx wird durch folgenden Ersatzvierpol beschrieben:

R' : Längswiderstand

G' : (ohmscher) Querleitwert

L' : Längsinduktivität

C' : Querkapazität



Aufgabe 2):

Bestimme anhand des Schaltbildes mit Hilfe der KIRCHHOFFSchen Regeln ein System zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen erster Ordnung der Form:

$$\frac{dU}{dx} = \dots\dots$$

$$\frac{dI}{dx} = \dots\dots$$

Setze dazu harmonische Zeitabhängigkeit voraus und verwende die bekannten komplexen Impedanzen der einzelnen Schaltelemente.

Bilde daraus zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung in jeweils einer einzigen Variable und bestimme deren allgemeine Lösung!

Welche Beziehungen bestehen zwischen den vier auftretenden freien Konstanten?

Hinweis: Die in der Rechnung auftretenden Größen werden üblicherweise folgendermaßen bezeichnet:

$$\gamma := +\sqrt{(G' + i\omega C')(R' + i\omega L')} \quad : \text{ "Fortpflanzungskonstante"}$$

$$Z_w := +\sqrt{\frac{R' + i\omega L'}{G' + i\omega C'}} \quad : \text{ "Wellenwiderstand"}$$

Die beiden restlichen freien Konstanten sind durch eine Randbedingung der Form

$$x = x_0, \quad U(x_0) = U_0, \quad I(x_0) = I_0$$

festgelegt.

Gib die damit vollständig bestimmten Lösungen für $U(x)$ und $I(x)$ in Matrixdarstellung zusammengefaßt an!

Lösung für weitere Rechnung:

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ I(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\gamma(x - x_0)] & -Z_w \sinh[\gamma(x - x_0)] \\ -\frac{1}{Z_w} \sinh[\gamma(x - x_0)] & \cosh[\gamma(x - x_0)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(x_0) \\ I(x_0) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3):

Wir betrachten ab sofort nur noch verlustfreie Leitungen ($R' = 0, G' = 0$), jedoch dürfen ϵ_r und μ_r von eins verschieden sein.

Bestimme für eine solche Leitung Z_w und γ !

Welchen Wert erhält man für Z_w , falls die Leitung mit Luft gefüllt ist und $r_a = e \cdot r_1$ (e : EULERSche Zahl) ist, welchen für γ ?

Aufgabe 4):

Angenommen, an der Stelle x_0 einer luftgefüllten, verlustfreien Koaxialleitung befinde sich ein Kurzschluß.

Welche Spannung und welchen Strom mißt man an den Stellen

$$x_0 + \lambda/4, \quad x_0 + \lambda/2, \quad x_0 + 3\lambda/4, \quad x_0 + \lambda \quad ?$$

Den Zusammenhang zwischen $U_0 = U(x_0) = U(0)$ und $I_0 = I(x_0) = I(0)$ vermittelt der Abschlußwiderstand W unter Berücksichtigung der Vorzeichenkonvention unserer Betrachtung:

$$U_0 = (-1) \cdot W \cdot I_0 ; \quad I_0 = -\frac{U_0}{W}$$

$$\Rightarrow U(x,t) = \frac{U_0}{2} e^{i\omega t} \left[\left(1 + \frac{Z_w}{W}\right) e^{i\beta x} + \left(1 - \frac{Z_w}{W}\right) e^{-i\beta x} \right]$$

Vergleich mit

$$U(x,t) = \hat{U} e^{i\omega t} \left[e^{i\beta x} + |r| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{-i\beta x} \right]$$

liefert

$$\left. \begin{aligned} \hat{U} &= \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{Z_w}{W}\right) \\ r \cdot \hat{U} &= \frac{U_0}{2} \left(1 - \frac{Z_w}{W}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{W - Z_w}{W + Z_w}$$

Dabei sind r und W möglicherweise komplex, Z_w als Wellenwiderstand einer verlustfreien Leitung reell.

Aufgabe 7):

Berechne $|r|$ und φ für

- allgemeines Z_w und Kurzschluß, Leerlauf und $W = Z_w$
- für $Z_w = 60 \Omega$ und $W = 5, 50, 500 \Omega$
sowie W : eine Kapazität von 50 pF bei 200 MHz

Im allgemeinen kann man U nur als $|U|^2$ messen. (Das hängt vom jeweiligen Detektor ab, ist aber für alle im quadratischen Kennlinienbereich arbeitenden Diodenempfänger richtig.) Außerdem sind viele Meßanordnungen nicht kalibriert, man ist also auf Relativmessungen beschränkt.

Aufgabe 8):

Berechne daher $|U/\hat{U}|^2$ aus der zeitunabhängigen Darstellung

$$U(x) = \hat{U} \left[e^{i\beta x} + |r| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{-i\beta x} \right] !$$

$$\text{(Lösung: } |U/\hat{U}|^2 = (1 - |r|)^2 + 4 |r| \cos^2(\beta x - \varphi/2) \text{)}$$

Beinah haben wir es geschafft. Wir kennen die Spannungsverteilung auf der Leitung, sogar in einer meßtechnisch zugänglichen Form. Außerdem wissen wir, wie Reflexionsfaktor und Abschlußwiderstand zusammenhängen. Die endgültige Verbindung führen wir durch in

Aufgabe 9):

Bestimme die Orte x_k der Knoten (Spannungsminima) auf der Leitung!

Berechne die sog. "Welligkeit" $m = |U_{\max}/U_{\min}|$!

Bilde mit diesen meßbaren Größen r und anschließend W !

Was gilt speziell für $|U_{\min}| \rightarrow 0$?

Wo liegen qualitativ die Knoten für kleines/großes L und kleines/großes C als Abschlußwiderstand?

Zum Schluß des Theorieteils zwei Aufgaben mit großer Bedeutung für die Praxis:

Aufgabe 10):

Als Abschlußwiderstand der Meßleitung wird ein Stück mit Dielektrikum gefüllte Leitung, einmal seinerseits kurzgeschlossen, einmal leertlaufend angehängt. Der Wellenwiderstand der Meßleitung und der nicht gefüllten Probenleitung seien beide Z_w . Wie berechnet man aus den Orten der Knoten beider Messungen ϵ_r ?

Aufgabe 11):

Zur Versuchsausstattung gehört eine sog. Reaktanzleitung. Dabei handelt es sich ebenso wie bei der Meßleitung um eine Koaxialleitung mit $Z_w = 60 \Omega$. Sie zeichnet sich aber durch einen Kurzschluß, der über die gesamte Länge (50 cm) verschoben werden kann, aus.

Wie berechnet sich aus dem Abstand l von Kurzschluß zur Anschlußebene und der Frequenz ν der Ersatzwiderstand der Reaktanzleitung in der Anschlußebene?

Welche Ersatzwiderstände sind für die Gesamtlänge 50 cm und 100, 150, 200 und 300 MHz möglich?

Welchen Induktivitäten/Kapazitäten entspricht das?

(Hinweis: Eine ähnliche Aufgabe wurde zuvor schon gelöst.)

Meßaufgaben

M1):

Betreib die Meßleitung mit einem Kurzschluß. Messe die Spannung entlang der gesamten Meßleitung für 100, 200 und 300 MHz und stelle sie graphisch dar!

Bestimme daraus λ und v !

Vergleiche mit der Senderskala, der Einstellskala des Abtaststifts und dem Frequenzzähler!

Ermittle daraus eine sinnvolle Fehlerabschätzung bei der Ortsbestimmung von Knoten und Spannungsmaxima (sog. "Bäuche")!

M2):

Schließe die Reaktanzleitung an. Bestimme für $l = 0, 15, 25, 50$ cm und $v = 300$ MHz die Orte der Knoten!

Betreib die Meßleitung völlig unbeschaltet. Wo liegen die Knoten?

M3):

Schließe den 60Ω -Abschluß an. Welcher Spannungsverlauf ergibt sich? Warum?

M4):

Schließe über den Adapter den Trimmkondensator an. Welchen Einfluß hat der Adapter (Vergleichsmessung)?

Bestimme die komplexe Impedanz des Trimmers für drei unterschiedliche Einstellungen (klein, mittel, groß; Meßfrequenz 300 MHz)! Versuche, das überraschende Ergebnis zu deuten!

M5):

Bestimme mit Hilfe der Reaktanzleitung die Dielektrizität der Stoffproben! Führe die Messungen für unterschiedliche Probenlängen aus!

Sind Dämpfungseffekte zu beobachten?

M6):

Messe die elektrische Länge des im Praktikum verlegten Kabels! Überlege dazu ein möglichst einfaches Verfahren!

M7):

Diskutiere (schriftlich!) verschiedene Möglichkeiten, die Dämpfung des Kabels zu bestimmen (erforderliches Gerät, Genauigkeit, Aufwand)!

Wie groß ist die Dämpfung?

Ein Meßplatz zur Bestimmung der elektromagnetischen Stoffkonstanten fester und flüssiger Medien bei Frequenzen zwischen 30 und 7000 MHz und Temperaturen zwischen -60 und +240° C.

VON R. EICHACKER

DK 621.317.779.029.6: 537.2:538.22

Inhaltsübersicht: Chemie und Mikrowellentechnik benötigen Meßmittel, mit denen die Stoffparameter komplexer, permeabler Medien über weite Frequenzbereiche des VHF-, UHF- und SHF-Bereichs mit hoher Meßgenauigkeit und in kontinuierlichen Spektren bestimmt werden können. Ein solches Meßgerät steht in dem nachstehend beschriebenen Meßplatz zur Verfügung. Er besteht aus einer für den interessierenden Frequenzbereich geeigneten koaxialen Meßleitung, koaxialen Probenleitungen für die Aufnahme fester und flüssiger Stoffe und ihre Untersuchung bei Raumtemperatur oder genau definierten Temperaturen zwischen -60 und +240°C. Die hohen Leistungen der verwendeten Bauelemente gestatten zuverlässige Messungen bis an die Grenze der heute technisch interessanten Verlustwinkel (einige 10^-4) hochwertiger Isolatoren. In der Arbeit werden ausführlich die Zusammenhänge zwischen den Stoffkonstanten ε, μ, δε und δμ und den Leistungsparametern beschrieben sowie Verfahren zu deren Bestimmung. Eine Formelsammlung gibt einen Überblick über die jeweils günstigste bzw. einfachste Meß- und Auswertungsmethode. Die möglichen Fehlerquellen werden diskutiert. Abschließend werden die Resultate einiger Messungen an Ferriten und Isolatoren mitgeteilt.

Summary: The chemist and the microwave engineer need measuring equipment which permits the material parameters of complex, permeable media to be determined to a high accuracy and in continuous spectra over wide frequency bands of the VHF, UHF and SHF ranges. A test assembly satisfying these requirements is discussed in the following. It consists of a coaxial standing-wave detector for the desired frequency range and of coaxial specimen containers suitable for solid and liquid materials and for their investigation at room temperature or accurately-known temperatures between -60 and +240°C. The high Q of the lines used allows reliable measurements up to the limit (a few 10^-4) of those known temperatures between -60 and +240°C. The high Q of the lines used allows reliable measurements up to the limit (a few 10^-4) of those known temperatures between -60 and +240°C. The high Q of the lines used allows reliable measurements up to the limit (a few 10^-4) of those known temperatures between -60 and +240°C. The high Q of the lines used allows reliable measurements up to the limit (a few 10^-4) of those known temperatures between -60 and +240°C.

Résumé: Dans les domaines de la chimie et des micro-ondes on nécessite des moyens qui permettent de mesurer les caractéristiques de matériaux complexes perméables avec une haute précision et en spectres continus, dans de larges gammes de fréquences en VHF, UHF et SHF. L'ensemble de mesures décrit satisfait ce besoin. Il consiste d'une ligne de mesures coaxiale convenable à la gamme de fréquences en question et de cellules de mesures coaxiales qui reçoivent les substances solides ou liquides à étudier. Les mesures se font à la température ambiante ou à une température bien définie comprise entre -60° et +240°C. Grâce aux hautes qualités des éléments utilisés, les mesures sont sûres jusqu'à la limite des angles de pertes (quelques 10^-4) des isolants de première qualité qui présentent un intérêt technique aujourd'hui. Les relations entre les constantes ε, μ, δε et δμ et les paramètres de ligne sont étudiées en détail et des méthodes sont décrites qui permettent leur détermination. Une collection de formules facilite le choix de la méthode la plus simple de mesure et de dépouillement des résultats. Les sources d'erreurs sont examinées. En conclusion les résultats de quelques mesures sur des ferrites et des isolants sont présentés.

Inhalt:

Formelzeichen

- 1. Einleitung
2. Die Stoffkonstanten ε, μ, δε und δμ, bezogen auf die Ausbreitungskonstanten Zm, γm homogener, stoffgefüllter Leitungsstücke
3. Verfahren zur Bestimmung von Zm und γm
3.1 Kurzschluß-Leerlaufverfahren
3.1.1 Eigendämpfung der Leitung vernachlässigt
3.1.2 Eigendämpfung der Probenleitung sowie der der Probe nachgeschalteter Kurzschluß- bzw. Leerlaufleitung berücksichtigt
3.2 Kurzschlußverfahren
4. Bestimmung der Eingangsimpedanz der Probenleitung
4.1 Geschlitzte und schlitzlose Meßleitungen
4.2 Z-g-Diagrammen
5. Formelsammlung
5.1 Permeable, verlustbehaftete Stoffe
5.1.1 Kurzschluß-Leerlauf-Verfahren
5.1.2 Einfachste ε-μ-Messungen mit elektrisch kurzer Meßprobe
5.2 Permeable, verlustarme Stoffe
5.3 Unmagnetische, verlustbehaftete Stoffe
5.3.1 Kurzschluß-Leerlauf-Verfahren
5.3.2 Kurzschluß-Verfahren
5.3.3 Leerlauf-Verfahren
5.4 Unmagnetische Isolatoren
6. Fehlerquellen
6.1 Fehler durch Luftschlitze zwischen Meßprobe und Koaxialleitung
6.2 Einfluß der Meßfehler Δl/l, Δm/m, ΔLmin/Lmin bzw. ΔLmax/Lmax auf das Meßergebnis
7. Der Meßplatz
7.1 Meßbereiche
7.2 Die Meßgeneratoren
7.3 Die Impedanzmeßgeräte
7.3.1 Geschlitzte Meßleitungen
7.3.2 Schlitzlose Meßleitung
7.3.3 Z-g-Diagrammen
7.4 Die Probenleitungen
7.4.1 Reaktionsleitung
7.4.2 Kurzschlußleitung
7.4.3 Temperaturbares Meßgefäß
8. Meßergebnisse an verschiedenen Versuchsstoffen

- A = Amplitude (E- oder H-Feld)
a = Radius einer koaxialen Äquipotentialfläche
α = Dämpfung [N/cm]
β = Phasenmaß [Grad/cm]
c = Lichtgeschwindigkeit [cm/sec]
γ = α + jβ Ausbreitungskonstante
d = Dämpfungsmaß hinter der Meßprobe liegender Leitungsstücke
δε = elektrischer Verlustwinkel
δμ = magnetischer Verlustwinkel
ε = ε0 [ε] · e^-jδε = komplexe Dielektrizitätskonstante
E = elektrische Feldstärke [V/cm]
f = Frequenz [Hz]
F = Fehler
H = magnetische Feldstärke [A/cm]
I0 = fortschreitende Stromkomponente [A]
IL = ortsabhängiger Leitungsstrom [A]
k = ganze Zahl
κ = Absorptionsindex
l = feste Leitungslängen [cm]
lH = Halbwerts- oder Knotenbreite [cm]
Lmin = Spannungsknoten- }
Lmax = Resonanzmaximum- } distanz zum Meßobjekt [cm]
ΔL = Knoten- }
= Resonanz- } Verschiebung, hervorgerufen durch Anschluß einer sek. kurzgeschl. bzw. leerlaufenden Meßprobe, bezogen auf Knoten- bzw. Resonanzposition bei exaktem Kurzschluß bzw. Leerlauf der Meßleitung
λ0 = Wellenlänge in Luft
m* = gemessenes Dämpfungsmaß (Eigendämpfung der Meßleitung noch nicht berücksichtigt)
m = Dämpfungsmaß des Meßobjekts
m0 = Korrekturdämpfung
n = komplexer Brechindex
n = reeller Brechindex
ω = 2πf
H = μ0 [μ] · e^-jδμ = komplexe Permeabilität
Q = Güte

- r, R = Radien der Koaxialleitung [cm]
- R' = Leitungswiderstand/cm
- $\tilde{\Gamma}$ = $|\tilde{\Gamma}| \cdot e^{i\theta}$ komplexer Reflexionsfaktor
- θ = Phase des Reflexionsfaktors
- s = feste Distanz zwischen Meßobjekt und Einkopplung [cm]
- t = $|\tanh t|$
- τ = Phase des hyperbolischen Tangens
- U_0 = fortschreitende Spannungskomponente [V]
- U_L = ortsabhängige Leitungsspannung [V]
- x = Koordinate der Ausbreitungsrichtung
- Z = Wellenwiderstand des freien Raums [Ω]
- \tilde{Z} = Impedanz, bzw. Wellenwiderstand [Ω]
- \tilde{z} = bezogene Impedanz, bzw. Wellenwiderstand

Indices der vorstehenden Meßgrößen: a = Ausgang, e = Eingang, i = Strom, K = bei sekundärem Kurzschluß der Meßprobe, L = bei sekundärem Leerlauf der Meßprobe, m = Material, Medium, o = leerer Raum, p = probenerfüllte Leitung.

1. Einleitung

Wechselwirkung zwischen einer elektromagnetischen Welle und einem von ihr durchsetzten isotropen Medium ist eindeutig durch 4 Konstanten, die Dielektrizitätskonstante ϵ , die Permeabilität μ und ihre zugehörigen Verlustwinkel δ_ϵ und δ_μ festgelegt.

Die Bezeichnung „Stoffkonstanten“ verdienen diese Größen eigentlich nur insoweit, als sie unter bestimmten wohldefinierten Voraussetzungen für die jeweiligen Stoffe charakteristische Werte annehmen, die durch deren Struktur bedingt sind. Im allgemeinen sind diese Stoffkonstanten jedoch keineswegs konstant, sondern können erheblich von der Frequenz, der Temperatur, mechanischen Spannungen, von sie durchsetzenden statischen, elektrischen und magnetischen Feldern u. ä. m. abhängen.

Zwar ist man in vielen Fällen daran interessiert, möglichst frequenz- und temperaturunabhängige Stoffwerte zu haben, jedoch erweist sich andererseits die Abhängigkeit vieler Stoffe von den unterschiedlichsten Parametern als nützlich um mehr über ihre Zusammensetzung zu erfahren.

So kann der strukturelle Aufbau neugebildeter chemischer Verbindungen trotz bekannter anteiliger Komponenten nicht immer erschöpfend übersehen werden. Hier helfen Spektralanalysen, Röntgenuntersuchungen, chemische Reaktion mit anderen bekannten Stoffen und — nicht zuletzt — die Untersuchung des Verlaufs der Stoffkonstanten ϵ , μ , δ_ϵ und δ_μ in Abhängigkeit von Parametern wie z. B. Temperatur und Frequenz. Eventuell vorhandene Dispersionen und ihr spektraler Verlauf, Temperaturkoeffizient, Lage des Curiepunktes, gyromagnetische Resonanzeffekte, gemessen im cm-, dm- und m-Wellengebiet, ergänzen die bei tiefen Frequenzen bzw. mit optischen und röntgenologischen Methoden gewonnenen Aufschlüsse. Umgekehrt ergeben sich aus den hierbei gesammelten Erfahrungen wieder völlig neue Möglichkeiten zur Überwachung chemischer Umwandlungsprozesse.

Während die Ergebnisse der Mikrowellen-Strukturforschung keineswegs immer zu Anwendungen in diesem Frequenzgebiet führen müssen, wächst doch die Zahl der speziell für die Nachrichten- und Funkmeßtechnik des VHF-, UHF- und SHF-Gebiets entwickelten Materialien unaufhörlich. Hier werden ganz bestimmte Stoffeigenschaften gefordert und gezüchtet, wobei sowohl bei der Entwicklung und der Fertigung wie schließlich auch in der weiterverarbeitenden Industrie ein immer höherer Aufwand an Meßmitteln und auch an Meßgenauigkeit getrieben werden muß.

Zu den interessantesten Stoffen dieser Art zählen die Ferrite, die als isotrope induktionssteigernde Körper bereits bis ins Mikrowellengebiet vorgedrungen sind. Ihre Anisotropie unter dem Einfluß eines statischen Magnetfeldes führte zu neuen nichtreziproken Bauelementen, wie den Gyrotoren, Faradayrotatoren und „Isolatoren“. Ebenso wesentlich sind die Arbeiten auf dem Gebiet der Isolierstoffe, die bis zu hohen Frequenzen und innerhalb großer Temperaturintervalle kleine Verluste bei gleichzeitiger Formbeständigkeit haben sollen.

Ansätze zu einer Mikrowellenmeßtechnik flüssiger Stoffe finden sich bereits bei Drude [1], jedoch erst sehr viel später, als die homogene Leitung als Meßinstrument [2], [3], [4] Eingang in die Hochfrequenztechnik gefunden hatte, wurden für technische Messungen brauchbare Anordnungen beschrieben [5], [6], [7].

Die Forderung nach einer universellen Meßanordnung, die eine kontinuierliche spektrale Auflösung großer Frequenzintervalle mit einem großen Temperaturmeßbereich verbindet und dabei alle 4 Stoffkonstanten gleichzeitig erfaßt, führte zur Entwicklung des abschließend beschriebenen Meßplatzes.

2. Die Stoffkonstanten ϵ , μ , δ_ϵ und δ_μ , bezogen auf die Ausbreitungskonstanten \tilde{Z}_m , γ_m homogener, stoffgefüllter Leitungsstücke

Die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in einem homogenen oder auch quasihomogenen [7], isotropen Medium wird durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben

$$\text{rot } \mathfrak{H} = j \omega \mathfrak{E} \cdot \tilde{D} \tag{1}$$

(eingeschwungener Zustand)

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -j \omega \mathfrak{H} \cdot \tilde{H} \tag{2}$$

darin sind

\mathfrak{H} die magnetische Feldstärke

\mathfrak{E} die elektrische Feldstärke

\tilde{D} die komplexe Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon_0 \cdot \tilde{\epsilon} = \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'') = \epsilon_0 |\tilde{\epsilon}| \cdot e^{-j\delta_\epsilon} \tag{3}$$

\tilde{H} die komplexe Permeabilität

$$\mu_0 \cdot \tilde{\mu} = \mu_0 (\mu' - j\mu'') = \mu_0 |\tilde{\mu}| \cdot e^{-j\delta_\mu} \tag{4}$$

δ_ϵ umfaßt alle elektrischen Verluste durch Leitfähigkeit, Nachwirkung, Umpolarisation usw.

δ_μ alle magnetischen Verluste durch Wirbelstrom, Hysterese, Wandverschiebung, gyromagnetische Resonanzerscheinungen usw.

Für den hier ausschließlich behandelten Fall der ebenen Welle (Ausbreitung in x -Richtung) gehen sie über in die für \mathfrak{E} - und \mathfrak{H} -Felder gleichlautende sogenannte Telegraphengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + A \omega^2 \tilde{H} \tilde{D} = 0 \tag{5}$$

deren allgemeine Lösung durch eine Summe aus links- und rechtsläufigen Wellenkomponenten gegeben ist

$$\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \mathfrak{E}_2 \cdot e^{\gamma x}) e^{j\omega t} \tag{6}$$

mit der Ausbreitungskonstante γ_m des Mediums (m) (bzw. eines stoffgefüllten, homogenen Leitungsstücks).

$$\gamma_m = j \omega \sqrt{\tilde{H} \cdot \tilde{D}} = j \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon} \cdot \tilde{\mu}} = |\gamma_m| \cdot e^{j\varphi} = \alpha_m + j\beta_m \tag{7}$$

Der Zusammenhang zwischen der Ausbreitungskonstante γ_m eines Mediums, bzw. eines mit diesem erfüllten, homogenen Leitungsstücks und dem komplexen Brechindex \tilde{n}

$$\tilde{n} = n (1 - j\kappa) = \sqrt{\tilde{\epsilon} \tilde{\mu}} \tag{8}$$

ist somit gegeben durch

$$\gamma_m = \frac{\omega}{c} \cdot \tilde{n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \tilde{n} \tag{9}$$

mit der Phasenkonstante

$$\frac{c_2}{c} = \tilde{n}$$

$$\beta_m = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n$$

(n = reeller Brechindex)

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\epsilon' \mu'}{2} \{ \sqrt{(1 + \tan^2 \delta_\epsilon)(1 + \tan^2 \delta_\mu)} + (1 - \tan \delta_\epsilon \cdot \tan \delta_\mu) \}} \tag{10}$$

und der Dämpfungskonstanten

$$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \cdot x \quad (x = \text{Absorptionsindex})$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\epsilon' \mu'}{2} \left\{ \sqrt{(1 + \tan^2 \delta_\epsilon)(1 + \tan^2 \delta_\mu)} - (1 - \tan \delta_\epsilon \tan \delta_\mu) \right\}} \quad (11)$$

Der Feldwellenwiderstand β_m des stoffgefüllten freien Raumes als Verhältnis von elektrischem zu magnetischem Feld bei rein fortschreitender Welle folgt aus (6) und (1) zu

$$\beta_m = \frac{\vec{E}}{\vec{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \beta_0 \sqrt{\frac{|\mu|}{|\epsilon|}} e^{j\frac{\delta_\epsilon - \delta_\mu}{2}} \quad (12)$$

Während die Ausbreitungskonstante γ_m des freien Raumes und der verlustlosen homogenen Leitung nur durch den komplexen Brechindex bestimmt und somit beide gleich sind, ohne Rücksicht auf die Form des Leitungsquerschnitts; ist der Wellenwiderstand der stoffgefüllten Leitung außer durch μ und ϵ durch deren Querschnittsgeometrie bedingt.

Für koaxiale Leitungen mit Außenradius R und Innenradius r ist auf einem beliebigen, zwischen R und r gelegenen Radius a

$$\vec{E} = -\frac{\vec{u}_L}{a \cdot \ln \frac{R}{r}}; \quad \vec{H} = \frac{\vec{i}}{2\pi a} \quad (13)$$

Somit wird der Leitungswellenwiderstand

$$\bar{Z}_m = \frac{u_0}{i_0} = \beta_m \frac{\ln \frac{R}{r}}{2\pi} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln \frac{R}{r} = Z_0 \sqrt{\frac{|\mu|}{|\epsilon|}} e^{j\frac{\delta_\epsilon - \delta_\mu}{2}}$$

$$= |\bar{Z}_m| e^{j\zeta} \quad (14)$$

Feld- und Leitungswellenwiderstand unterscheiden sich also bei Verwendung komplexer isotroper Medien, ebenso wie bei Luft, nur durch einen geometriebedingten Formfaktor

$\left(\frac{2\pi}{\ln \frac{R}{r}} \right.$ für koaxiale Leitungen, 2π für $Z_0 = 60 \Omega$), während

ihre Phasenwinkel die gleichen sind.

Ist γ_m und \bar{Z}_m durch Messung bestimmt worden, so ergibt sich aus (7) und (14)

$$|\epsilon| = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{|\gamma_m|}{|\bar{Z}_m|} \quad (15)$$

$$|\mu| = \frac{\lambda_0}{2\pi} |\gamma_m| \cdot |\bar{Z}_m| \quad (16)$$

$$\delta_\epsilon = 90^\circ - \psi + \zeta \quad (17)$$

$$\delta_\mu = 90^\circ - \psi - \zeta \quad (18)$$

hierin ist $\bar{z}_m = \frac{\bar{Z}_m}{Z_0}$ der bezogene Wellenwiderstand, der für freie wie leitungsgebundene Wellen den gleichen Wert hat und nur von ϵ und μ abhängt.

Anisotrope Medien sollen in diesem Zusammenhang nicht behandelt werden.

3. Verfahren zur Bestimmung von \bar{z}_m und γ_m

Die Messung von \bar{z}_m und γ_m könnte ebensogut mit freien wie mit leitungsgebundenen Wellen vorgenommen werden. Obwohl die freie Welle — vor allem bei hohen ϵ -Werten — den erheblichen Vorteil für sich hat, daß keine Scheerung der Dielektrizitätskonstante durch Passungsluft stattfindet, wird in den meisten Fällen doch den Leitungen der Vorzug gegeben, in denen auch das Freiraumverhalten einzelner und gestaffelter Schichten hinsichtlich Reflexion und Absorption untersucht werden kann.

Aus der Zahl der möglichen Leitungsquerschnitte erschien der koaxiale am geeignetsten, da vorzugsweise Drehkörper Verwendung finden, die sowohl den hohen Anforderungen an Absolutgenauigkeit der Querabmessungen und Längshomogenität genügen können wie auch den erforderlichen strengen Paßsitz der Meßproben rationell herzustellen gestatten;

Der zu messende Stoff wird in Form einer koaxialen Probe in den Zug einer homogenen Leitung eingebracht. Seine der ankommenden Welle zugewendete Begrenzungsfläche soll plan-

parallel zur rückwärtigen und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle, also parallel zu ihren elektrischen und magnetischen Feldkomponenten sein, um Feldverzerrungen an der Übergangsstelle Luft/Medium zu vermeiden (Abb. 1).

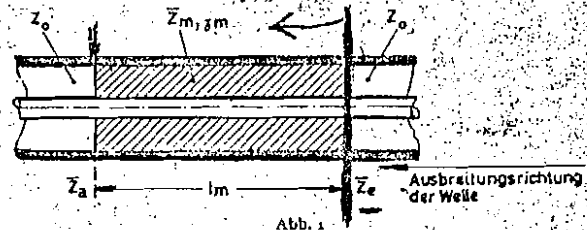


Abb. 1
Planparallele Stoffprobe in einer koaxialen Leitung
Plane parallel specimen in a coaxial line
Echantillon plan-parallèle dans une ligne coaxiale

Unter diesen Voraussetzungen kann das stoffgefüllte Leitungsstück als symmetrischer Leitungsvierpol betrachtet werden, dessen Ausbreitungskonstanten \bar{Z}_m und γ_m aus der Abhängigkeit seiner Eingangsimpedanz \bar{Z}_e von der jeweiligen Ausgangsimpedanz \bar{Z}_a hergeleitet werden können.

$$\bar{Z}_e = \left(\bar{Z}_m \right) \frac{\bar{Z}_a + \bar{Z}_m \tanh \gamma_m l_m}{\bar{Z}_m + \bar{Z}_a \tanh \gamma_m l_m} \quad (19)$$

Zur Bestimmung der 4 Konstanten komplexer permeabler Stoffe werden \bar{Z}_m und γ_m und somit mindestens 2 Impedanzwerte benötigt.

Nach (19) ergeben sich nur dann unterschiedliche Werte für \bar{Z}_e abhängig von \bar{Z}_a , wenn $\tanh \gamma_m l_m \neq 1$ ist, d. h., wenn die gesamte Hin- und Rücklaufdämpfung nicht zu groß wird. Das Material muß in seiner Dicke l_m also so gewählt werden, daß noch eine merkliche Reaktion der Eingangsimpedanz auf Änderungen der Ausgangsimpedanz \bar{Z}_a festgestellt werden kann.

Bei unmagnetischen Stoffen genügt es \bar{Z}_m zu kennen um daraus ϵ und δ_ϵ zu ermitteln (siehe (14)). Nach (19) wird $\bar{Z}_e = \bar{Z}_m$ wenn α_m und l_m genügend hoch sind, gleichgültig ob die Meßprobe kurzgeschlossen ist oder leerläuft. Unter Berücksichtigung von Abschnitt 4 ergeben sich ϵ und δ_ϵ dann einfach nach Gl. (74a) und (75a), Abschnitt 5.

3.1 Kurzschluß-Leerlauf-Verfahren (allg. Verfahren für komplexe Permeabilität und Dielektrizitätskonstante)

3.1.1 Eigendämpfung der Leitung vernachlässigt

Genau bekannte komplexe Werte für \bar{Z}_a sind im VHF-, UHF- und SHF-Gebiet nur mit erheblichem Aufwand darstellbar. Man beschränkt sich daher auf reine Reaktanzen und unter diesen wieder ergeben $\bar{Z}_a = 0$ und $\bar{Z}_a = \infty$ eine besonders einfache und übersichtliche Auswertung.

So wird

$$\text{für } \bar{Z}_a = 0 \quad \bar{Z}_K = \bar{Z}_m \tanh \gamma_m l_m \quad (\text{Kurzschluß}) \quad (20)$$

$$\text{für } \bar{Z}_a = \infty \quad \bar{Z}_L = \bar{Z}_m \operatorname{ctnh} \gamma_m l_m \quad (\text{Leerlauf}) \quad (21)$$

und daraus

$$\bar{Z}_m = \sqrt{\bar{Z}_K \cdot \bar{Z}_L} = \bar{Z}_m e^{j\zeta} \quad (22)$$

Es folgt

$$\tanh \gamma_m l_m = \sqrt{\frac{\bar{Z}_K}{\bar{Z}_L}} = t \cdot e^{j\tau} \quad (23)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2 l_m} \tanh^{-1} \frac{2 t \cos \tau}{1 + t^2} = \frac{1}{4 l_m} \ln \frac{1 + t^2 + 2 t \cos \tau}{1 + t^2 - 2 t \cos \tau} \quad (24)$$

und

$$\beta_m = \frac{1}{2 l_m} \arctan \frac{2 t \sin \tau}{1 - t^2} + k \pi \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

und damit

$$|\gamma_m| = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} \quad (26)$$

$$\psi = \arctan \frac{\beta_m}{\alpha_m} \quad (27)$$

Wie man sieht, ist β_m zunächst vieldeutig, da bei völlig unbekanntem Medium kein Anhaltspunkt darüber vorliegt, wie viele Wellenlängen im Material stehen. Es gibt verschiedene Wege, um darüber Klarheit zu erlangen.

Der eine besteht darin, mit mindestens zwei verschiedenen Probendicken bei ein und derselben Frequenz zu messen. Setzt man nun bei der Auswertung für k verschiedene Werte an, so ergibt sich für beide Proben eine entsprechende Anzahl von denkbaren β_m -Werten. Wenn man die Probendicken l_m so gewählt hat, daß sie nicht in einem geradzahigen Verhältnis zueinander stehen, wird man einen einzigen β_m -Wert finden, der in beiden β_m -Reihen übereinstimmt. Am besten ist es natürlich — bei annähernd bekannten ϵ - μ -Werten —, die Probendicke von vornherein so zu dimensionieren, daß $\beta_m \cdot l_m < 180^\circ$ ist, d. h., daß weniger als eine halbe Wellenlänge in der Probe steht. Dann ist das Resultat jedenfalls eindeutig.

Man kann die Anzahl k der in der Probe stehenden Halbwellen und damit β_m auch durch eine zweite Messung ein und derselben Probe bei einer um Δf versetzten Frequenz f' ermitteln; unter der Voraussetzung, daß die Konstanten ϵ , μ , $\text{tg } \delta_\epsilon$ und $\text{tg } \delta_\mu$ sich innerhalb des Frequenzintervalls Δf nicht oder nur wenig ändern.

Nachdem

$$\beta_m = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{|\epsilon| \cdot |\mu|} \cdot \sin \left(90^\circ - \frac{\delta_\epsilon + \delta_\mu}{2} \right)$$

kann man setzen

$$\frac{\Delta \beta_m}{\beta_m} = \frac{\Delta f}{f} \quad (28)$$

Diese Bedingung ist nur für einen, nämlich den richtigen β_m -Wert erfüllt.

Durch Einsetzen von (22), (26) und (27) in (15) mit (18) erhält man schließlich die gesuchten Stoffkonstanten.

Das soeben beschriebene allgemeine Auswerteverfahren läßt sich für verlustlose und nichtmagnetische Stoffe erheblich vereinfachen. Entsprechende Hinweise finden sich in Abschnitt 5.

3.12. Eigendämpfung der Probenleitung sowie der der Probe nachgeschalteten Kurzschluß- bzw. Leerlaufleitung berücksichtigt

In den meisten praktisch vorkommenden Fällen sind die durch permeable Stoffe erzeugten Dämpfungen so hoch, daß die Eigendämpfung von der, der Meßprobe nachgeschalteten Kurzschluß- bzw. Leerlaufleitung (ungünstigenfalls zirka $1-2 \cdot 10^{-3}$ Np) dagegen vernachlässigt werden kann.

i Messungen abhängig von der Temperatur finden sogenannte Temperaturtrennstücke — koaxiale Leitungsabschnitte mit geringer Wärmeleitung des Wellenwiderstands Z_0 und der elektrischen Länge l_T — Verwendung, die einen einfachen Kurzschluß hinter der Meßprobe nicht mehr zulassen. Die der Meßprobe nachgeschaltete Leitung muß dann

$k \cdot \frac{\lambda_0}{2}$ lang gemacht werden. Die tatsächliche Einstellung l_k an der Reaktanzleitung (Abb. 2), mit deren Hilfe die unterschiedlichen Werte von Z_a erzeugt werden können, ergibt sich gemgemäß aus

$$l_{kK} + l_T = k \cdot \frac{\lambda_0}{2} \quad (\text{für Kurzschluß}) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

$$l_{kL} + l_T = (2k - 1) \cdot \frac{\lambda_0}{4} \quad (\text{für Leerlauf}) \quad (30)$$

Diese Verlängerung der der Probe nachgeschalteten Leitung kann die Eigendämpfung u. U. erheblich erhöhen. Zum Unterschied vom Wellenwiderstand Z_m eines von Eigenverlusten freien, stoffgefüllten Leitungsstücks sei — unter Berücksichtigung der durch unvollkommene Leitung erzeugten Stromverluste — dieser Wellenwiderstand hier Z_p genannt.

Scheint der für eine entsprechende Korrektur des Resultats nötige zeitliche Aufwand vertretbar, so kann man folgendermaßen vorgehen:

Die Auswertung erfolgt zunächst so, als beständen keine Eigenverluste (siehe Abschnitt 5.1, Formelsammlung). Sie führt zu bestimmten Werten von Z_m , $\beta_m l_m$ und $\gamma_m l_m$. (Solange $\alpha_m l_m > 0,1$ ist, lohnt sich die nachstehende Korrekturrechnung nicht.)

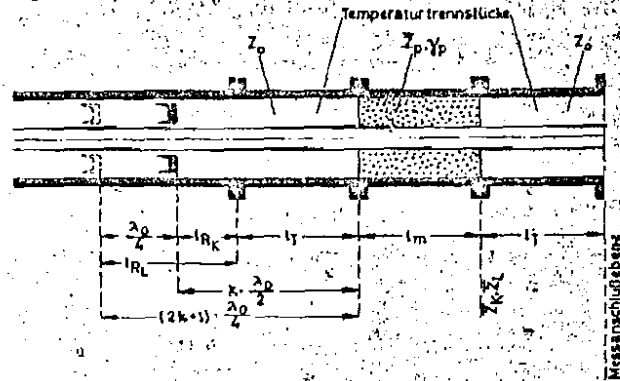


Abb. 2

Zur Berücksichtigung der Eigenverluste der koaxialen Leitung hinter der Stoffprobe
Allowance for inherent losses of the coaxial line following the specimen
Appréciation des pertes inhérentes à la ligne coaxiale derrière l'échantillon

Ausgangspunkt der Betrachtung zur Bestimmung von Z_m und γ_m war, daß Z_a ein reiner Kurzschluß oder Leerlauf sei. An deren Stelle tritt nun:

$$Z_{aK} = Z_0 \cdot \alpha_0 (l_{kK} + l_T) \quad (\text{anstelle des idealen Kurzschlusses}) \quad (31)$$

$$Z_{aL} = Z_0 \cdot \frac{1}{\alpha_0 (l_{kL} + l_T)} \quad (\text{anstelle des idealen Leerlaufs}), \quad (32)$$

Bezieht man Z_{aK} und Z_{aL} auf das nach 5.1 ausgewertete Z_m (zulässige Näherung), so gilt mit $\frac{Z_{aK}}{Z_m} = \bar{d}_K$ und $\frac{Z_{aL}}{Z_m} = \bar{d}_L$ unter Zuhilfenahme von (19) für den korrigierten $\tanh \gamma_p l_m$

$$\tanh \gamma_p l_m = \sqrt{\frac{Z_K}{Z_L}} \left\{ 1 - \frac{\bar{d}_K - \bar{d}_L}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{Z_L}{Z_K}} - \sqrt{\frac{Z_K}{Z_L}} \right) \right\} \quad (33)$$

und für den Wellenwiderstand:

$$Z_p = \sqrt{Z_K \cdot Z_L} \cdot \left(1 - j \cdot \frac{\bar{d}_L - \bar{d}_K}{2 \frac{\tan \beta_m l_m}{1 + \tan^2 \beta_m l_m} + j(\bar{d}_K + \tanh \alpha_m l_m)} \right) \quad (34)$$

Der nachträgliche Vergleich zwischen Z_p und dem aus 5.1 erhaltenen Z_m gestattet abzuschätzen, wie groß der Grad der Näherung ist.

Schließlich kann noch die Eigendämpfung der Probenleitung über die Länge l_m berücksichtigt werden, indem man $\frac{R'}{\mu' \omega L'}$ mittels α_0 und μ' bildet und diesen „Leitungsverlustwinkeltangens“, der praktisch stets durch sein Argument ersetzt werden kann, von dem nach 5.1 gemessenen $\delta_{\mu(p)}$ abzieht.

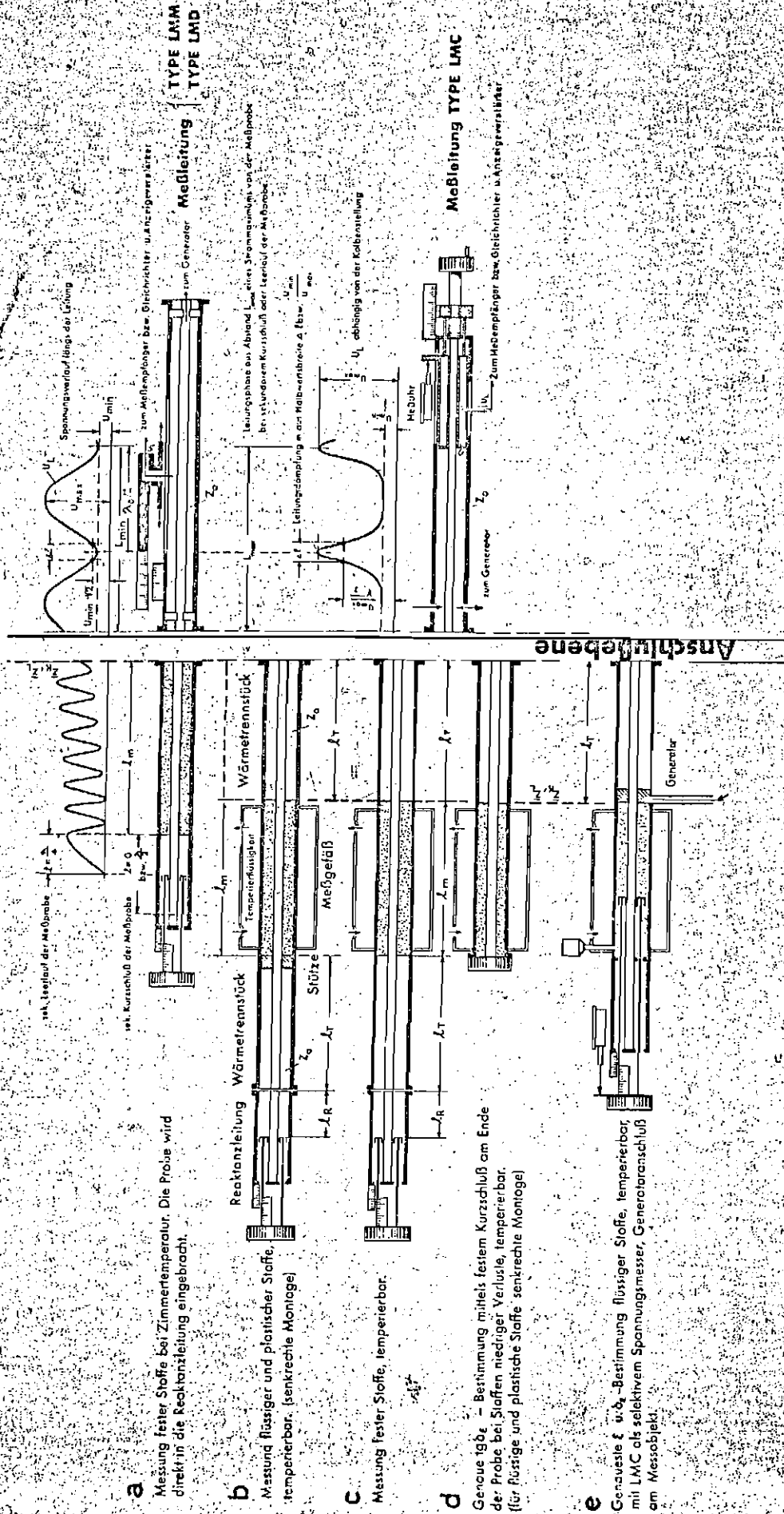
$$\delta_\mu = \delta_{\mu(p)} - \alpha_0 \frac{\lambda_0}{\pi \mu'} \quad (35)$$

Damit liegt dann auch Z_m und γ_m endgültig fest.

Leider ist ein einfacheres Verfahren zur Berücksichtigung der Kurzschluß-Leerlauf-Verluste in Reaktanzleitung und Temperaturtrennstück nicht möglich, da \bar{d}_K und \bar{d}_L erst bestimmt werden können, wenn Z_m in erster Näherung bekannt ist. Die Wand- und Kontaktdämpfung des Kurzschlußkolbens, die praktisch stets zwischen 10^{-3} und 10^{-4} Np liegt, wurde auch hier außer Betracht gelassen.

3.2 Kurzschlußverfahren

Das Kurzschlußverfahren ist besonders vorteilhaft zur Bestimmung sehr kleiner Verlustwinkel an festen und flüssigen, unmagnetischen Stoffen. Während beim Kurzschluß-Leerlauf-Verfahren die Meßprobe ausgangseitig mit unterschied-



a Messung fester Stoffe bei Zimmertemperatur. Die Probe wird direkt in die Reaktionsleitung eingebracht.

b Messung flüssiger und plastischer Stoffe, temperierbar. (senkrechte Montage)

c Messung fester Stoffe, temperierbar.

d Genaue ϵ u. ρ_v -Bestimmung mittels festem Kurzschluß am Ende der Probe bei Stoffen niedriger Verluste, temperierbar. (für flüssige und plastische Stoffe: senkrechte Montage)

e Genaue ϵ u. ρ_v -Bestimmung flüssiger Stoffe, temperierbar mit LMC als selektivem Spannungsmesser, Generatoranschluß am Meßobjekt.

Abb. 7

Einige charakteristische Kombinationen von Meßleitung und Probenanordnung
 A few representative combinations of standing wave detector and coaxial specimen container

Quelques combinaisons typiques de ligne de mesures et cellule coaxiale

φ der Eingangsimpedanz Z_e durch δ_e läuft. Man findet sie bei kontinuierlicher Registrierung der Eingangsimpedanz aus den Berührungspunkten der Einhüllenden aller Impedanzmaxima bzw. Minima mit der Impedanzbetragskurve. Über Flüssigkeitsmessungen nach diesem Verfahren soll zu einem späteren Zeitpunkt eingehender berichtet werden.

5.33 Leerlaufverfahren siehe 5.12

5.4 Unmagnetische Isolatoren ($\delta_e \rightarrow 0$), Abb. 7a mit c) Genaue ϵ' -Bestimmungen lassen sich auch noch bei Verlustwinkeln $\delta_e < 10^{-2}$ ohne Berücksichtigung aller durch Probe und Leitung bewirkten Dämpfungen durchführen nach der Formel

$$\epsilon' = -\cotan \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{\min K} \cdot \cotan \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{\max L} \quad (81)$$

Diese Formel ergibt eindeutige Resultate ohne Rücksicht auf die Probelängen und der Zahl der Wellenlängen innerhalb der Probe.

An die Stelle von $L_{\min K}$ und $L_{\max L}$ bei normalen, geschlitzten Meßleitungen tritt $L_{\max K}$ und $L_{\max L}$ bei der schlitzlosen Meßleitung Type LMC.

6. Fehlerquellen

Näherungen in den Auswertungsformeln, die bei Überschreitung der angegebenen Grenzen zu Fehlern führen könnten sind in den vorangehenden Abschnitten bereits ausführlich behandelt worden, ebenso der Einfluß der Leitungsdämpfung.

Abweichungen der Meßprobe von den Soll-Durchmessern des Meßkoaxials äußern sich als Passungsluft, die sämtliche vier Stoffkonstanten in unterschiedlicher Weise beeinflusst (6.1). Diese, sowie die Beeinflussung des Resultats durch Schwankungen der Meßfrequenz zwischen einer Kurzschluß- und

einer Leerlaufmessung ($\frac{\Delta f}{f}$ bzw. $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$) durch Meßfehler bei der

Bestimmung von L_{\min} bzw. L_{\max} sowie von m^* (6.2) seien nachfolgend untersucht.

6.1 Fehler durch Luftschlitze zwischen Meßprobe und Koaxialleitung

Die für die Fehlerbetrachtung wesentlichen Abmessungen ergeben sich aus Abb. 8.

Unter der Voraussetzung, daß die Probe von einer rein transversalen Welle durchlaufen wird, die bei mäßig hohen Konstanten und fehlenden Anregungsbedingungen für andere Moden, d. h. guter Zirkularsymmetrie von Leitung und Probe, bis zur Grenzwellenlänge der Leitung erfüllt ist, kann man den Schlitzfehler aus drei in Serie liegenden Induktivitäten bzw. Kapazitäten errechnen. Eine Scherung des μ durch Risse der Ringprobe bleibe außer Betracht, da sie vermeidbar ist und die Rißspalte quantitativ doch nicht erfassbar sind.

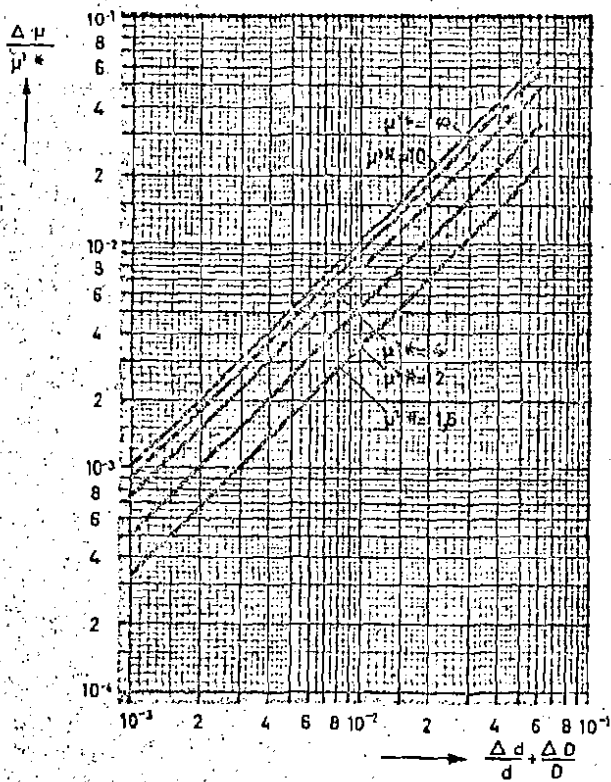


Abb. 10.

Fehler $\Delta\mu$ bezogen auf den gemessenen Wert μ^* abhängig von den relativen Luftspalten

$$\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D} \text{ für } Z = 60 \Omega$$

Error $\Delta\mu$ referred to the measured value μ^* , as a function of the relative air gaps

$$\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D}, \text{ for } Z = 60 \Omega$$

Erreur $\Delta\mu$ rapportée à la valeur mesurée μ^* , en fonction des espaces d'air relatifs

$$\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D}, \text{ avec } Z = 60 \Omega$$

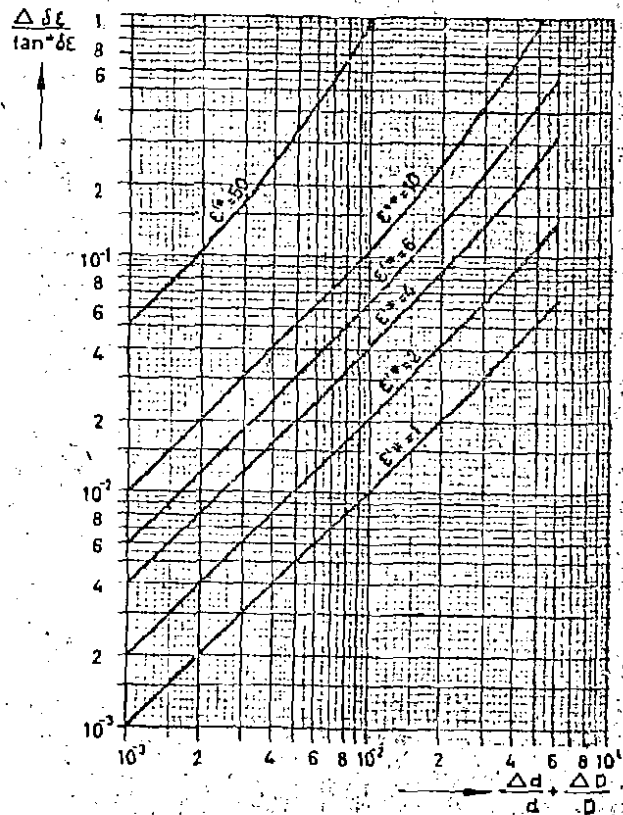


Abb. 11.

Fehler $\Delta \delta_e$ bezogen auf den gemessenen Wert $\tan^2 \delta_e$ abhängig von den relativen Luftspalten

$$\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D} \text{ für } Z = 60 \Omega$$

Error $\Delta \delta_e$ referred to the measured value $\tan^2 \delta_e$, as a function of the relative air gaps

$$\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D}, \text{ for } Z = 60 \Omega$$

Erreur $\Delta \delta_e$ rapportée à la valeur mesurée $\tan^2 \delta_e$, en fonction des espaces d'air relatifs

$$\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta D}{D}, \text{ avec } Z = 60 \Omega$$

Von seiten der Meßprobe wurde Homogenität des Materials vorausgesetzt. Abweichungen davon können so vielerstaltig in ihrer Struktur und ihrem Ausmaß sein, daß sie hier nicht aufgeführt werden können.

Aus der Addition der drei Teilflüsse im Ringquerschnitt ergibt sich der Zusammenhang zwischen der gemessenen (zu kleinen) Permeabilität μ^* und der gesuchten Materialkonstante μ' zu

1 Differentialgleichungen der Leitung und Lösung im eingeschwungenen Zustand

1.1 Elektrische Leitungen, elektromagnetische Wellenleiter und Ausbreitungsvorgänge in anderen Medien

Arten elektrischer Leitungen

Elektrische Leitungen dienen in der Energietechnik in erster Linie direkt zur Energieübertragung. In der Nachrichtentechnik dienen sie vorwiegend zur Übertragung von Signalen. In der Hochfrequenztechnik werden Leitungen aber auch als Schaltelemente in Netzwerken verwendet.

Leitungsarten

Um die verschiedenartigen Aufgaben jeweils am besten zu lösen, wurde eine große Anzahl von Leitungsformen entwickelt. In Bild 1.1 sind die wichtigsten Beispiele zusammengestellt.

Dieses Bild gibt in tabellarischer Form für die jeweiligen Leitungsarten ihre Bezeichnung, die prinzipielle Querschnittsform und die Anwendung. Es erklärt auch, allerdings nur ganz knapp aber anschaulich den physikalischen Ausbreitungsvorgang der verschiedenen Leitungsarten. Schließlich werden auch noch die theoretischen und praktischen Grenzen für die Frequenz der elektromagnetischen Schwingungen angedeutet, die sich mit der jeweiligen Leitungsart grundsätzlich übertragen lassen. Bei den **Doppelleitungen** und Leitungssystemen mit mehr als zwei Leitern kann man sich die einfachste und praktisch wichtigste Art von Wellenausbreitung mit Strömen erklären, die in den Leitern fließen, wenn Spannungen angelegt werden. Doppel- oder **Mehrfachleitungen** können auf diese Weise Gleichstrom übertragen oder auch Wechselstrom beliebiger Frequenz. Praktisch steigen allerdings die Verluste, welche die Wechselströme in den Leitern erfahren, mit der Frequenz an, ebenso wie auch die dielektrischen Verluste zwischen den Leitern zu höheren Frequenzen im allgemeinen wachsen. Schließlich kann sich bei sehr hohen Frequenzen elektromagnetische Energie auch noch in anderen Wellenformen ausbreiten als der einfachen Form, die dem Strom-Spannungsbild entspricht. Diese sogenannten **Störwellen** beeinträchtigen die Übertragung praktisch so stark, daß sie für die Anwendung von Doppel- und Mehrfachleitungen dort eine Grenze setzen, wo die

Verluste

freie Wellenlänge $\lambda = 1/(f\sqrt{\mu\epsilon})$ der Schwingung im unendlich ausgedehnten Stoff mit den Konstanten μ und ϵ des Leitungsdielektrikums in die Größenordnung der Querschnittsabmessungen kommt.

| Art | Typ | Querschnittsform | Anwendung | physikalischer Ausbreitungsvorgang | Frequenzgebiet |
|---------------------------------------|--------------------|------------------|--|--|---|
| Doppelleitungen und Mehrleitersysteme | koaxial | | Energieübertragung Signalübertragung Schaltelement | <i>elektrisch:</i> Angelegte Spannung verursacht Ströme in den Leitern. | <i>theoretisch:</i> $0 < f < \infty$ |
| | Parallel- draht | | Energieübertragung. Signalübertragung | | <i>praktisch:</i> keine untere Frequenzgrenze; obere Frequenzgrenze durch Dämpfung und Störwellen |
| | Streifen | | Energieübertragung Signalübertragung Schaltelement | | |
| | Drehstrom | | Energieübertragung Signalübertragung | | |

Bild 1.1 a: Leitungs- und Wellenleiterformen mit ihren Anwendungen

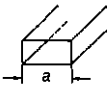

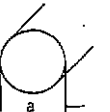
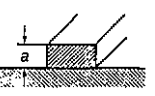

| Art | Typ | Querschnittsform | Anwendung | physikalischer Ausbreitungsvorgang | Frequenzgebiet |
|-----------------------|-----------------------------------|---|---|---|--|
| Hohlleiter | Rechteck |  | Signalübertragung Schaltelement | <i>quasioptisch:</i> Elektromagnetische Wellen breiten sich im Inneren unter fortwährender Reflexion an den Wänden nach den Gesetzen der Optik aus.  | <i>theoretisch:</i> $f_g < f < \infty$ mit $f_g = \frac{1}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$ <i>praktisch:</i> obere Frequenzgrenze durch Störwellen, bzw. Streuung und Dämpfung |
| | Rund |  | | | |
| optische Wellenleiter | Filme und Streifen auf Substraten |  | Schalt- und Verbindungselemente der planaren und integrierten Optik | <i>quasioptisch:</i> Elektromagnetische Wellen im Streifen bzw. Faserkern erfahren unter genügend kleinen Winkeln zur Achse Totalreflexion an den Grenzschichten. Ausbreitung ähnlich wie im Hohlleiter | <i>theoretisch:</i> $0 < f < \infty$ <i>praktisch:</i> untere und obere Frequenzgrenzen durch Dämpfung, Strahlung, Störwellen |
| | Glasfasern |  | optische Signalübertragung | | |

Bild 1.1b: Leitungs- und Wellenleiterformen mit ihren Anwendungen

Die Hohlleiter und optischen Wellenleiter in Bild 1.1b kommen praktisch nur zur Übertragung sehr hochfrequenter Schwingungen, den sogenannten Mikrowellen mit Wellenlängen im Bereich von Zentimetern und Millimetern in Frage, die optischen Wellenleiter in planarer Film- und Streifenform bzw. als runde Glasfaser sogar erst für optische Wellen im Bereich des infraroten und sichtbaren Lichtes. Bei den Hohlleitern und optischen Wellenleitern läßt sich die Ausbreitung nicht mehr mit Spannungen und Strömen erklären sondern optisch mit Wellenstrahlen, die auf Zick-Zackwegen wandern und immer wieder an den metallischen Seitenwänden der Hohlleiter reflektiert bzw. an den Grenzschichten der dielektrischen Wellenleiter total reflektiert werden.

Die Wellenformen, in denen sich die elektromagnetische Energie längs dieser Leitungen ausbreitet, entsprechen ihrer Natur nach den unerwünschten Störwellen der Doppel- und Mehrfachleitungen. Sie breiten sich darum auch erst bei Frequenzen aus, zu denen freie Wellenlängen gehören, die in der Größenordnung der Querschnittsabmessungen dieser Wellenleiter liegen oder noch kürzer sind.

Mit steigender Frequenz sind bei einem bestimmten Hohl- oder optischen Wellenleiter nur eine oder wenige Wellen ausbreitungsfähig. Es werden dann aber immer mehr. Darum und auch wegen zunehmender Verluste gibt es auch obere Frequenzgrenzen für Hohlleiter und optische Wellenleiter.

In dem ersten Teil dieses Kurses befassen wir uns fast ausschließlich mit Doppel- und Mehrfachleitungen. Wir werden die Wellenausbreitung auf diesen Leitungen an Hand der Leiterspannungen und -ströme beschreiben und berechnen. Die allgemeinen Gesetze, die wir dafür ableiten, werden wir in späteren Abschnitten auch für die Wellen in Hohlleitern und optischen Wellenleitern wiederfinden.

Allen Leitungen und Wellenleitern in Bild 1.1 gemeinsam ist ihre zylindrische Struktur. Ihre Querschnittsabmessungen und elektrischen Eigenschaften ändern sich nicht entlang der Leitung. Es sollen hier zunächst nur Leitungen behandelt werden, die in diesem Sinne zylindrisch sind.

Für die elektromagnetischen Erscheinungen auf Leitungen ist ihre verteilte Natur und räumliche Ausdehnung maßgebend. Sonst können die Bauelemente der Elektrotechnik durch konzentrierte Schaltelemente wie Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten dargestellt werden, und beim Einschalten einer Spannung beginnen sofort überall in der Schaltung Ströme zu fließen. Wir wissen aber, daß sich elektromagnetische Vorgänge höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Das gilt natürlich auch für Leitungen. Strom- und Spannungsänderungen pflanzen sich also auf Leitungen mit endlicher Geschwindigkeit fort und werden erst nach bestimmten Zeiten entlang der Leitung wirksam. Die Untersuchung dieser Ausbreitungsvorgänge erfordert Betrachtungsweisen, die grundsätzlich anders sind als für Kreise aus konzentrierten Schaltelementen.

Diese Betrachtungsweisen und Berechnungsmethoden gelten dann aber nicht nur für elektrische Leitungen, sondern für alle physikalischen Vorgänge, die sich in entsprechenden Medien mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Das sind beispielsweise:

1. Elektromagnetische Felder im freien Raum oder in Leitern, Halbleitern, Dielektrika, Magnetika und Plasmen;

Totalreflexion

Voraussetzungen

Allgemeine

2. Schallwellen in Gasen, Flüssigkeiten oder festen Körpern;
3. Mechanische Schwingungen von Membranen und Saiten;
4. Wärmeausgleichsvorgänge;
5. Physikalische und chemische Diffusionsvorgänge.

Alle diese Ausbreitungsvorgänge sind für den Ingenieur von Interesse, und die meisten von ihnen haben auch, obwohl nicht direkt elektromagnetisch, in der Elektrotechnik Bedeutung.

Modellcharakter In diesem Sinne ist die Theorie der elektrischen Leitungen neben ihrem Selbstzweck für den Elektrotechniker auch noch das beste Beispiel für physikalische Ausbreitungsvorgänge aller Art. Die Gesetze aller dieser Ausbreitungsvorgänge lassen sich aus der Analogie zur elektrischen Leitung immer sofort erkennen. Die elektrische Leitung kann als Modell für Ausbreitungsvorgänge in anderen Medien dienen.

1.2 Die Differentialgleichungen der elektrischen Leitung

Um elektromagnetische Ausbreitungsvorgänge in aller Vollständigkeit zu erfassen, müßten wir die **Maxwellischen Gleichungen** für die Randbedingungen der Leitung allgemein lösen. Diese Aufgabe ist recht schwierig. Wir werden in späteren Abschnitten solche Lösungen für einige der Leitungen und Wellenleiter in Bild 1.1 herleiten. Hier sind wir aber erst einmal nur an Lösungen und den ihnen entsprechenden Ausbreitungsvorgängen interessiert, die sich zunächst qualitativ, dann aber auch quantitativ mit einfachen Ersatzbildern für die Leitung untersuchen lassen. Ähnlich wie Spulen durch Induktivitäten dargestellt werden oder Kondensatoren durch Kapazitäten, können wir auch für Leitungen einfache Ersatzbilder angeben (Bild 1.2).

Physikalische Erläuterungen Wir wählen dazu als Beispiel eine der Doppelleitungen aus Bild 1.1. Ein Strom i in den Leitern verursacht ein magnetisches Feld innerhalb und außerhalb der Leiter. Darum hat ein bestimmtes, kurzes Stück s der Leitung eine Induktivität L_s , und es gilt für den Induktionsfluß Φ_s , der im Abschnitt s mit dem Strom verknüpft ist:

$$\Phi_s = L_s \cdot i.$$

Ebensò ist mit einer Spannung u zwischen den Leitern ein elektrisches Feld verbunden, und die Feldkräfte influenzieren Ladungen auf den Oberflächen der Leiter. Das Leitungsstück s hat darum eine Kapazität C_s , und es gilt für die Ladung Q_s auf den Leiteroberflächen im Abschnitt s :

$$Q_s = C_s \cdot u$$

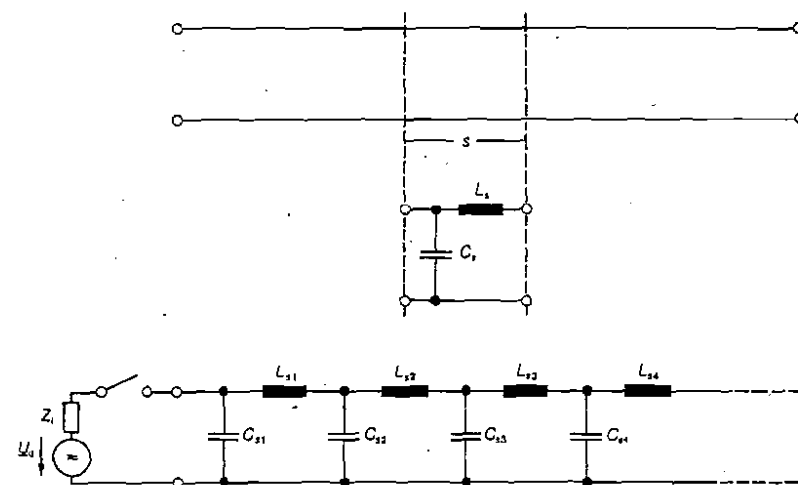


Bild 1.2 Einfaches Leitungsersatzbild zur Erklärung der Strom- und Spannungsausbreitung

Wie diese magnetischen und elektrischen Felder und damit die Induktivität L_s und die Kapazität C_s für bestimmte Leiterformen berechnet werden, wissen wir aus den Grundlagen der Elektrotechnik. Man kann diese Größen aber auch messen, wenn ein kurzes Stück der Leitung zur Verfügung steht. Wie in Bild 1.3 werden zur Bestimmung der Induktivität Strom und Spannung am Eingang des kurzgeschlossenen Leitungsstückes gemessen. Zur Bestimmung der Kapazität müssen sie am offenen Leitungsstück gemessen werden.

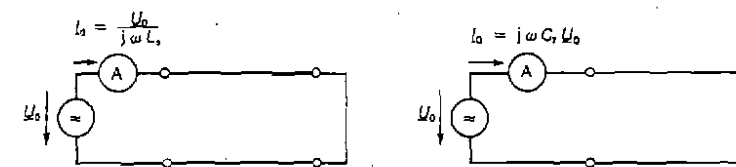


Bild 1.3 Messung von Längsinduktivität und Querkapazität

Stromänderungen und damit Änderungen des magnetischen Flusses führen nach dem Induktionsgesetz zu Induktionsspannungen. Für sie ist die Längsinduktivität L_s maßgebend. Spannungsänderungen bedingen eine Änderung der Ladung in C_s und damit einen Ladungsstrom.

Der Leitungsabschnitt s läßt sich also durch eine Längsinduktivität L_s und eine Querkapazität C_s darstellen (Bild 1.2). Die gesamte Leitung setzt sich aus vielen solchen Abschnitten zusammen.

Ausbreitung Eine qualitative Vorstellung vom Ausbreitungsvorgang gewinnen wir schon an diesem noch groben Ersatzbild: Eine Spannung, die am Eingang über einen Widerstand angeschaltet wird, muß zunächst die erste Kapazität C_{s1} aufladen, erst dann bildet sich eine Spannung an der ersten Längsinduktivität L_{s1} . Nun wird ein Strom durch L_{s1} von dieser Spannung aufgebaut, und allmählich beginnt sich damit C_{s2} aufzuladen. Stetige Aufladung einer Querkapazität nach der anderen und entsprechender Stromanstieg in den Längsinduktivitäten bedingen eine Ausbreitung des **Einschaltvorganges** mit endlicher Geschwindigkeit. Der Ablauf wird offenbar durch die Größe der Längsinduktivitäten und Querkapazitäten, also durch die Leitungseigenschaften bestimmt.

Leitungsbeläge Zur quantitativen Untersuchung muß das Ersatzbild noch verfeinert werden. Wir definieren dazu den **Induktivitätsbelag**

$$L' = \frac{L_s}{s}$$

als Längsinduktivität pro Längeneinheit und den **Kapazitätsbelag**

$$C' = \frac{C_s}{s}$$

als Querkapazität pro Längeneinheit.

Außerdem berücksichtigen wir den endlichen Widerstand der Leitungsdrähte durch einen **Längswiderstand** R_s im Abschnitt s und definieren den **Widerstandsbelag**

$$R' = \frac{R_s}{s}$$

als Längswiderstand pro Längeneinheit. Schließlich wollen wir auch noch den Fall einschließen, daß das Material zwischen den Leitungsdrähten selbst etwas leitend ist oder dielektrische Verluste hat. Dazu führen wir einen **Querleitwert** G_s im Abschnitt s ein und definieren den **Leitwertbelag**

$$G' = \frac{G_s}{s}$$

als Querleitwert pro Längeneinheit.

Wir wählen nun z als Koordinate entlang der Leitung. Für einen infinitesimalen Abschnitt dz gilt dann das Ersatzschaltbild von Bild 1.4.

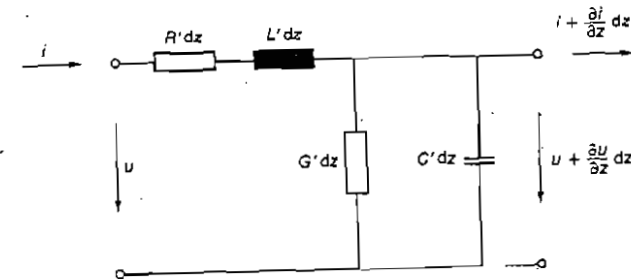


Bild 1.4 Ersatzschaltbild eines Leitungselementes mit Verlusten

Ströme und Spannungen auf der Leitung sind Funktionen der Zeit t und des Ortes z . Am Ausgang des Ersatzschaltbildes sind

der Strom i um $\frac{\partial i}{\partial z} dz$ und die Spannung um $\frac{\partial u}{\partial z} dz$

verschieden vom Eingang. An Längswiderstand und -induktivität verursacht i den Spannungsabfall $R' \cdot dz \cdot i + L' \cdot dz \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$

und es gilt die Maschengleichung (Kirchhoffsche Maschenregel):

$$u = R' dz i + L' dz \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Durch Querleitwert und Querkapazität schickt u

$$\text{den Strom } G' \cdot dz \cdot u + C' \cdot dz \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

und es gilt die Knotengleichung (Kirchhoffsche Knotenregel):

$$i = G' dz u + C' dz \frac{\partial u}{\partial t} + i + \frac{\partial i}{\partial z} dz$$

Wenn beide Gleichungen durch dz geteilt werden, ergibt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \left(R' + L' \frac{\partial}{\partial t} \right) i \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \left(G' + C' \frac{\partial}{\partial t} \right) u$$

Stromsumme

Dieses sind die *Differentialgleichungen der elektrischen Leitung*. Sie bilden ein System *partieller Differentialgleichung erster Ordnung*. Die erste Gleichung folgt aus dem Spannungsabfall längs der Leitung. Sie verknüpft die Spannungsänderung entlang der Leitung mit dem Strom und seiner zeitlichen Änderung. Die zweite Gleichung folgt aus dem Stromfluß zwischen den Leitern, d.h. quer zur Leitung mit der Spannung und ihrer zeitlichen Änderung.

Für alle anderen physikalischen Ausbreitungsvorgänge gelten dieselben Gleichungen, solange es sich um ebene Probleme handelt, also Abhängigkeit von nur einer Ortskoordinate besteht. u und i haben dann dem jeweiligen Vorgang entsprechend andere physikalische Bedeutung, ebenso die Konstanten R' , L' , G' und C' . In den meisten anderen physikalischen Ausbreitungsvorgängen sind sogar eine oder zwei dieser Konstanten null. Die elektrische Leitung ist in diesem Sinne das allgemeinste Modell eines physikalischen Ausbreitungsvorganges.

1.3 Die Lösung der Differentialgleichungen der elektrischen Leitung im eingeschwungenen Zustand: Die Leitungsgleichungen

Die allgemeine Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen (1.1) für beliebige Orts- bzw. Zeitabhängigkeit der Spannung und des Stromes zu finden, wollen wir erst später versuchen. Hier interessieren wir uns zunächst nur für die Partikulärlösung, die dem **eingeschwungenen Zustand** entspricht.

Sinusförmige Zeitabhängigkeit

In der Elektrotechnik haben wir es vornehmlich mit Wechselspannungen und -strömen zu tun, die zeitlich sinusförmigen Verlauf haben. Das gilt insbesondere für die Energietechnik, aber auch in der Nachrichtentechnik zerlegt man Signale allgemeinen zeitlichen Verlaufes meistens in ihre Frequenzkomponenten und untersucht das Verhalten der einzelnen Schwingungen:

Wir nehmen an, daß auf der Leitung nur eine Schwingung der Kreisfrequenz ω besteht. Dann lassen sich Strom und Spannung in ihrem zeitlichen Verlauf durch komplexe Zeiger, die sogenannten Phasoren i bzw. u ausdrücken:

$$i = \sqrt{2} \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}); \quad u = \sqrt{2} \operatorname{Re}(U e^{j\omega t})$$

Wenn wir diese sinusförmigen Zeitfunktionen in die Gleichungen (1.1) einsetzen, erhalten wir:

$$\sqrt{2} \operatorname{Re} \frac{dU}{dz} e^{j\omega t} = -\sqrt{2} \operatorname{Re} [(R' + j\omega L') I e^{j\omega t}]$$

$$\sqrt{2} \operatorname{Re} \frac{dI}{dz} e^{j\omega t} = -\sqrt{2} \operatorname{Re} [(G' + j\omega C') U e^{j\omega t}]$$

Diese Beziehungen sind sicher zu allen Zeiten erfüllt, wenn

$$\frac{dU}{dz} = -(R' + j\omega L') I; \quad \frac{dI}{dz} = -(G' + j\omega C') U \quad (1.2)$$

Ist. Das sind die *Differentialgleichungen der Leitung für den eingeschwungenen Zustand*. Sie bilden ein *lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* für die Phasoren U und I von Spannung bzw. Strom.

Zur Lösung dieses Gleichungssystems differenziert man die erste Gleichung nach z und setzt (dI/dz) aus der zweiten Gleichung ein. Es folgt:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = (R' + j\omega L') (G' + j\omega C') U \quad (1.3)$$

Jetzt hat man zwar eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, aber nur noch in der einen Unbekannten U . Zur Abkürzung schreiben wir

$$y^2 = (R' + j\omega L') (G' + j\omega C') \quad (1.4)$$

und erhalten:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = y^2 U \quad (1.5)$$

Man nennt diese Differentialgleichung zweiter Ordnung die **Wellengleichung der Leitung**, denn ebenso wie die Leitungsgleichungen findet man sie immer wieder als die Grundgleichung von Wellenausbreitung aller Art.

Lösungen dieser Gleichung sind, wie sich durch Einsetzen sofort beweisen läßt:

$$U_1 e^{-yz} \quad \text{und} \quad U_2 e^{yz}$$

Dabei sind U_1 und U_2 beliebige Konstanten, d.h. von z unabhängige Phasoren. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung für U ist also:

$$U = U_1 e^{-yz} + U_2 e^{yz} \quad (1.6)$$

U_1 und U_2 haben die Bedeutung zweier Integrationskonstanten. Die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung wird ja durch zweimalige Integration erhalten und erfordert darum diese beiden Integrationskonstanten.

Aus der ersten Differentialgleichung der Leitung in Gl. (1.2) erhalten wir durch Einsetzen der in Gl. (1.6) angegebenen allgemeinen Lösung für die Spannung die allgemeine Lösung für den Strom:

$$I = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{dU}{dz} = \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} (U_1 \cdot e^{-\gamma z} - U_2 \cdot e^{\gamma z})$$

Mit

$$\frac{\gamma}{R' + j\omega L'} = \sqrt{\frac{G' + j\omega C'}{R' + j\omega L'}}$$

und der Abkürzung

$$Z = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (1.7)$$

ist der Strom:

$$I(z) = \frac{1}{Z} (U_1 e^{-\gamma z} - U_2 e^{\gamma z}) \quad (1.8)$$

Die Abkürzung γ mit der Dimension (Länge)⁻¹ wird **Ausbreitungskonstante** genannt, und Z mit der Dimension eines Widerstandes heißt **Wellenwiderstand**. Über ihre physikalische Bedeutung wird später noch ausführlich gesprochen.

Randbedingungen Die Integrationskonstanten U_1 und U_2 werden durch die Bedingungen am Anfang oder am Ende der Leitung festgelegt. Werden z.B. Strom und Spannung am Anfang vorgegeben

$$U(0) = U_a = U_1 + U_2$$

$$I(0) = I_a = \frac{1}{Z} (U_1 - U_2),$$

dann sind

$$U_1 = \frac{U_a + Z \cdot I_a}{2}; \quad U_2 = \frac{U_a - Z \cdot I_a}{2},$$

und für Spannung und Strom an einer beliebigen Stelle entlang der Leitung gelten:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{2} (U_a + Z \cdot I_a) \cdot e^{-\gamma z} - \frac{1}{2} (U_a - Z \cdot I_a) \cdot e^{\gamma z} \\ I(z) &= \frac{1}{2} \left[\frac{U_a}{Z} - I_a \right] e^{-\gamma z} - \frac{1}{2} \left[\frac{U_a}{Z} + I_a \right] e^{\gamma z} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dieses ist eine Form der sogenannten Leitungsgleichungen. Weil sie die physikalischen Vorgänge am besten darstellt, wird sie als **physikalische Form** bezeichnet.

Für eine andere, mathematisch elegantere Form werden die Glieder mit gleichem Koeffizienten vor den Exponentialfunktionen zusammengefaßt, z.B.:

$$U(z) = U_a \cdot \frac{e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}}{2} - Z \cdot I_a \cdot \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2}$$

Es können dann Hyperbelfunktionen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} U(z) &= U_a \cdot \cosh \gamma z - Z \cdot I_a \cdot \sinh \gamma z \\ I(z) &= I_a \cdot \cosh \gamma z - \frac{U_a}{Z} \cdot \sinh \gamma z \end{aligned} \quad (1.10)$$

Diese zweite Form der Leitungsgleichungen wird auch als **mathematische Form** bezeichnet.

Werden an Stelle von Strom und Spannung am Anfang Endspannung und Endstrom der Leitung bei $z = l$ vorgegeben

$$U(l) = U_b = U_1 \cdot e^{-\gamma l} + U_2 \cdot e^{\gamma l}$$

$$I(l) = I_b = \frac{1}{Z} (U_1 \cdot e^{-\gamma l} - U_2 \cdot e^{\gamma l}),$$

dann bestimmen sich die Integrationskonstanten zu:

$$U_1 = \frac{1}{2} (U_b + Z \cdot I_b) \cdot e^{\gamma l}; \quad U_2 = \frac{1}{2} (U_b - Z \cdot I_b) \cdot e^{-\gamma l}$$

Diese Werte, in die allgemeine Gleichung (1.6) eingesetzt, ergeben zunächst die **physikalische Form** der Leitungsgleichungen mit den Endbedingungen.

$$U(z) = \frac{1}{2} (U_a + Z \cdot I_a) e^{-\gamma z} + \frac{1}{2} (U_a - Z \cdot I_a) e^{-\gamma z} \quad (1.11)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z} \left[\frac{U_a + Z \cdot I_a}{2} e^{-\gamma z} - \frac{U_a - Z \cdot I_a}{2} e^{-\gamma z} \right] \quad (1.11)$$

Werden hier die Exponentialfunktionen mit gleichem Koeffizienten wieder zusammengefaßt und Hyperbelfunktionen eingeführt, so erhält man die **mathematische Form** der Leitungsgleichungen mit Strom und Spannung am Ende der Leitung.

$$U(z) = U_0 \cdot \cosh[\gamma(l-z)] + I_0 Z \sinh[\gamma(l-z)] \quad (1.12)$$

$$I(z) = I_0 \cdot \cosh[\gamma(l-z)] + \frac{U_0}{Z} \sinh[\gamma(l-z)] \quad (1.12)$$

1.4 Die Wellenausbreitung

Wir wollen uns im folgenden die physikalischen Vorgänge auf der Leitung veranschaulichen und dabei die physikalische Bedeutung des Ausbreitungskoeffizienten γ und des Wellenwiderstandes Z erklären. Der Ausbreitungskoeffizient wird dazu in Real- und Imaginärteil aufgespalten.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (1.13)$$

α wird Dämpfungskonstante und β Phasenkonstante genannt¹⁾.

Es dient nun der Anschauung, von der komplexen Form der Leitungsgleichungen (1.9) auf eine Form für die *Momentanwerte* überzugehen, denn nur an den Zeitfunktionen läßt sich erkennen, wie Strom und Spannung im einzelnen verlaufen.

Zu dem Spannungsphasor

$$U(z) = \frac{1}{2} (U_a + Z \cdot I_a) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \frac{1}{2} (U_a - Z \cdot I_a) e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

gehört folgender Momentanwert der Spannung:

$$u(z,t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (U_a + Z \cdot I_a) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} (U_a - Z \cdot I_a) e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t} \right]$$

¹⁾ Nach DIN 1344 heißen α und β Dämpfungs- bzw. Phasenkoeffizient sowie γ Ausbreitungskoeffizient

Wenn wir zur Abkürzung schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (U_a + Z \cdot I_a) = \sqrt{2} U_1 = \hat{U}_1 \cdot e^{j\psi_1} \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (U_a - Z \cdot I_a) = \sqrt{2} U_2 = \hat{U}_2 e^{j\psi_2}$$

dann ist der Momentanwert der Spannung als Funktion von Zeit und Ort auf der Leitung:

$$u(z,t) = \hat{U}_1 \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1) + \hat{U}_2 \cdot e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2) \quad (1.15)$$

Die Gesamtspannung auf der Leitung ist also die Summe von zwei Einzelspannungen. Die Einzelspannung mit dem Faktor $e^{-\alpha z}$ nimmt entlang der Leitung in ihrer Amplitude mit wachsendem z ab (Bild 1.5), während die Einzelspannung mit $e^{\alpha z}$ in umgekehrter Richtung, mit abnehmendem z schwächer wird.

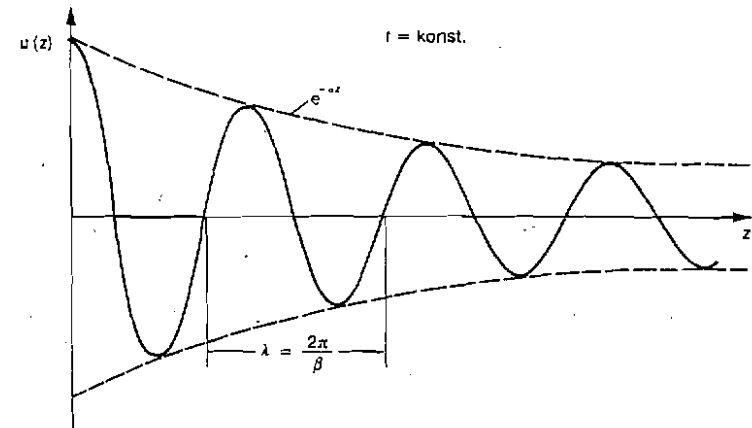


Bild 1.5 Eine Teilspannung bildet für einen festen Zeitpunkt entlang der Leitung eine gedämpfte Schwingung

Der Grad, mit dem die Amplituden der Einzelspannungen entlang der Leitung abnehmen oder gedämpft werden, wird durch die Konstante α bestimmt; entsprechend wurde α schon vorher als **Dämpfungskonstante** bezeichnet.

Zusätzlich zu der Amplitudenänderung oszilliert jede Einzelspannung zu bestimmten Zeiten $t = \text{konst.}$ entlang der Leitung gemäß einer Kosinusfunktion, deren Argument ja auch die Leitungsordinate z enthält. Je nach Vorzeichen, mit denen βz in den Argumenten der Kosinusfunktion erscheint, oszilliert die zweite Einzelspannung in entgegengesetztem Sinne wie die erste Einzelspannung. Die Phasenänderung dieser Oszillationen entlang der Leitung ist für beide Spannungen durch den konstanten Faktor β bestimmt. Dementsprechend wurde β schon vorher als Phasenkonstante bezeichnet.

Die Periodenlänge dieser Oszillation ergibt sich aus

$$\beta z = 2\pi$$

zu

$$z = \frac{2\pi}{\beta}$$

Die Periodenlänge der Schwingung auf der Leitung oder überhaupt einer Welle heißt **Wellenlänge** und wird mit λ bezeichnet. Ganz allgemein besteht also zwischen Wellenlänge λ und Phasenkonstante β einer Welle der Zusammenhang:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (1.16)$$

Tatsächlich stellen die beiden Einzelspannungen zwei Wellen dar, die sich in entgegengesetzten Richtungen auf der Leitung ausbreiten. Um uns diese Wellenausbreitung zu veranschaulichen und zu erkennen, wie schnell die Wellen laufen, betrachten wir z.B. den Nulldurchgang der ersten Einzelspannung, bei dem das Argument der Kosinusfunktion zur Zeit $t = 0$ gerade $\pi/2$ wird.

$$-\beta z + \psi_1 = \frac{\pi}{2} \quad (1.16)$$

Dieser Nulldurchgang liegt bei

$$z_0 = \frac{\psi_1}{\beta} - \frac{\pi}{2\beta}$$

Nach einer Zeit t_1 hat sich dieser Nulldurchgang entsprechend

$$\omega t_1 - \beta z_1 + \psi_1 = \frac{\pi}{2}$$

verschoben nach

$$z_1 = \frac{\psi_1}{\beta} + \frac{\omega}{\beta} t_1 - \frac{\pi}{2\beta}$$

Die Welle, welche von der ersten Einzelspannung gebildet wird, ist also um

$$\frac{\omega}{\beta} t_1$$

in positiver z -Richtung gewandert, und zwar breitet sie sich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (1.17)$$

aus.

Entsprechend dem umgekehrten Vorzeichen von βz in der zweiten Einzelspannung stellt diese eine Welle dar, die sich mit gleicher Geschwindigkeit in umgekehrter Richtung, also in negativer z -Richtung ausbreitet.

Bis hierher haben wir nur den Spannungsverlauf auf der Leitung untersucht. Aus der physikalischen Form der Leitungsgleichungen (1.9) oder (1.11) erkennen wir aber, daß für den Strom Entsprechendes gilt. Auch der Gesamtstrom setzt sich aus zwei Teilströmen zusammen. Diese Teilströme stellen auch Wellen dar, die sich in entgegengesetzten Richtungen auf der Leitung ausbreiten. Es kann jeder dieser Teilströme einer der oben besprochenen Teilspannungen zugeordnet werden. Ein so zugeordneter Teilstrom unterscheidet sich von der entsprechenden Teilspannung nur durch einen konstanten Faktor; er hat im übrigen dieselbe Abhängigkeit von Ort und Zeit.

In der physikalischen Form der Leitungsgleichungen bilden also je zwei durch gleiche Exponentialfunktion zusammengehörende Glieder von Strom und Spannung Wellen, die sich mit der durch die Ausbreitungskonstante $\gamma = \alpha + j\beta$ gegebenen Dämpfung und Phase in entgegengesetzten Richtungen ausbreiten.

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \underline{U}_1 \cdot e^{-\gamma z} + \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma z} = \underline{U}_h + \underline{U}_r \\ \underline{I}(z) &= \underline{I}_1 \cdot e^{-\gamma z} + \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma z} = \underline{I}_h + \underline{I}_r \end{aligned} \quad (1.18)$$

Setzt man die zu einer bestimmten Welle gehörende Teilspannung ins Verhältnis zu ihrem Teilstrom, so ergibt sich z.B. bei der Welle, die sich in positiver z -Richtung ausbreitet, aus den Leitungsgleichungen (1.9)

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_h + Z \cdot \underline{I}_h}{-\underline{U}_h + \underline{I}_h}$$

also der Wellenwiderstand Z .

Ausbreitungsgeschwindigkeit

Wellenläng.

Wellenwid.

Dasselbe folgt aus dem Verhältnis von Teilspannung zu Teilstrom der in entgegengesetzter Richtung laufenden Welle, wenn nur der Teilstrom mit negativem Vorzeichen eingesetzt wird:

$$\frac{U_z}{-I_z} = \frac{U_a - Z \cdot I_a}{Z - I_a} = Z$$

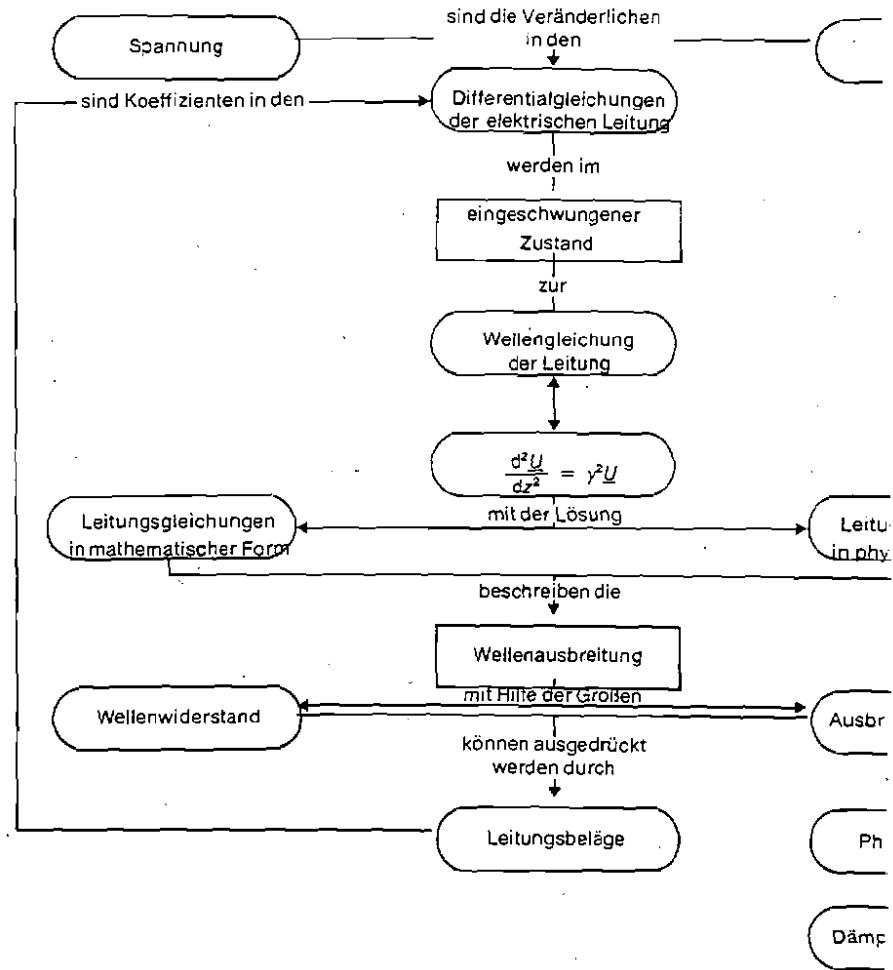
Es muß hier berücksichtigt werden, daß in Gl. (1.9) und überhaupt in dieser Niederschrift als positive Stromrichtung auf der Leitung die + z-Richtung festgelegt wurde.

Nur wenn der Strom einer Welle in der Richtung positiv angenommen worden wäre, in der sich die Welle ausbreitet, hätte sich als Verhältnis von Teilspannung zu Teilstrom einer Welle der Wellenwiderstand ergeben ohne Vorzeichenumkehr beim Teilstrom der rücklaufenden Welle. Das Verhältnis von Spannung zu Strom bei einer hinlaufenden Welle bzw. von Spannung zu negativem Strom bei einer rücklaufenden Welle ist also gleich dem Wellenwiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (1.19)$$

Veranschaulichung der Leitung. Eine Welle, die sich auf der Leitung ausbreitet, sieht sozusagen den Wellenwiderstand.

Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übungsaufgaben zum Lernzyklus 1.1

- Ohne Unterlagen
- 1 Zeichnen Sie das Ersatzbild eines Leitungselements, in dem Verluste berücksichtigt sind! Benennen Sie die Schaltelemente!
 - 2 Erläutern Sie den Ausbreitungsvorgang anhand des Ersatzbildes für eine verlustlose Leitung!
 - 3 Geben Sie wenigstens eine Form der Leitungsgleichungen an!

Unterlagen gestartet

4 Leitungsbeläge

An einer elektrisch kurzen Leitung mit der Länge $l = 75 \text{ m}$ wurden bei $f = 80 \text{ kHz}$ der Eingangswiderstand bei Kurzschluß am Ende der Leitung,

$$Z_K = 50 \cdot e^{j(90^\circ - \varphi)} \Omega \quad \text{mit} \quad \tan \varepsilon_K = 1,8 \cdot 10^{-3},$$

und der Eingangsleitwert bei Leerlauf am Ende der Leitung,

$$Y_L = 9 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j(90^\circ - \varphi)} \text{ S} \quad \text{mit} \quad \tan \varepsilon_L = 1,2 \cdot 10^{-3},$$

gemessen.

Nehmen Sie diese elektrisch kurze Leitung als Leitungselement nach Bild 1.4 an, und berechnen Sie mit den gemessenen Daten R' , L' , G' und C' näherungsweise!

Lernzyklus 1.2

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 1.2 sollen Sie in der Lage sein,

- das Verhältnis von vor- zu rücklaufender Welle bei beliebiger Impedanz des Leitungsabschlusses zu berechnen;
- mit Hilfe von Zeigerdiagrammen Strom- und Spannungsverteilung entlang einer Leitung zu erläutern;
- Strom- und Spannungsverteilung entlang einer Leitung zu berechnen.

1.5 Reflexion und Reflexionsfaktor

Die physikalische Form der Leitungsgleichungen, ausgedrückt entweder mit der Anfangsspannung \underline{U}_a und dem Anfangsstrom \underline{I}_a , Gl. (1.9), oder aber auch mit der Endspannung \underline{U}_e und dem Endstrom \underline{I}_e , Gl. (1.11), beschreibt die Ausbreitung auf der Leitung als die Überlagerung zweier Teilwellen. Eine Welle läuft vom Anfang zum Ende, die andere in entgegengesetzter Richtung vom Ende zum Anfang. Innerhalb jeder Welle sind das Verhältnis von Spannung zu Strom durch den Wellenwiderstand Z und die relative Änderung von Spannung und Strom längs der Leitung durch die Ausbreitungskonstante γ vollständig bestimmt. Festzustellen ist damit nur noch, wie sich unter bestimmten Bedingungen die hinlaufende Welle und die rücklaufende Welle zueinander verhalten.

1.5.1 Lange Leitung

Am einfachsten werden die Verhältnisse, wenn die Leitung unendlich lang ist, dann verschwindet nämlich eine der beiden Wellen. Und zwar stellt man an Hand der Leitungsgleichungen (1.11) fest, daß nur noch eine vorwärtslaufende Welle übrigbleibt. Der Betrag der Funktion $\exp[-\gamma(l-z)]$ wird mit wachsendem l immer kleiner, während der Betrag von $\exp[\gamma(l-z)]$ immer größer wird. Schließlich kann man bei genügend langer Leitung in den Leitungsgleichungen das zweite gegen das erste Glied vernachlässigen (Bild 1.6).

Physikalische Erläuterung

Es ist auch physikalisch sinnvoll, daß bei einer sehr langen Leitung nur eine Welle vom Anfang zum Ende hinläuft. Eine rücklaufende Welle käme ja von dem sehr weit entfernten Leitungsende, hätte also entsprechend $\exp(-\alpha l)$ eine sehr große Dämpfung erfahren und wäre, was immer auch ihr Anfangswert am weit entfernten Ende ist, sehr klein.

Zur eigentlichen Berechnung von Strom und Spannung auf der sehr langen Leitung geht man zweckmäßigerweise von Anfangsstrom \underline{I}_a und Anfangsspannung \underline{U}_a aus. Da nur eine Welle auf der Leitung läuft, ist das Verhältnis von Strom und Spannung überall gleich dem Verhältnis von Teilspannung und Teilstrom der einen vorlaufenden

den Welle, also gleich dem Wellenwiderstand. Es gilt demnach auch für Anfangsspannung und Anfangsstrom:

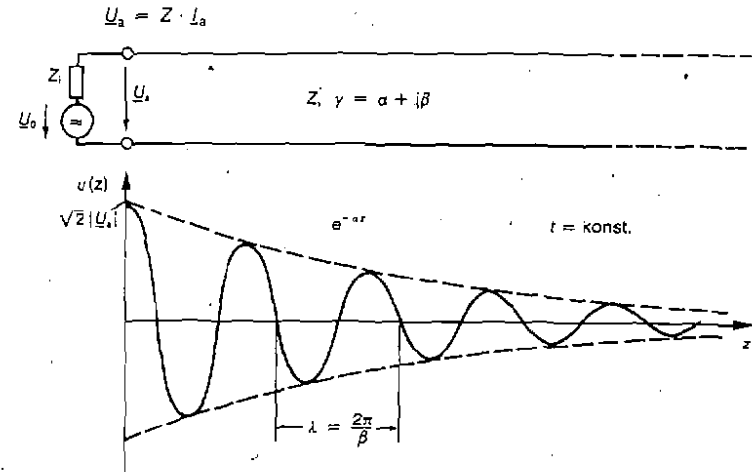


Bild 1.6 Ausbreitung einer Wechselfspannung auf einer sehr langen Leitung: die rücklaufende Welle ist zu vernachlässigen.

Damit sind nach Gl. (1.9) Spannung und Strom entlang der Leitung:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_a e^{-\gamma z}; \quad \underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_a}{Z} e^{-\gamma z} \quad (1.20)$$

1.5.2 Anpassung

Ein zweiter Fall ist ebenso einfach. Schließt man die Leitung am Ende mit einem Widerstand ab, der gleich dem Wellenwiderstand ist, $Z_e = Z$, so ist das Verhältnis von Spannung und Strom am Ende

Mathema:

$$\frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e} = Z_e = Z,$$

und in der physikalischen Form der Leitungsgleichungen (1.11) verschwindet wieder die rücklaufende Welle:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_e \cdot e^{\gamma(l-z)}; \quad \underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_e}{Z} \cdot e^{\gamma(l-z)} \quad (1.21)$$

Da für $z = 0$, also am Leitungsanfang, $U_a = U_a \cdot e^{-\gamma z}$ ist, ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$U(z) = U_a \cdot e^{-\gamma z}; \quad I(z) = \frac{U_a}{Z} \cdot e^{-\gamma z} \quad (1.22)$$

Spannung und Strom sind also in gleicher Weise wie im Falle der unendlich langen Leitung durch die Spannung am Anfang gegeben und haben dieselbe Verteilung entlang der Leitung (Bild 1.7).

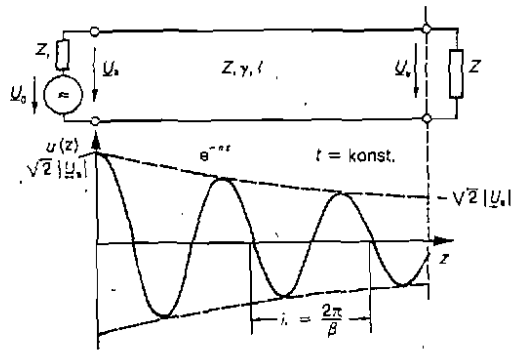


Bild 1.7 Ausbreitung einer Wechselspannung auf einer Leitung, die mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen ist: Reflexionsfaktor $r = 0$

Es existiert nur eine vorwärts laufende Welle. Der Abschlusswiderstand absorbiert diese Welle vollkommen. Wir hatten ja früher festgestellt, daß die Welle auf der Leitung den Wellenwiderstand sieht. Wenn nun die Leitung mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen wird, so werden der einfallenden Welle die gleichen Verhältnisse wie auf der Leitung angeboten. Sie meint, in dem Abschlusswiderstand eine Fortführung der Leitung zu sehen und wandert in den Abschlusswiderstand hinein, so als ob sich statt dieses Widerstandes die Leitung fortsetzen würde.

Veranschaulichung

Dieser sehr wichtige Sonderfall eines Leitungsabschlusses wird **Anpassung** genannt. Wichtig ist er in erster Linie, weil in Schaltungen mit Leitungen im Falle der Anpassung Reflexionen unterdrückt werden und keine unerwünschten Wellen zurücklaufen, die durch *Interferenz mit den vorlaufenden Nutzwellen* stören würden. Außerdem haben praktische Leitungen meist einen Wellenwiderstand, der nahezu reell ist; in diesem Falle ist die **Widerstandsanpassung** der beschriebenen Art auch eine

optimale Leistungsanpassung. Es wird dann tatsächlich die ganze verfügbare Leistung an den Verbraucher abgegeben. Die Leistung wird vollkommen absorbiert. Schließlich gehorchen Schaltungen mit Leitungen im Falle der Anpassung besonders einfachen und übersichtlichen Gesetzen. Sie lassen sich unter diesen Umständen besonders einfach entwerfen und berechnen.

Eine Analogie hat dieser Fall der Anpassung unter anderem in der Optik. Um Interferenz mit reflektiertem Licht und Reflexionsverluste zu vermeiden, ist man auch dort oft bestrebt, optische Systeme so zu gestalten, daß einfallendes Licht nicht reflektiert wird. *Optische Linsen* werden darum mit Auftragschichten *vergütet*, die dazu dienen, verschiedene Medien in ihren Wellenwiderständen aneinander anzupassen.

In der Akustik finden wir den analogen Fall bei der Schallabsorption in *akustischen Platten*, mit denen durch Unterdrückung der Reflexion das Nachhallen von Räumen vermindert und ihre akustischen Eigenschaften verbessert werden.

1.5.3 Allgemeiner Abschluß

Im allgemeinen Fall eines beliebigen Abschlußwiderstandes setzen Spannung und Strom auf der Leitung sich aus einer hin- und einer rücklaufenden Welle zusammen (Bild 1.8).

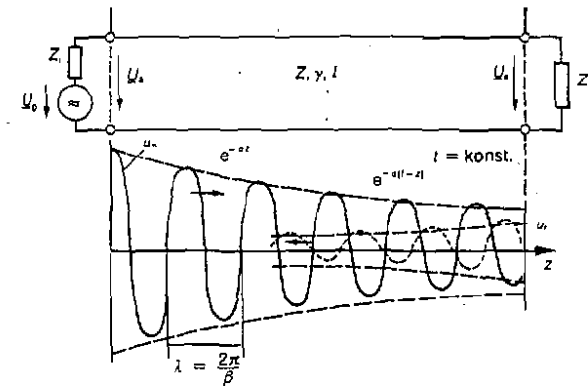


Bild 1.8 Ausbreitung einer Wechselspannung auf einer Leitung mit beliebigem Abschlusswiderstand: hin- und rücklaufende Welle bestimmen die Spannung auf der Leitung

Am Ende der Leitung wird das Verhältnis zwischen beiden durch den Abschlußwiderstand bestimmt. Durch ihn wird $\underline{U}_e = Z_e \cdot \underline{I}_e$, und die Spannungsverteilung auf der Leitung läßt sich mit Hilfe von Gl. (1.11) folgendermaßen angeben:

$$\underline{U}(z) = \frac{1}{2} (Z_e + Z) \cdot \underline{I}_0 \cdot e^{\gamma(l-z)} + \frac{1}{2} (Z_e - Z) \cdot \underline{I}_0 \cdot e^{-\gamma(l-z)} \quad (1.23)$$

Spannungsverhältnis Das Verhältnis der Teilspannung der rücklaufenden Welle zur Teilspannung der vorlaufenden Welle ist dabei:

$$\frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} = \frac{Z_e - Z}{Z_e + Z} e^{-2\gamma(l-z)} \quad (1.24)$$

Den Wert dieses Verhältnisses am Ende der Leitung nennt man Reflexionsfaktor:

$$r = \frac{Z_e - Z}{Z_e + Z} \quad (1.25)$$

Stromverhältnis Für das aus den Teilströmen der beiden Wellen gewonnene Verhältnis $-\underline{I}_r/\underline{I}_h$ ergibt sich derselbe Ausdruck. Der in Laufrichtung der rücklaufenden Welle positiv gezählte Teilstrom $-\underline{I}_r$ dieser Welle steht also zum Teilstrom \underline{I}_h der vorlaufenden Welle im gleichen Verhältnis wie die entsprechenden Teilspannungen \underline{U}_r und \underline{U}_h . Der Reflexionsfaktor beschreibt demnach, in bezug auf Spannungen wie auf Ströme oder ganz allgemein in bezug auf Wellen, das Verhältnis von reflektiertem zu einfallendem Anteil.

Anpassung Im Sonderfall der Anpassung, $Z_e = Z$, ist $r = 0$. Es wird nichts reflektiert.

Leerlauf Wird die Leitung mit einem sehr hohen Widerstand abgeschlossen oder läuft sie ganz leer, dann ist

$$r = 1.$$

Kurzschluß Für eine am Ende kurzgeschlossene Leitung ist

$$r = -1.$$

In diesen beiden letzten Fällen wird die einfallende Welle vollkommen reflektiert. Beim Leerlauf der Leitung ist die reflektierte Welle am Ende in Phase mit der einfallenden Welle, während sie bei Kurzschluß um 180° in der Phase verschoben ist. Bei Leerlauf heben sich die Ströme beider Wellen am Ende gegenseitig auf, und die Spannungen addieren sich. Bei Kurzschluß addieren sich die Ströme, und die Spannungen heben einander auf.

1.6 Strom- und Spannungsverteilung auf der Leitung

Bis jetzt haben wir nur den Verlauf von Teilspannung und Teilstrom einer einzelnen Welle entweder hinlaufend oder rücklaufend auf der Leitung untersucht. Wir haben dazu im vorhergehenden Abschnitt besprochen, wie sich mit dem Abschluß der Leitung durch einen bestimmten Widerstand und dem daraus folgenden Reflexionsfaktor aus der hinlaufenden Welle eine reflektierte, rücklaufende Welle ergibt. Die Grundlagen sind damit vorhanden, um den resultierenden Verlauf von Spannung und Strom zu betrachten, der sich aus der Überlagerung beider Teilwellen ergibt.

Es ist hier zweckmäßig, eine *graphische Darstellung* der komplexen Zeiger von Spannungs- und Stromphasoren zu wählen. Gesamtspannung und Gesamtstrom werden dann durch vektorielle Addition dieser komplexen Zeiger gefunden, und die tatsächlichen Augenblickswerte ergeben sich durch Projektion der rotierenden, komplexen Zeiger auf die reelle Zeitachse.

Die Verhältnisse können am besten an zwei Sonderfällen veranschaulicht werden, in denen sich die reflektierte Welle in einfacher Weise aus der hinlaufenden Welle ergibt. Es sind dies die am Ende kurzgeschlossene Leitung und die am Ende offene oder leerlaufende Leitung.

1.6.1 Kurzschluß am Ende der Leitung

Der Reflexionsfaktor ist hier

$$r = -1,$$

und die resultierende Spannung am Ende der Leitung ist null. Aus der physikalischen Form der Leitungsgleichungen ergibt sich mit $\gamma = \alpha + j\beta$ für die Spannungsverteilung entlang der Leitung:

$$\underline{U}(z) = \frac{1}{2} Z \cdot \underline{I}_0 \cdot e^{\alpha(l-z)} e^{j\beta(l-z)} - \frac{1}{2} Z \cdot \underline{I}_0 \cdot e^{-\alpha(l-z)} e^{-j\beta(l-z)} \quad (1.26)$$

Mit

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h + \underline{U}_r$$

kann man das Zeigerdiagramm für $\underline{U}(z)$ aus den Zeigern \underline{U}_h und \underline{U}_r für verschiedene Werte z entlang der Leitung zeichnen. Der Zeiger der hinlaufenden Welle ist am Ende $\underline{U}_h = (1/2) \cdot Z \cdot \underline{I}_0$. Vom Leitungsende zurückgehend, dreht er gemäß der Phasenfunktion $\exp[j\beta(l-z)]$ in positivem Sinne oder entgegen dem Uhrzeiger. Seine Amplitude nimmt dabei gemäß der Exponentialfunktion $\exp[\alpha(l-z)]$ zu. Man kann ihn mit einer räumlichen Spirale, also einer Wendel, entlang der Leitung darstellen (Bild 1.9).

Spannung

Wendel

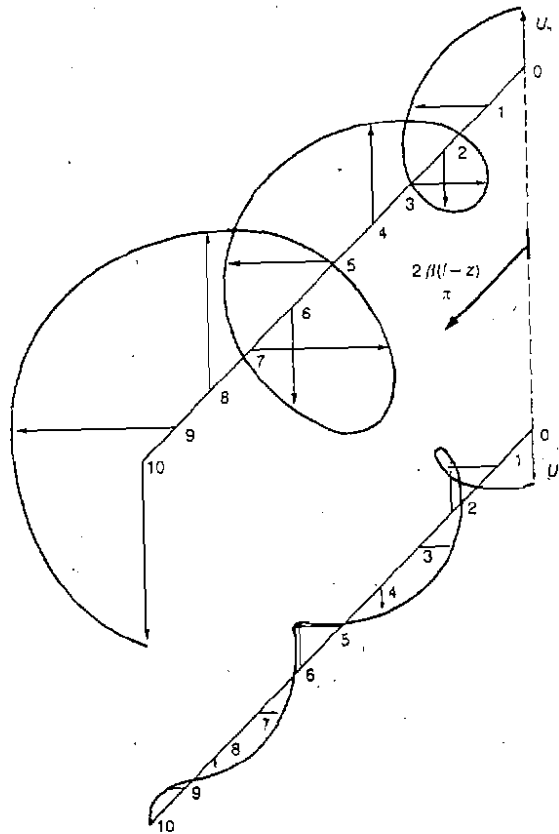


Bild 1.9 Die Zeigerdiagramme der Teilspannungen von hin- und rücklaufender Welle bilden entlang der Leitung Schraubenlinien auf exponentiellen Rotationskörpern

Der Zeiger der rücklaufenden Welle am Ende $\underline{U}_r = -(1/2) \cdot Z \cdot \underline{I}_0$ ist von entgegengesetzter Phase wie \underline{U}_h . Vom Leitungsende zurückgehend, dreht er gemäß der Phasenfunktion $\exp[-j\beta(l-z)]$ im negativen Sinne oder mit dem Uhrzeiger. Seine

Amplitude nimmt dabei gemäß der Exponentialfunktion $\exp[-\alpha(l-z)]$ ab. Auch der Zeiger \underline{U}_r kann durch eine Wendel dargestellt werden, die aber entgegengesetzten Drehsinn hat wie die Wendel \underline{U}_h , und die sich amplitudenmäßig der Achse nähert. Die Wendeln sind Schraubenlinien auf Rotationskörpern mit exponentiell zunehmenden bzw. abnehmenden Mantellinien.

Die Projektion der beschriebenen Wendeln auf eine Ebene senkrecht zur Achse ergibt logarithmische Spiralen in dieser Ebene (Bild 1.10). Diese logarithmischen Spiralen bestimmen die Spannungszeiger der hin- und rücklaufenden Welle in Polarkoordinaten ($\varrho; \varphi$).

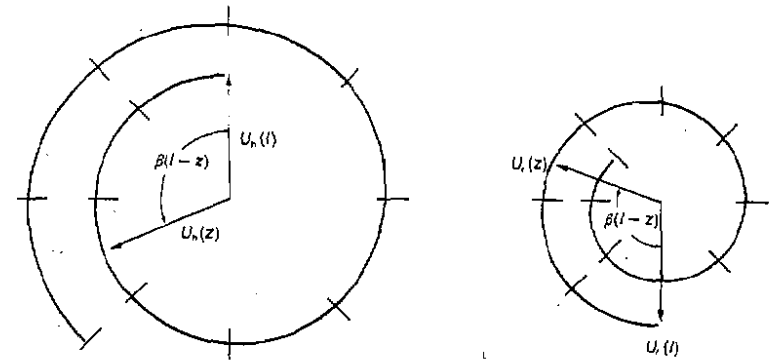


Bild 1.10 Die Projektionen der wendelförmigen Zeigerdiagramme auf eine Querschnittsebene bilden logarithmische Spiralen

Für die hinlaufende Welle ist

der Winkel $\varphi_h = \beta(l-z)$ und
 die Amplitude $\varrho_h = |\underline{U}_h(l)| \exp[\alpha(l-z)]$.

Logarit:


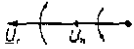

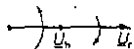

Für die rücklaufende Welle ist

der Winkel $\varphi_r = \pi - \beta(l-z)$ und
 die Amplitude $\varrho_r = |\underline{U}_r(l)| \exp[-\alpha(l-z)]$.

Man erhält also, indem man nach den Winkelbeziehungen $(l-z)$ durch φ ausgedrückt, die beiden Gleichungen für die logarithmischen Spiralen:

$$e_h = |U_h(l)| e^{\frac{\alpha}{\beta} \varphi} \quad e_r = |U_r(l)| e^{\frac{\alpha}{\beta} (\varphi - \pi)}$$

Für die resultierende Spannung werden beide Zeiger vektoriell addiert. Für einige Punkte, die auf den Achsen der Schraubenlinien in Bild 1.9 auf Seite 28 numeriert sind, sieht das folgendermaßen aus:

- Punkt 0:  U_h und U_r sind in Gegenphase und heben sich gegenseitig auf.
- Punkt 1:  U_h und U_r haben sich beide gegenüber ihrer Phase bei 0 um 90° gegeneinander gedreht. Ihre Beträge addieren sich.
- Punkt 2:  U_h und U_r sind wieder in Gegenphase, heben sich aber nicht mehr auf, da jetzt $|U_h|$ größer und $|U_r|$ kleiner als bei 0 sind.
- Punkt 3:  U_h und U_r sind wieder in Phase und addieren sich. $|U_h|$ ist weiter angestiegen und $|U_r|$ noch kleiner geworden.
- Punkt 4:  U_h und U_r sind wieder in Gegenphase; die Differenz ist jetzt aber noch größer wegen der ständigen exponentiellen Änderung, die für U_h entgegengesetzt zu der von U_r verläuft.

Trägt man nun die Beträge des aus der vektoriellen Addition resultierenden Spannungszeigers als Funktion von z auf, so ergibt sich ein Verlauf, der zwischen zwei Hüllkurven hin- und herpendelt (Bild 1.11).

Die Entfernung auf der Leitung zwischen zwei Berührungspunkten mit einer der Hüllkurven gleicher Art, nämlich zwischen entweder zwei benachbarten Punkten auf der oberen oder zwei benachbarten Punkten auf der unteren Hüllkurve, ist gegeben durch:

Abstand der Berührungspunkte

$$\beta \cdot \Delta z = \pi$$

D.h., der Zeiger jeder Teilspannung muß sich um 180° drehen, um eine Gesamtdrehung gegeneinander von einer vollen Periode entsprechend 360° zu erreichen.

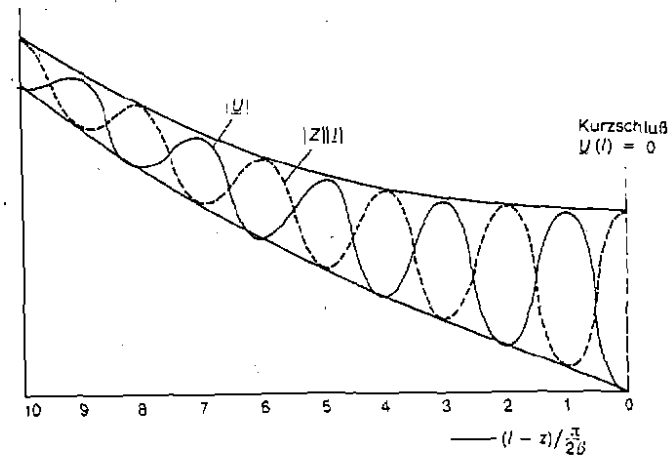


Bild 1.11 Die Beträge des Spannungs- und Stromphasors schwanken entlang der Leitung zwischen zwei Hüllkurven

Die Extremwerte liegen in ihrer Amplitude immer dichter zusammen, je größer der Abstand vom Leitungsende ist. Der durch die Dämpfungskonstante verursachte exponentielle Amplitudenanstieg der einen und -abfall der anderen Teilwelle bringt die beiden Hüllkurven immer näher zusammen und dichter an die Amplitudenkurve der einfallenden Teilwelle.

Die Stromverteilung bei kurzgeschlossenem Leitungsende gewinnt man aus Gl. (1.11) für $U_a = 0$:

$$I(z) = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot e^{\gamma(l-z)} + \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot e^{-\gamma(l-z)}$$

Multipliziert man die Gleichung mit einem Widerstand, so bekommt sie die Dimension einer Spannung und kann in denselben Diagrammen dargestellt werden. Um die Stromverteilung unmittelbar mit der Spannungsverteilung vergleichen zu können, multiplizieren wir sie mit dem Wellenwiderstand und erhalten:

$$Z \cdot I(z) = \frac{1}{2} Z \cdot I_0 \cdot e^{\alpha(l-z)} e^{j\beta(l-z)} + \frac{1}{2} Z \cdot I_0 \cdot e^{-\alpha(l-z)} e^{-j\beta(l-z)} \quad (1.27)$$

Die so im Spannungsmaßstab ausgedrückten Teilströme haben dieselbe Größe wie die Teilspannungen und lassen sich direkt miteinander vergleichen.

Die vektorielle Addition der Teilströme wird genauso durchgeführt wie bei den Teilspannungen. Die beiden Teilströme sind am Ende der Leitung in Phase und die Beträge der beiden Teilströme addieren sich algebraisch zum Gesamtstrom. Gegenüber der Spannungskurve ist also die Stromkurve um den Abstand

Verschiebung gegen
Spannungsverteilung



verschoben. Abgesehen von dieser Verschiebung ist der Gesamtstrom entlang der Leitung genau so verteilt wie die Gesamtspannung.

1.6.2 Leerlauf

Für eine am Ende offene Leitung ist $I_a = 0$ und die Spannungs- und Stromverteilung ergibt sich aus den Leitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \frac{1}{2} \underline{U}_a \cdot e^{\gamma(l-z)} + \frac{1}{2} \underline{U}_a \cdot e^{-\gamma(l-z)} \\ \underline{I}(z) &= \frac{1}{2} \frac{\underline{U}_a}{Z} \cdot e^{\gamma(l-z)} - \frac{1}{2} \frac{\underline{U}_a}{Z} \cdot e^{-\gamma(l-z)} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Man multipliziert die zweite Gleichung wieder mit Z , um den Strom im vergleichbaren Spannungsmaßstab darzustellen.

Leitungsende

Gegenüber dem Kurzschluß haben Strom und Spannung beim Leerlauf ihre Rollen vertauscht. Im übrigen sind aber die Ausdrücke durchaus vergleichbar. Die Teilspannungen sind jetzt in Phase am Leitungsende, und demzufolge berührt die resultierende Spannung dort die obere Hüllkurve. Die Teilströme sind dagegen in Gegenphase; sie heben sich gegenseitig auf bzw. berühren die untere Hüllkurve an allen Punkten, die um ein ganzzahliges Vielfaches von

$$\Delta z = \frac{\pi}{\beta}$$

vom Leitungsende entfernt sind.

1.6.3 Beliebiger Abschluß

Bei beliebigem Abschluß sind die Strom- und Spannungsverteilung entlang der Leitung grundsätzlich ähnlich den Verteilungen bei Leerlauf oder Kurzschluß. Während bei Leerlauf oder Kurzschluß die reflektierte Welle am Ende dem Betrage

nach gleich der einfallenden Welle ist und demnach die resultierenden Größen zwischen null und ihrem Maximalwert pendeln, wird unter normalen Umständen der Reflexionsfaktor bei beliebigem Abschluß dem Betrage nach kleiner als eins sein. Die reflektierte Welle ist damit auch am Ende der Leitung kleiner als die einfallende Welle. Die Welligkeit selbst, also das Verhältnis von Maximum von Strom oder Spannung zu Minimum von Strom oder Spannung, ist nicht so groß wie bei Leerlauf oder Kurzschluß.

Vollkommen richtig ist diese Aussage aber nur für Leitungen mit rein reellem Wellenwiderstand. Nur bei reellem Z ist nämlich der Reflexionsfaktor für alle Abschlußwiderstände mit positivem Realteil dem Betrage nach immer kleiner als eins, und nur dann ist die reflektierte Welle immer kleiner als die einfallende Welle. Die Strom- und Spannungsverteilung wird unter diesen Umständen und bei unveränderter Amplitude der hinlaufenden Welle nirgendwo, auch nicht in ihren Extremwerten, über die beiden Hüllkurven hinausgehen, die für Kurzschluß oder Leerlauf am Ende gefunden wurden. Einschränkung

1.6.4 Verlustlose Leitung

Einfacher werden die Verhältnisse auf der verlustlosen Leitung. Für $\alpha = 0$ verschwindet nämlich die exponentielle Änderung der Amplitude der hin- und rücklaufenden Wellen. Während im allgemeinen Fall der verlustbehafteten Leitung die komplexen Zeiger von \underline{U}_h und \underline{U}_r auf Schraubenlinien verlaufen, die einem Rotationskörper mit exponentieller Mantellinie angehören, so geht für die verlustlose Leitung dieser Rotationskörper in einen Kreiszyylinder über (Bild 1.12). Aus der logarithmischen Spirale als Projektion der Schraubenlinie auf eine Ebene senkrecht zur z -Achse wird für die verlustlose Leitung ein Kreis.

Für Gesamtspannung und Gesamtstrom müssen jetzt zwei Zeiger addiert werden, die im entgegengesetzten Sinne entlang der Leitung drehen und im allgemeinen auch verschiedene Beträge haben. Diese Beträge sind nun aber entlang der Leitung konstant. Die Hüllkurven werden damit zu geraden Linien parallel zur z -Achse, und die Berührungspunkte mit diesen Hüllkurven sind zugleich Extremwerte von Spannung oder Strom (Bild 1.13).

Die Welligkeit ist entlang einer verlustlosen Leitung konstant.

Besonders einfach sind jetzt die Verteilungen bei Leerlauf oder Kurzschluß oder auch bei irgendeinem reinen Blindwiderstand als Abschluß. Unter diesen Abschlußbedingungen ist der Reflexionsfaktor dem Betrage nach gleich eins. Hinlaufende und rücklaufende Welle haben entlang der Leitung gleiche Amplitude. Sie addieren sich einmal zum doppelten Wert der Einzelwelle und heben sich zum anderen zu null auf (Bild 1.14).

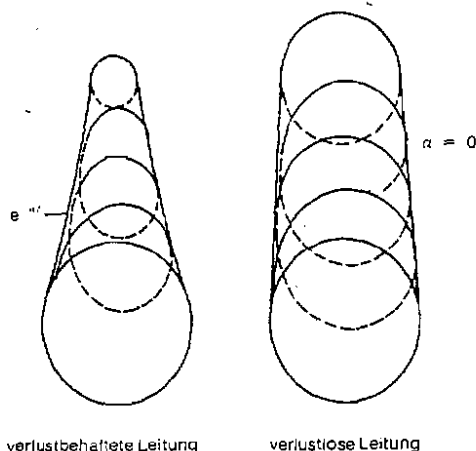


Bild 1.12 Bei der verlustlosen Leitung liegen die Schraubenlinien von Zeigern der Teilspannungen oder Teilströme auf Kreiszyllindern.

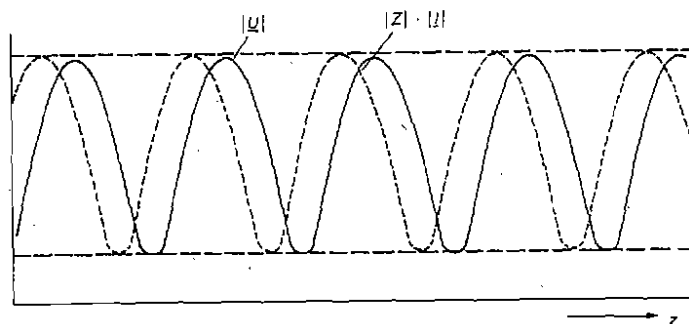


Bild 1.13 Auf der verlustlosen Leitung schwanken die Beträge des Spannungs- und des Stromphasors zwischen konstanten Werten

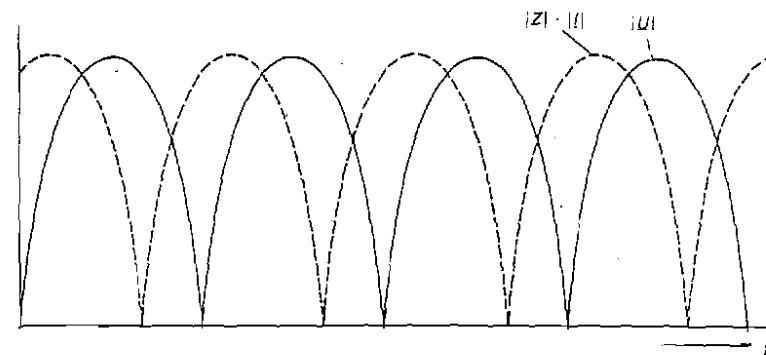


Bild 1.14 Bei einem Blindwiderstand am Ende der verlustlosen Leitung bilden sich stehende Wellen. Strom und Spannung sind gegeneinander um 90° oder $\Delta z = \pi/(2\beta)$ phasenverschoben

Für den Kurzschluß läßt sich beispielsweise die Spannung sofort mit Hilfe von Gl. (1.26) angeben zu:

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \frac{1}{2} Z \cdot I_0 \cdot [e^{j\beta(l-z)} - e^{-j\beta(l-z)}] \\ &= j Z \cdot I_0 \cdot \sin[\beta(l-z)] \end{aligned} \quad (1.29a)$$

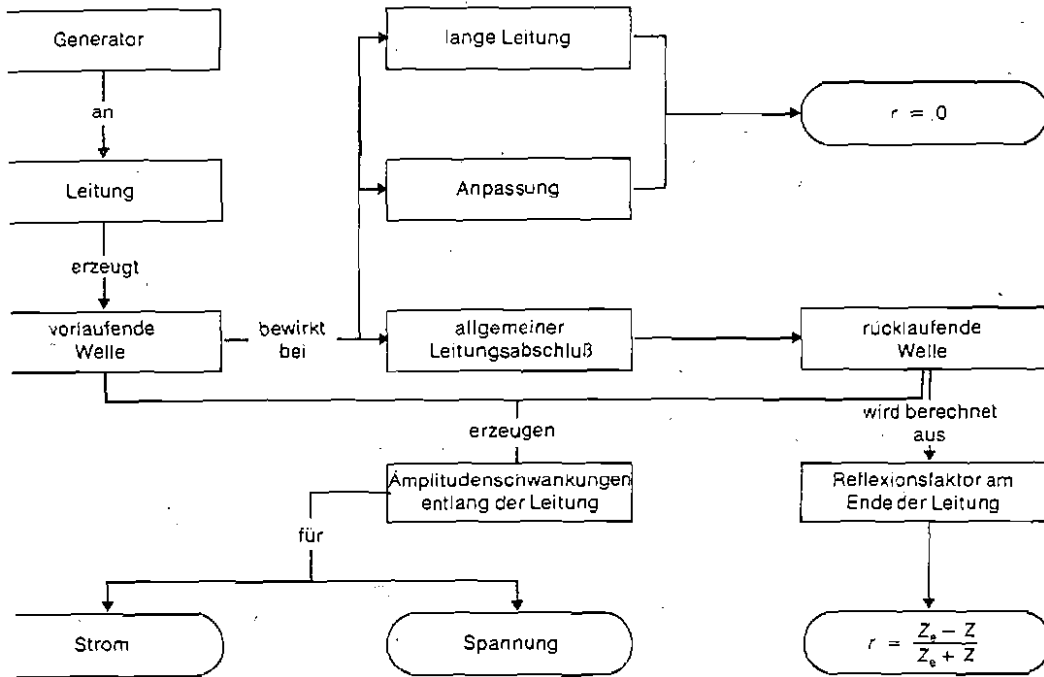
und der Strom mit Hilfe von Gl. (1.27) zu:

$$\begin{aligned} Z \cdot \underline{I}(z) &= \frac{1}{2} Z \cdot I_0 \cdot [e^{j\beta(l-z)} + e^{-j\beta(l-z)}] \\ &= Z \cdot I_0 \cdot \cos[\beta(l-z)] \end{aligned} \quad (1.29b)$$

Spannung und Strom haben reine *Sinus-* bzw. *Kosinus-*Verteilung entlang der Leitung. Jede dieser Größen für sich hat unter diesen Bedingungen überall entlang der Leitung zeitlich die gleiche Phase. Gemäß dem Faktor j ist überall entlang der Leitung die Spannung gegenüber dem Strom um 90°, also zeitlich um eine viertel Periode in der Phase verschoben.

Phasenversch

Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übungsaufgaben zum Lernzyklus 1.2

1 Wie lautet der Zusammenhang zwischen Reflexionsfaktor, Leitungswellenwiderstand und Abschlußwiderstand? *Ohne Unterlage*

2 Welche Bedingungen gelten für \underline{U} oder \underline{i} am leerlaufenden und welche am kurzgeschlossenen Ende einer Leitung?

3 R/C-Schaltung als Leitungsabschluß *Unterlagen gest.*

Eine Leitung mit den folgenden Daten sei gegeben:

$$R' = 13 \frac{\Omega}{\text{km}}, \quad G' = 0, \quad L' = 1,5 \frac{\text{mH}}{\text{km}}, \quad C' = 6,12 \frac{\text{nF}}{\text{km}}$$

Die Leitung soll durch die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R und einer Kapazität C für 800 Hz reflexionsfrei abgeschlossen werden.

Welche Werte sind für R und C zu wählen?

Bestimmen Sie den Reflexionsfaktor am Ende für den Abschluß mit den oben berechneten Werten von R und C , nachdem die Frequenz von 800 Hz auf 1200 Hz erhöht wurde!

Aufgaben zur Vertiefung 1

Analogien in Ausbreitungsvorgängen

Für das Verständnis des Kurses ist die Bearbeitung dieser Aufgabe nicht unbedingt erforderlich.

Zur Verallgemeinerung
des Kursinhalts

Im Abschnitt 1.1 wird darauf hingewiesen, daß die Methoden, die zur Berechnung der elektromagnetischen Ausbreitungsvorgänge erarbeitet sind, auch auf viele nicht-elektromagnetische Ausbreitungsvorgänge angewandt werden können. Viele nicht-elektromagnetische Ausbreitungsvorgänge werden nämlich durch Differentialgleichungen beschrieben, die nur weniger allgemein sind als die Differentialgleichungen der elektrischen Leitung, diesen aber sonst gleichen.

Durch Gegenüberstellung der Differentialgleichungen des jeweiligen nichtelektromagnetischen Ausbreitungsvorganges mit den Differentialgleichungen der elektrischen Leitung lassen sich Analogien finden zwischen nichtelektrischen Größen und $u(z,t)$; $i(z,t)$; R' ; L' ; G' ; C' . Bei sinusförmiger Erregung lassen sich Analogien finden zwischen nichtelektrischen Größen und $\underline{U}(z)$; $\underline{I}(z)$; R' ; L' ; G' ; C' . Die für $\underline{U}(z)$ und $\underline{I}(z)$ mit Hilfe von R' ; L' ; G' ; C' dargestellten Lösungen lassen sich in analoger Form für nichtelektrische Größen übernehmen.

Auf den folgenden Seiten sind neben den Differentialgleichungen der elektrischen Leitung Differentialgleichungen nichtelektromagnetischer Ausbreitungsvorgänge aufgeführt. Für den Fall sinusförmiger Erregung gebe man für jeden aufgeführten Ausbreitungsvorgang die Dämpfungskonstante, die Phasenkonstante, die Phasengeschwindigkeit und die Wellenlänge an.

1 Elektromagnetische Welle auf einer Leitung

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \left(R' + L' \frac{\partial}{\partial t} \right) i; \quad \frac{\partial i}{\partial z} = - \left(G' + C' \frac{\partial}{\partial t} \right) u$$

2 Verlustlos angenommene Schwingung einer Saite

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{1}{S} \frac{\partial F_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = m' \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

v_y = Geschwindigkeit eines Drahtelementes senkrecht zur z-Richtung; $[v_y] = \text{m/s}$
 F_y = Kraft senkrecht zur z-Richtung; $[F_y] = \text{N}$
 S = Kraft, mit der die Saite gespannt ist; $[S] = \text{N}$
 m' = Masse pro Längeneinheit; $[m'] = \text{kg/m}$

3 Verlustlos angenommene Ausbreitung von Schall im Festkörper

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{1}{E} \frac{\partial p_z}{\partial t}; \quad \frac{\partial p_z}{\partial z} = - \rho \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

v_z = Geschwindigkeit eines Volumenelementes in z-Richtung; $[v_z] = \text{m/s}$
 p_z = Druck in z-Richtung; $[p_z] = \text{Pa}$
 E = Elastizitätsmodul; $[E] = \text{N/m}^2$
 ρ = Dichte; $[\rho] = \text{kg/m}^3$

$1/E$ ist bei entsprechender Ausbreitung in Flüssigkeit durch die Kompressibilität k , $[k] = \text{m}^2/\text{N}$, zu ersetzen; bei Ausbreitung in Gas ist E durch das Produkt von Adiabaten-Exponent κ , $[\kappa] = 1$, und Druck in der Umgebung p_u , $[p_u] = \text{Pa}$, zu ersetzen.

4 Wärmeleitung

$$\frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{1}{\lambda} q; \quad \frac{\partial q}{\partial z} = - c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

T = Übertemperatur; $[T] = \text{K}$
 q = Wärmestromdichte; $[q] = \text{W/m}^2$
 λ = Wärmeleitfähigkeit; $[\lambda] = \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
 c = spezifische Wärmekapazität; $[c] = \text{J}/(\text{kgK})$
 ρ = Dichte; $[\rho] = \text{kg/m}^3$

5 Diffusion ungeladener Teilchen

$$\frac{\partial c}{\partial z} = - \frac{1}{D} j; \quad \frac{\partial j}{\partial z} = - \frac{\partial c}{\partial t}$$

c = Konzentration der Masse des diffundierenden Stoffes; $[c] = \text{kg/m}^3$
 j = Massenstromdichte; $[j] = \text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$
 D = Diffusionskoeffizient; $[D] = \text{m}^2/\text{s}$

6 Diffusion geladener Teilchen ohne äußeres Feld

$$\frac{\partial n_v}{\partial z} = \frac{-1}{D_v q_v} S_v; \quad \frac{\partial S_v}{\partial z} = q_v \frac{n_{v0} - n_v}{\tau_v} - q_v \frac{\partial n_v}{\partial t}$$

- n_v = Teilchenzahldichte der Teilchenart v ; [n_v] = m^{-3}
 n_{v0} = Teilchenzahldichte der Teilchenart v im Gleichgewicht; [n_{v0}] = m^{-3}
 S_v = Stromdichte infolge Ladungstransportes der Teilchenart v ; [S_v] = A/m^2
 D_v = Diffusionskoeffizient für Teilchenart v ; [D_v] = m^2/s
 q_v = Ladung pro Teilchen der Art v ; [q_v] = As
 τ_v = Lebensdauer eines Teilchens der Art v ; [τ_v] = s

2 Widerstandstransformation, Leitungsdiagramm

Lernzyklus 2.1

Lernziele

- Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 2.1 sollen Sie in der Lage sein,
- den Eingangswiderstand einer beliebig abgeschlossenen Leitung zu berechnen;
 - den Begriff Widerstandstransformation zu erläutern;
 - die Transformationseigenschaften von Leitungen anzugeben, die eine viertel oder eine halbe Wellenlänge lang sind;
 - aus den Eingangsimpedanzen einer beliebig langen Leitung mit kurzgeschlossenem und offenem Ende die Leitungskonstanten zu bestimmen;
 - Schwingkreise als Ersatzschaltbilder für kurzgeschlossene oder leerlaufende Leitungen anzugeben.

2 Widerstandstransformation, Leitungsdiagramm

2.1 Eingangswiderstand

Vierpol Die elektrische Leitung stellt hinsichtlich der Klemmenpaare am Eingang und Ausgang einen Vierpol dar (Bild 2.1). Der Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen an diesen Klemmenpaaren ist durch die Leitungsgleichungen bestimmt. So ergibt sich beispielsweise aus der mathematischen Form für $z = 0$:

$$\begin{aligned} U_a &= U_e \cosh \gamma l + Z I_e \sinh \gamma l \\ I_a &= I_e \cosh \gamma l + \frac{U_e}{Z} \sinh \gamma l \end{aligned} \quad (2.1)$$

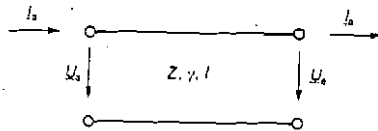


Bild 2.1
Die elektrische Leitung
als Vierpol

Bei zahlreichen Anwendungen von Leitungen ist der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen, wie er durch diese Gleichungen bestimmt wird, maßgebend. In vielen Fällen ist aber insbesondere der Eingangswiderstand von Bedeutung. Es interessiert seine Abhängigkeit vom Ausgangswiderstand und von den Eigenschaften der Leitung. Aus dem besonderen Verhalten des Eingangswiderstandes ergeben sich Anwendungen der Leitung nicht nur als Übertragungsmedium, sondern auch als vielseitiges Schaltelement.

Die elektrische Leitung ist ein Vierpol mit einem Klemmenpaar am Anfang und am Ende. Zur Berechnung des Eingangswiderstandes gehen wir von den Leitungsgleichungen (2.1) aus. Wir berücksichtigen dabei die Definition:

Definition

Der Eingangswiderstand ist das Verhältnis von Spannung zu Strom am Anfang der Leitung.

Wenn die Leitung mit einem Widerstand Z_e abgeschlossen ist, so liegt damit das Verhältnis $U_e/I_e = Z_e$ fest, und es ergibt sich der Eingangswiderstand aus den Leitungsgleichungen (2.1) zu

$$Z_a = \frac{U_a}{I_a} = Z \frac{Z_e \cosh \gamma l + Z \sinh \gamma l}{Z \cosh \gamma l + Z_e \sinh \gamma l} \quad (2.2)$$

oder:

$$Z_a = Z \frac{Z_e + Z \tanh \gamma l}{Z + Z_e \tanh \gamma l} \quad (2.3)$$

Zur Berechnung des Eingangswiderstandes einer allgemeinen, verlustbehafteten Leitung nach Gl. (2.2) oder Gl. (2.3) müssen Hyperbelfunktionen eines komplexen Argumentes bestimmt werden. Mit $\gamma = \alpha + j\beta$ geschieht das bekanntlich nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \sinh \gamma l &= \sinh \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \sin \beta l \\ \cosh \gamma l &= \cosh \alpha l \cos \beta l + j \sinh \alpha l \sin \beta l \\ \tanh \gamma l &= \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \tanh \alpha l \tan \beta l} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Zur Bestimmung des Eingangswiderstandes nach Gl. (2.3) können Tabellen oder Reliefkarten der komplexen tanh-Funktion dienen. Man drückt dazu Z_e/Z entsprechend

$$\frac{Z_e}{Z} = \tanh(x + jy) \quad (2.5)$$

durch x und y aus und erhält damit den Eingangswiderstand nach Gl. (2.3) zu

$$\frac{Z_a}{Z} = \frac{\tanh(x + jy) + \tanh(\alpha l + j\beta l)}{1 + \tanh(x + jy) \tanh(\alpha l + j\beta l)} \quad (2.6)$$

Nach einem Additionstheorem für die tanh-Funktion folgt daraus

$$\frac{Z_a}{Z} = \tanh[x + \alpha l + j(y + \beta l)]. \quad (2.7)$$

Zur Auswertung dieser Beziehung liest man aus der Tabelle oder vom Relief der tanh-Funktion den Realteil x und den Imaginärteil y der artanh-Funktion des Widerstandsverhältnisses am Ende der Leitung ab, addiert dazu Dämpfung αl und Phase βl der Leitung und liest das Widerstandsverhältnis am Anfang als tanh dieser Summe ab.

Wesentlich einfacher ist die Berechnung des Eingangswiderstandes bei der verlustlosen Leitung. Für sie ist $\alpha = 0$ und der Wellenwiderstand rein reell. Aus Gl. (2.3) folgt deshalb für die verlustlose Leitung einfach

Komplexe

$$\frac{Z_a}{Z} = \frac{Z_0 + jZ \tan \beta l}{Z_0 + jZ_0 \tan \beta l} \quad (2.8)$$

mit reellem Z . Ein spezielles Diagramm zur graphischen Bestimmung des Eingangswiderstandes nach den Gl. (2.3) und (2.8) werden wir später noch kennenlernen.

Lange Leitung –
hohe Verluste

Von praktischem Interesse sind zwei Sonderfälle der verlustbehafteten Leitung, bei denen einfache Näherungsformeln für den Eingangswiderstand gelten. Wenn die Leitung so lang ist oder so hohe Verluste hat, daß

$$\alpha l \gg 1$$

gilt, dann läßt sich der $\tanh \alpha l$ durch

$$\tanh \alpha l \approx 1$$

annähern, wie nach Gl. (2.4) dann auch der $\tanh \gamma l$ durch

$$\tanh \gamma l \approx 1.$$

Der Eingangswiderstand solch einer Leitung ist damit einfach

$$Z_a \approx Z.$$

Er ist also nahezu gleich dem Wellenwiderstand und unabhängig vom Widerstand am Ende der Leitung.

Die Bedingung $\alpha l \gg 1$ entspricht den Verhältnissen auf einer langen, verlustbehafteten Leitung. Für sie wurde schon bei der Untersuchung der Wellenausbreitung festgestellt, daß eine Reflexion vom weit entfernten Ende wegen der Dämpfung den Leitungsanfang nicht mehr erreicht. Am Leitungsanfang besteht nur eine hinlaufende Welle, die den Wellenwiderstand sieht.

Fehlanpassung

Wenn die Leitung mit einem Widerstand abgeschlossen ist, der nur wenig vom Wellenwiderstand abweicht, so spricht man von einer *kleinen Fehlanpassung*. Der Abschlußwiderstand sei

$$Z_0 = Z(1 + x) \text{ mit } |x| \ll 1. \quad (2.9)$$

Unter diesen Umständen ergibt sich der Eingangswiderstand aus Gl. (2.3) zu

$$Z_a = Z \frac{1 + \frac{x}{1 + \tanh \gamma l}}{1 + \frac{x \tanh \gamma l}{1 + \tanh \gamma l}}$$

Da das komplexe x dem Betrage nach sehr klein sein soll, gilt näherungsweise

$$Z_a = Z \left[1 + x \frac{1 - \tanh \gamma l}{1 + \tanh \gamma l} \right].$$

Wird hier die \tanh -Funktion durch e-Funktionen ausgedrückt, so folgt:

$$Z_a = Z(1 + x e^{-2\alpha l}) \quad (2.10)$$

Nach dieser Näherungsformel weicht der Eingangswiderstand umso weniger vom Wellenwiderstand ab, je kleiner die Fehlanpassung x und je größer die Dämpfung gemäß $\exp(-2\alpha l)$ sind. Die Abweichung hängt gemäß $\exp(-j2\beta l)$ von der Phasenkonstanten β und der Leitungslänge l ab, beträgt aber höchstens $|x| \exp(-2\alpha l)$. Damit läßt sich leicht feststellen, wie eine geringe Fehlanpassung am Leitungsende auf den Anfang der Leitung zurückwirkt.

2.2 Widerstandstransformation

Nach Gl. (2.2) oder Gl. (2.3) ist der Eingangswiderstand Z_a eine gebrochene, lineare Funktion von Z_0 . Für eine vorgegebene Leitung bestimmen dabei Z und γl die Koeffizienten dieser linearen Funktion. Lineare Funktionen bilden Kreise in Kreise und im Grenzfall Geraden in Kreise ab. Hat man also Z_0 -Werte, die auf geraden Linien oder auf Kreisen in der komplexen Widerstandsebene liegen, so liegen auch die zugehörigen Z_a -Werte auf Kreisen. Diese Transformationsregel gilt natürlich nur für konstante Werte der Koeffizienten in der linearen Funktion, also auch nur jeweils für eine konstante Frequenz. Bei Änderung der Frequenz ändern sich auch die Koeffizienten der gebrochenen linearen Funktion und damit das Abbildungsgesetz.

Abbildung

Besonders nützliche Transformationseigenschaften hat die *verlustlose Leitung*. Widerstände werden durch sie ohne Leistungsverluste transformiert. Für die Transformation gilt hier ganz allgemein Gl. (2.8). Zwei wichtige Sonderfälle verlustloser Leitungstransformatoren sind der $\lambda/4$ - und der $\lambda/2$ -Transformator.

Beim $\lambda/4$ -Transformator ist

$$l = \lambda/4, \quad \text{also} \quad \beta l = \pi/2. \quad (2.11)$$

Damit ist der Eingangswiderstand nach Gl. (2.8):

$$Z_a = \frac{Z_0}{Z} \quad (2.12)$$

Ein Wirkwiderstand $Z_0 = R_0$ kann also in jeden anderen Wirkwiderstand $Z_a = R_a$ transformiert werden, wenn der Wellenwiderstand des $\lambda/4$ -Transformators nur zu

$$Z = \sqrt{R_0 R_a} \quad (2.13)$$

gewählt wird.

Da die Phasenkonstante von der Frequenz abhängt, übersetzt der $\lambda/4$ -Transformator den Widerstand nur bei der Bestimmungsfrequenz richtig, wenn nämlich Gl. (2.11) erfüllt ist. Zur Widerstandstransformation für *breite Frequenzbänder* werden mehrere $\lambda/4$ -Transformatoren mit abgestuften Wellenwiderständen hintereinandergeschaltet.

Optik Praktische Beispiele für $\lambda/4$ -Transformatoren gibt es nicht nur mit elektrischen Leitungen sondern unter anderem auch in der Optik, wo *Linsen* mit $\lambda/4$ dicken Schichten vergütet werden, um die Reflexion zu mindern; nach einer Gl. (2.13) entsprechenden Beziehung muß die Brechzahl dieser Schicht das geometrische Mittel der Brechzahlen in und vor der Linse sein.

Beim $\lambda/2$ -Transformator ist

$$l = \lambda/2, \quad \text{also} \quad \beta l = \pi.$$

Damit ist der Eingangswiderstand nach Gl. (2.8):

$$Z_a = Z_0$$

Unabhängig von den Leitungseigenschaften erhält man am Eingang der $\lambda/2$ -Leitung wieder den Abschlußwiderstand.

Beispiel Beispielsweise brauchen Verbindungsleitungen nur $\lambda/2$ lang zu sein, um die Widerstandsverhältnisse nicht zu stören. Nach dem Prinzip des $\lambda/2$ -Transformators arbeiten oft auch die sogenannten *Radome*, welche als Wetterschutz oder windschnittige Verkleidung Antennen umgeben. Wenn ihre Wand nicht absorbiert und gerade $\lambda/2$ dick ist, sind sie für die Antennenstrahlung vollkommen *transparent*.

2.3 Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand

Als **Kurzschlußwiderstand** Z_K wird der Eingangswiderstand einer Leitung bezeichnet, die am Ende kurzgeschlossen ist. Für $Z_0 = 0$ folgt aus Gl. (2.3):

$$Z_K = -jZ \tanh \gamma l \quad (2.14)$$

Leerlaufwiderstand Z_L heißt der Eingangswiderstand einer Leitung bei offenem Leitungsende. Mit $Z_0 \rightarrow \infty$ folgt aus Gl. (2.3):

$$Z_L = Z \coth \gamma l \quad (2.15)$$

Multiplikation und Division beider Widerstände ergibt:

$$Z_K \cdot Z_L = Z^2; \quad \frac{Z_K}{Z_L} = \tanh^2 \gamma l.$$

Werden diese Gleichungen nach Z und γl aufgelöst, so ergibt sich:

$$Z = \sqrt{Z_K \cdot Z_L}; \quad e^{2\gamma l} = \frac{1 + \sqrt{Z_K/Z_L}}{1 - \sqrt{Z_K/Z_L}} \quad (2.16)$$

Damit lassen sich Wellenwiderstand und Ausbreitungskonstante, also die Leitungseigenschaften aus Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand berechnen. Z_K und Z_L können ihrerseits an einer beliebigen Leitung einfach gemessen werden.

Als wir die Ersatzschaltung und die Differentialgleichungen ableiteten, haben wir festgestellt, wie sich zur Bestimmung der Leitungseigenschaften die Leitungsbeiläge R' , L' , G' und C' an kurzen Leitungsstücken gemäß Bild 1.3 messen lassen. Jetzt können wir die Leitungs konstanten auch aus gemessenen Werten von Z_K und Z_L bestimmen. Diese letzte Methode ist offenbar allgemeiner anwendbar, denn während R' , L' , G' und C' an genügend kurzen Leitungsstücken gemessen werden müssen, können in Gl. (2.16) Z_K und Z_L beliebiger Leitungsstücke eingesetzt werden. Es darf nur nicht $\alpha l \gg 1$ sein, damit sich $Z_K/Z_L = 1$ ergibt und γl sich aus Gl. (2.16) berechnen läßt.

Besondere Eigenschaften haben der Kurzschluß- und der Leerlaufwiderstand einer verlustlosen Leitung. Mit $\alpha = 0$ ist $\gamma = j\beta$, und es ergibt sich aus Gl. (2.14)

$$Z_K = jZ \tan \beta l$$

und aus Gl. (2.15)

$$Z_L = -jZ \cot \beta l.$$

Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand der verlustlosen Leitung sind reine *Blindwiderstände*. Ihre Beträge sind tan- bzw. cot-Funktionen der Leitungslänge (Bild 2.2).

Bei $\beta l = n\pi$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$,

ist $Z_K = 0$ und $|Z_L| = \infty$, (2.17)

Bestimm
der Leitun

Verlustlos

während bei

$$\beta l = \frac{2n-1}{2} \pi \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \text{ umgekehrt}$$

$$|Z_k| = \infty \text{ und } Z_L = 0 \text{ ist.} \quad (2.18)$$

Insbesondere ist für $l = \lambda/2$: $Z_k = 0$ und $|Z_L| = \infty$
 und für $l = \lambda/4$: $|Z_k| = \infty$ und $Z_L = 0$.

Mit einer Leitung veränderbarer Länge können induktive und kapazitive Blindwiderstände beliebiger Größe eingestellt werden.

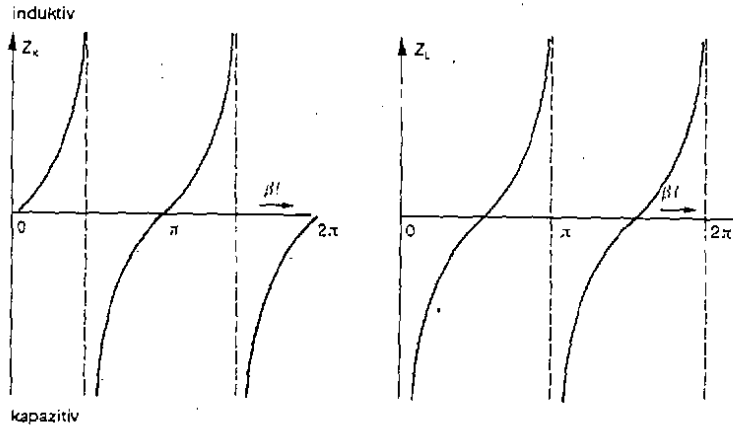


Bild 2.2 Kurzschluß- und Leerlaufwiderstände der verlustlosen Leitung

Frequenzabhängigkeit

Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand der verlustlosen Leitung sind nicht nur Funktionen der Leitungslänge, sondern auch der Frequenz. Da $\alpha = 0$ nur durch $R' = G' = 0$ erreicht wird, ist nach Gl. (1.7) und Gl. (1.4)

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \text{ und } \beta = \omega \sqrt{L' \cdot C'} \quad (2.19)$$

Z_k und Z_L hängen also von der Frequenz ähnlich ab wie von der Leitungslänge. In der Umgebung der durch Gl. (2.17) oder Gl. (2.18) bestimmten Werte für βl verhalten sich Z_k und Z_L als Funktion der Frequenz wie die Resonanzwiderstände von Parallel- oder Serienresonanzkreisen. Es lassen sich für diese Leitungen Ersatzschaltungen in Form von Schwingkreisen angeben, in denen auch geringe Leitungsverluste noch berücksichtigt werden können.

Analogie

Wir untersuchen als Beispiel den Kurzschlußwiderstand einer verlustbehafteten Leitung. Mit Gl. (2.14) und Gl. (2.4) läßt er sich aus

Kurzschl

$$Z_k = Z \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \tanh \alpha l \tan \beta l}$$

berechnen. Die Verluste der Leitung sollen so klein sein, daß $\alpha l \ll 1$ ist und der Wellenwiderstand Z praktisch reell. Ist die Leitung $\lambda/4$ lang, also $\beta l = \pi/2$, so wird Z_k sehr groß. Z_k verhält sich unter diesen Bedingungen wie der Resonanzwiderstand eines Parallelschwingkreises (Bild 2.3).

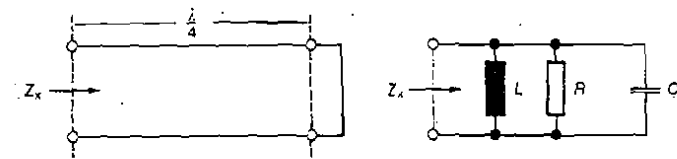


Bild 2.3 Der Kurzschlußwiderstand der $\lambda/4$ -Leitung hat die gleiche Frequenzabhängigkeit wie ein Parallelschwingkreis

Die Elemente R, L, C eines Parallelschwingkreises können nun so bestimmt werden, daß sich ein Widerstand in der Umgebung der Resonanzfrequenz genauso verhält wie der Kurzschlußwiderstand der Leitung in der Umgebung der $\lambda/4$ -Frequenz.

Bei der Resonanzfrequenz ω_0 ist

für die Leitung:

$$\beta l = \omega_0 \cdot \sqrt{L' C'} l = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2l \sqrt{L' C'}}$$

für den Kreis:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Der Eingangswiderstand bei der Resonanzfrequenz ist

für die Leitung:

$$Z_k = \frac{Z}{\tanh \alpha l}$$

$$Z_k = \frac{Z}{\alpha l}$$

für den Kreis:

$$Z_k = R$$

Weicht die Frequenz etwas von der Resonanzfrequenz ab, $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, so ist unter Vernachlässigung der Verluste:

$$\beta l = (\omega_0 + \Delta\omega) \sqrt{L'C'} l \approx \frac{\pi}{2} + \Delta\omega \sqrt{L'C'} l$$

Für $\Delta\omega \ll \omega_0$ gilt für die Blindkomponente des Eingangsleitwertes im Falle

der Leitung:

$$B = -\frac{1}{2} \cot \beta l$$

$$B = -\frac{1}{2} \cot \left(\frac{\pi}{2} + \Delta\omega \sqrt{L'C'} l \right)$$

$$B = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

des Kreises:

$$B = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

$$B = \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$B = 2 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Äquivalenz Damit beide Schaltungen bezüglich ihres Eingangswiderstandes äquivalent sind, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Gleiche Resonanzfrequenzen:

$$\frac{\pi}{2l\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2. Gleiche Resonanzwiderstände:

$$\frac{Z}{\alpha l} = R$$

3. Gleiche Frequenzabhängigkeit des Eingangsleitwertes:

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} = 2 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Daraus ergibt sich für die Elemente des Schwingkreises:

$$R = \frac{Z}{\alpha l}, \quad L = \frac{8}{\pi} L' l, \quad C = \frac{1}{2} C' l \quad (2.20)$$

Von den Leitungsbelägen ist die Induktivität beinahe voll in der Ersatzschaltung wirksam, während der Kapazitätsbelag nur zur Hälfte erscheint.

Die Güte Q eines Resonanzkreises wird aus der $1/\sqrt{2}$ Breite $2\Delta\omega$ seiner Resonanzkurve (Bild 2.4) und der Resonanzfrequenz ω_0 bestimmt:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$$

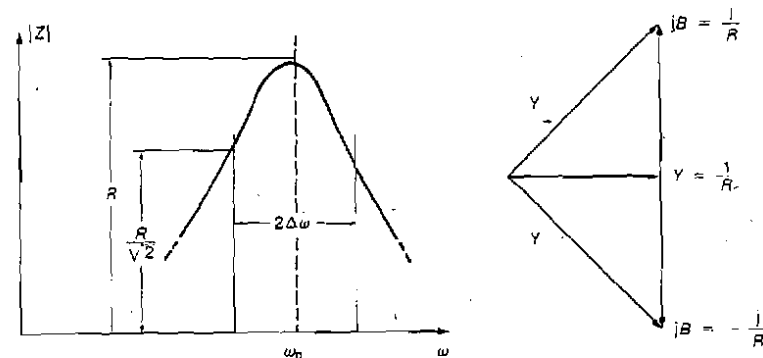


Bild 2.4 Resonanzkurve eines Parallelschwingkreises und Leitwertdiagramm für Halbwertspunkte $|Y| = \sqrt{2}/R$

Bei den Halbwertspunkten der Resonanzkurve ist der Blindleitwert gerade gleich dem Wirkleitwert:

$$B = \frac{\pi}{2Z} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{R} = \frac{\alpha l}{Z}$$

Damit ist die Güte:

$$Q = \frac{1}{2\alpha} \quad (2.21)$$

Leerlauf Diese Güteformel gilt für alle **Leitungsresonatoren** aus Doppelleitungen beliebiger Länge, ob im Kurzschluß oder Leerlauf. Die Resonanzeigenschaften einer offenen, d.h. leerlaufenden Leitung sind in Bild (2.5) mit dem Verlauf von Strom- und Spannungsamplituden zusammenfassend dargestellt.

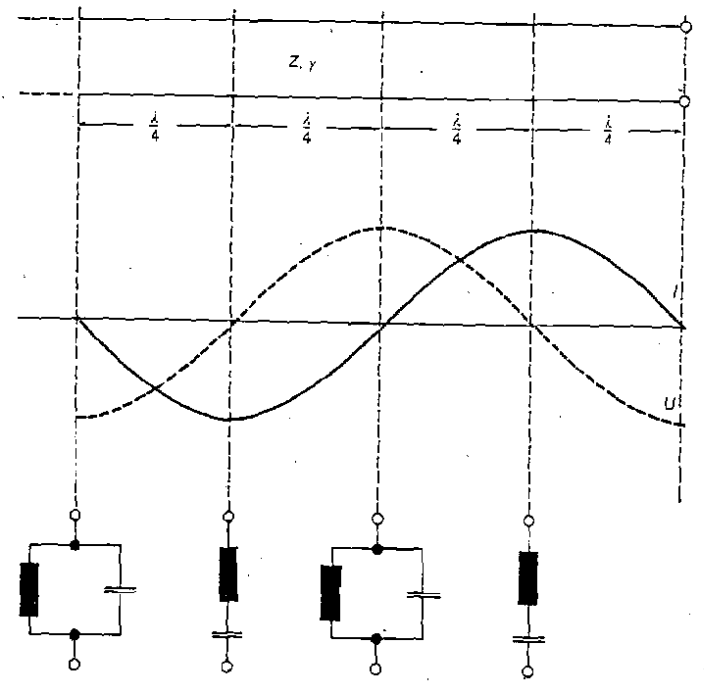


Bild 2.5
Der Leerlaufwiderstand einer Leitung hat bei $\lambda/4, 3\lambda/4 \dots$ die Eigenschaften von Serienresonanz und bei $\lambda/2, 2\lambda/2 \dots$ die Eigenschaften von Parallelresonanz

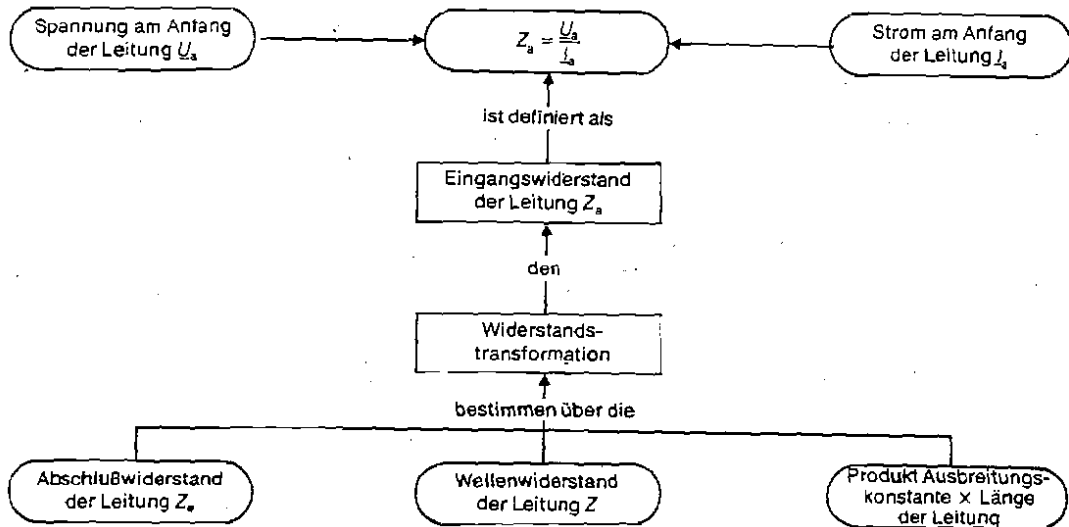
Bei $l = \lambda/4$ ist die Spannung Null, und der Eingangswiderstand entspricht hier dem eines Serienresonanzkreises.
Bei $l = \lambda/2$ ist der Strom Null, und der Eingangswiderstand verhält sich wie bei einem Parallelresonanzkreis.
Bei $(2n - 1)\lambda/4$ und $n\lambda/2$ wiederholen sich diese Resonanzeigenschaften.

Leitungsresonatoren haben bei hohen Frequenzen bessere Eigenschaften als Schwingkreise aus Spulen und Kondensatoren. Sie lassen sich einfacher bauen und haben eine höhere Güte. Immer wenn die Wellenlänge der Schwingung so klein ist, daß sich vernünftige Abmessungen ergeben, wird man darum Leitungsresonatoren verwenden.

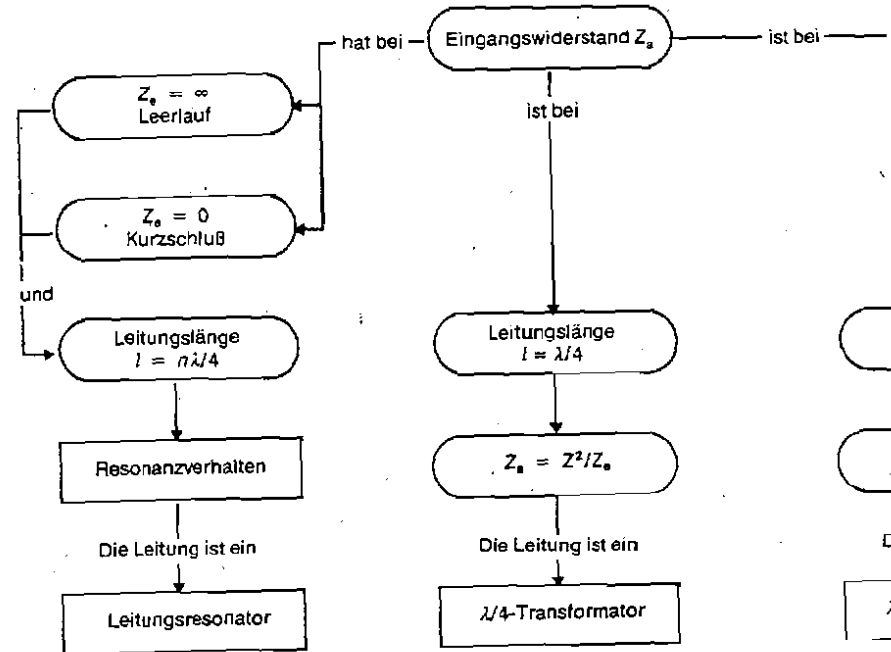
Die Vorgänge in den Resonatoren der Akustik (Stimmgabel, Pfeifen) gehorchen ähnlichen Gesetzen. Sie lassen sich auch mit den Methoden der Leitungstheorie beschreiben.

Eigen:
Leitun

Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übungsaufgaben zum Lernzyklus 2.1

Ohne Unterlagen

1 Wie lautet die Formel für den Eingangswiderstand einer beliebig abgeschlossenen, verlustbehafteten Leitung? Wie verändert sie sich, wenn Verluste vernachlässigbar klein sind?

2 Wie groß ist der Eingangswiderstand einer sehr stark verlustbehafteten Leitung?

3 Welcher Art Kurve durchläuft der Eingangswiderstand in der komplexen Widerstandsebene, wenn der Abschlußwiderstand der Leitung einen konstanten Imaginärteil hat und sein Realteil geändert wird?

4 Nennen Sie die charakteristischen Eigenschaften von $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Leitungstransformatoren!

5 Geben Sie den formelmäßigen Zusammenhang der Eingangsimpedanzwerte einer Leitung für kurzgeschlossenes und leerlaufendes Ende mit Leitungswellenwiderstand und Ausbreitungskonstante an!

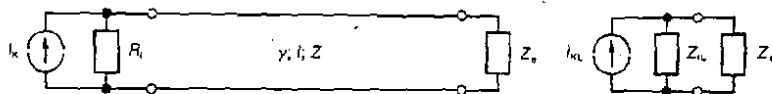
6 Welchem Typ von Resonanzkreis entspricht die leerlaufende $\lambda/2$ -Leitung bezüglich des Eingangswiderstandes?

7 Eine verlustlose Leitung sei am Ende schwach fehlangepaßt. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene des Eingangswiderstands die Ortskurve für den Fall, daß die Leitungslänge, z.B. wie bei einer Posaune, geändert wird!

Unterlagen gestattet

8 Ersatzstromquelle

Eine Zweipolquelle sei beschrieben durch ihren Kurzschlußstrom I_k und ihren reellen Innenwiderstand R_i . Sie wird über eine Leitung der Länge l sowie mit der Ausbreitungskonstanten γ und dem Wellenwiderstand Z an einen Verbraucher mit dem Widerstand Z_o geschaltet. Bestimmen Sie die Daten der Ersatzstromquelle, die die Zusammenschaltung von Stromquelle und Leitung ersetzt!



Lernzyklus 2.2

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 2.2 sollen Sie in der Lage sein,

- eine konforme Abbildung, die zur Widerstandsbestimmung auf Leitungen häufig verwendet wird, formelmäßig zu beschreiben;
- die charakteristischen Eigenschaften dieser Abbildung anzugeben;
- mit Hilfe dieser Abbildung das Spannungsverhältnis von rück- zu vortlaufender Welle sowie den Eingangswiderstand einer Leitung zu bestimmen;
- ein Verfahren zu beschreiben, mit dem man den Reflexionsfaktor auf einer Leitung messen kann;
- logarithmische Maßeinheiten für die Dämpfung anzuwenden.

2.4 Leitungsdiagramm nach SMITH

Leitungsdiagramme sind sehr nützliche Hilfsmittel bei der Bestimmung von Widerständen auf Leitungen und für die Widerstandstransformation durch Leitungen. Sie erleichtern die Auswertung von Messungen an Leitungen und den Entwurf von Schaltungen mit Leitungen. Am meisten wird das nach seinem Erfinder benannte SMITH-Diagramm benutzt. Zur Konstruktion des SMITH-Diagrammes gehen wir von dem Reflexionsfaktor aus, der nach Gl. (1.25) durch Fehlanpassung $Z_a \neq Z$ am Ende einer Leitung entsteht.

Wenn wir mit $w = Z_a/Z$ das im allgemeinen komplexe Verhältnis von Abschlußwiderstand zu Wellenwiderstand der Leitung bezeichnen, dann ist der Reflexionsfaktor entsprechend

$$r = \frac{w - 1}{w + 1}$$

eine gebrochene, lineare Funktion dieses Widerstandsverhältnisses.

Komplexe Ebene Im SMITH-Diagramm wird nun die komplexe w -Ebene nach dieser Funktion auf die komplexe r -Ebene abgebildet.

Man trennt dazu das Widerstandsverhältnis in Real- und Imaginärteil $w = x + jy$ und bildet das rechtwinklige Netz der Linien $x = \text{konst.}$ und $y = \text{konst.}$ auf die r -Ebene ab. Im einzelnen hat die Abbildung folgende Form (Bild 2.6):

1. Die reelle Achse der w -Ebene ($w = x$) wird gemäß

$$r = \frac{x - 1}{x + 1}$$

auf die reelle Achse der r -Ebene abgebildet.

Der Punkt $x = 0$ liegt bei $r = -1$; $x = 1$ liegt bei $r = 0$ und $x = \infty$ bei $r = 1$.

2. Die imaginäre Achse der w -Ebene ($w = jy$) wird gemäß

$$r = \frac{jy - 1}{jy + 1}$$

und mit $|r| = 1$ in den Einheitskreis der r -Ebene abgebildet. Die Punkte $y = \pm 1$ liegen bei $r = \pm j$.

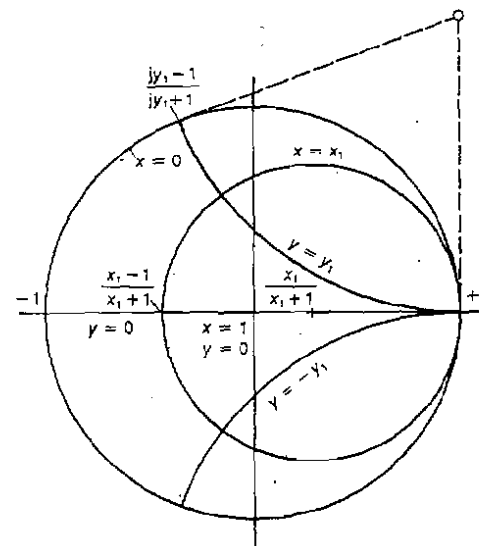


Bild 2.6
Konstruktion des
SMITH-Diagrammes

3. Eine Linie $x = \text{konst.}$ bildet einen Kreis in der r -Ebene, der als Folge der konformen Abbildung die reelle Achse ($y = 0$) rechtwinklig schneidet. Sein Mittelpunkt liegt darum auch auf der reellen Achse. Für $x = x_1$ liegen die Schnittpunkte dieses Kreises mit der reellen Achse bei

$$r = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \quad \text{und} \quad r = 1.$$

4. Eine Linie $y = \text{konst.}$ (z.B. $y = y_1$) schneidet den Einheitskreis der r -Ebene ($x = 0$) bei

$$r = \frac{jy_1 - 1}{jy_1 + 1} \quad \text{und} \quad r = 1$$

unter rechten Winkeln. Sie bildet einen Kreis, dessen Mittelpunkt durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten an den Einheitskreis bei

$$r = \frac{jy_1 - 1}{jy_1 + 1} \quad \text{und} \quad r = 1$$

bestimmt ist.

Durch das SMITH-Diagramm wird die rechte Hälfte der w -Ebene auf das Innere des Einheitskreises in der r -Ebene abgebildet.

Betrag und Phase des Reflexionsfaktors sind in der r -Ebene Polarkoordinaten.

2.5 Bestimmung von Widerständen mit dem Leitungsdiagramm

Nach den Gin. (1.24) und (1.25) ist das Verhältnis von Teilspannung der rücklaufenden zur Teilspannung der vorlaufenden Welle entlang der Leitung:

$$\frac{U_r}{U_h} = r e^{-2\gamma(l-z)}$$

Reflexionsfaktor
auf der Leitung

Dieses Verhältnis stellt den Reflexionsfaktor r_z an der Stelle z auf der Leitung dar:

$$r_z = r e^{-2\alpha(l-z)} \cdot e^{-2j\beta(l-z)}$$

Der auf der Leitung an der Stelle z wirksame Widerstand

$$Z_z = \frac{U(z)}{I(z)}$$

steht entsprechend

$$Z_z = \frac{U_h + U_r}{I_h + I_r}$$

zu r_z in folgender Beziehung:

$$Z_z = \frac{1 + r_z}{1 - r_z} \cdot Z$$

Durch Umkehrung folgt daraus

$$r_z = \frac{\frac{Z_z}{Z} - 1}{\frac{Z_z}{Z} + 1}$$

Insbesondere gilt am Anfang der Leitung für $z = 0$ einerseits

$$r_a = r \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-j2\beta l} \quad (2.22)$$

und andererseits

$$r_a = \frac{\frac{Z_a}{Z} - 1}{\frac{Z_a}{Z} + 1} \quad (2.23)$$

Zur Bestimmung des Eingangswiderstandes Z_a aus diesen Beziehungen berechnet man das Widerstandsverhältnis $w = Z_a/Z$ am Ende der Leitung und sucht den zugehörigen Punkt r im SMITH-Diagramm. Entsprechend Gl. (2.22) dreht man den Radiusvektor zu diesem Punkt um den Winkel $-2\beta l$ und verkleinert ihn um $\exp(-2\alpha l)$. Für den so erhaltenen Punkt im SMITH-Diagramm liest man entsprechend Gl. (2.23) das Widerstandsverhältnis am Leitungsanfang ab (Bild 2.7).

Weg im SM

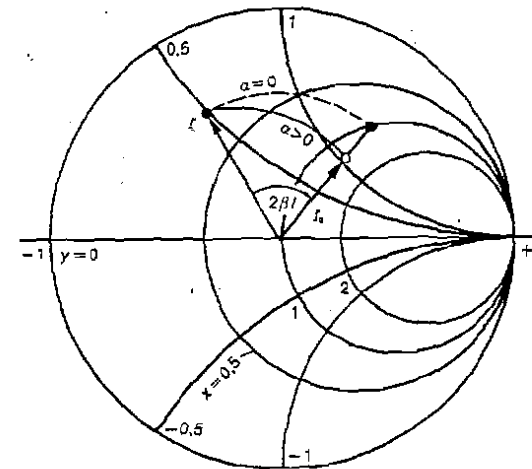


Bild 2.7
Widerstandstransformation
im SMITH-Diagramm

Besonders einfach ist die Widerstandsbestimmung bei der verlustlosen Leitung. Für $\alpha = 0$ braucht der Radiusvektor ausschließlich um den Winkel $-2\beta l$ gedreht zu werden. Für $\alpha = 0$ ist auch der Wellenwiderstand reell. Das Widerstandsverhältnis hat dann dieselbe Phase wie der Widerstand selbst.

Verlustlose

Um im SMITH-Diagramm den jeweiligen Betrag des Reflexionsfaktors r oder die Welligkeit s eintragen oder abgreifen zu können, wird es meist mit Skalen für $|r|$ und

Verlustbehaftete Leitung

s versehen. Neben diesen Skalen für $|r|$ und s erscheinen dann aber noch Skalen der logarithmischen Größen, und zwar $20 \log s$ und $-20 \log |r|$ ebenso wie $-20 \log \sqrt{1 - |r|^2}$. Diese logarithmischen Skalen sind in Anlehnung an das logarithmische Maß für die Dämpfung gewählt, das auch sonst in der Nachrichtentechnik verwendet wird. Bei verlustbehafteten Leitungen kommt man zu diesem Dämpfungsmaß auf folgendem Wege.

Für eine angepaßte Leitung vereinfacht sich die physikalische Form der Leitungsgleichungen (1.9) zu:

$$\begin{aligned} U_a &= U_0 e^{-\gamma l} \\ I_a &= I_0 e^{-\gamma l} = \frac{U_0}{Z} \cdot e^{-\gamma l} \end{aligned}$$

Für die Effektivwerte von Spannung und Strom ist nur die Dämpfungskonstante maßgebend:

$$\begin{aligned} |U_a| &= |U_0| \cdot e^{-\alpha l} \\ |I_a| &= |I_0| \cdot e^{-\alpha l} \end{aligned}$$

Das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangswirkleistung ist damit:

$$\frac{P_a}{P_0} = \frac{|U_a| |I_a| \cos \varphi_a}{|U_0| |I_0| \cos \varphi_0} = e^{-2\alpha l}$$

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ist bei Anpassung durch den Wellenwiderstand bestimmt und längs der Leitung konstant: $\varphi_a = \varphi_0$. Man bezeichnet

$$a = \alpha l = \ln \sqrt{P_0/P_a}$$

als die Leitungsdämpfung. Dieses Dämpfungsmaß ist dimensionslos. Für seine Einheit hat sich aber trotzdem der Name **Neper** eingebürgert. Eine Dämpfung von $a = 1 \text{ Np}$ bedeutet also

$$\ln \sqrt{P_0/P_a} = 1$$

oder ein Leistungsverhältnis von

$$P_0/P_a = e^2 = 7,389.$$

Noch gebräuchlicher für das Dämpfungsmaß ist die Einheit **Dezibel** gemäß der Definition:

$$a' = 10 \lg (P_0/P_a)$$

Eine Dämpfung von $a' = 1 \text{ dB}$ bedeutet:

$$10 \lg (P_0/P_a) = 1$$

oder ein Leistungsverhältnis von

$$P_0/P_a = 1,26.$$

Für $a' = 10 \text{ dB}$ ist $P_0/P_a = 10$.

Die Umrechnung der Dämpfung von Neper in Dezibel geschieht nach

$$1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$$

Die logarithmischen Dämpfungsmaße sind natürlich deshalb sehr nützlich, weil mit ihnen bei der Kettenschaltung von Leitungen und anderen Vierpolen die Produkte von Amplituden- oder Leistungsverhältnissen durch einfache *Summen* der zugehörigen logarithmischen Dämpfungen ersetzt werden.

2.6 Widerstandsmessung mit der Meßleitung

Das SMITH-Diagramm ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Auswertung von Messungen mit Meßleitungen. Meßleitungen sind starre Doppelleitungen mit normalerweise koaxialen Querschnitt. Der Außenleiter ist der Länge nach geschlitzt. Durch diesen Längsschlitz taucht eine Sonde in den Raum zwischen Außen- und Innenleiter, mit der durch Verschiebung entlang der Leitung die Spannung abgetastet werden kann. Um jede Spannungsverteilung voll erfassen zu können, muß die Schlitzlänge wenigstens die Hälfte der Leitungswellenlänge λ sein. Normalerweise arbeitet man darum mit Meßleitungen erst bei Frequenzen höher als 500 MHz und braucht dafür 30 cm Schlitzlänge.

Für so hohe Frequenzen ist die Bedingung $\alpha \ll \beta$ immer gut erfüllt. Der Wellenwiderstand ist dann praktisch reell und läßt sich aus den Querschnittsabmessungen genau berechnen.

Nach Bild 2.8a wird die Meßleitung mit dem Widerstand abgeschlossen, der gemessen werden soll. Die Spannungsverteilung entlang der Leitung wird mit der Sonde abgetastet.

Verlustlos

Reflexion

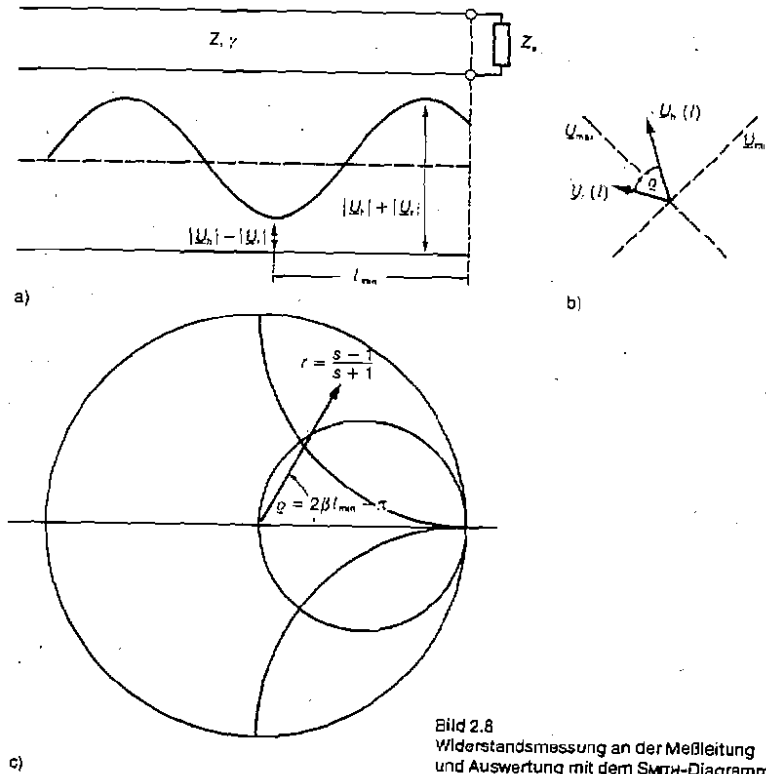


Bild 2.8
Widerstandsmessung an der Meßleitung
und Auswertung mit dem Smith-Diagramm

Es werden das Spannungsmaximum

$$U_{\max} = |U_h| + |U_r|$$

und das Spannungsminimum

$$U_{\min} = |U_h| - |U_r|$$

sowie der Ort des Minimums gemessen.

Der Betrag des Reflexionsfaktors $r = \frac{U_r}{U_h}$ wird dann aus der Welligkeit s entsprechend

$$s = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad (2.24)$$

berechnet, und zwar ergibt sich, indem man Gl. (2.24) nach r auflöst:

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1} \quad (2.25) \quad \text{Betrag}$$

Die Phase φ des Reflexionsfaktors erhält man aus dem Abstand l_{\min} des Spannungsminimums vom Leitungsende. Am Ende der Leitung ist φ der Winkel zwischen U_h und U_r (Bild 2.8b). Vom Ende zurückgehend, drehen U_h in positivem und U_r in negativem Sinne. Bei l_{\min} sind sie in Gegenphase. Es gilt also

$$2\beta l_{\min} = \varphi + \pi$$

oder

$$\varphi = 2\beta l_{\min} - \pi \quad (2.26) \quad \text{Phase}$$

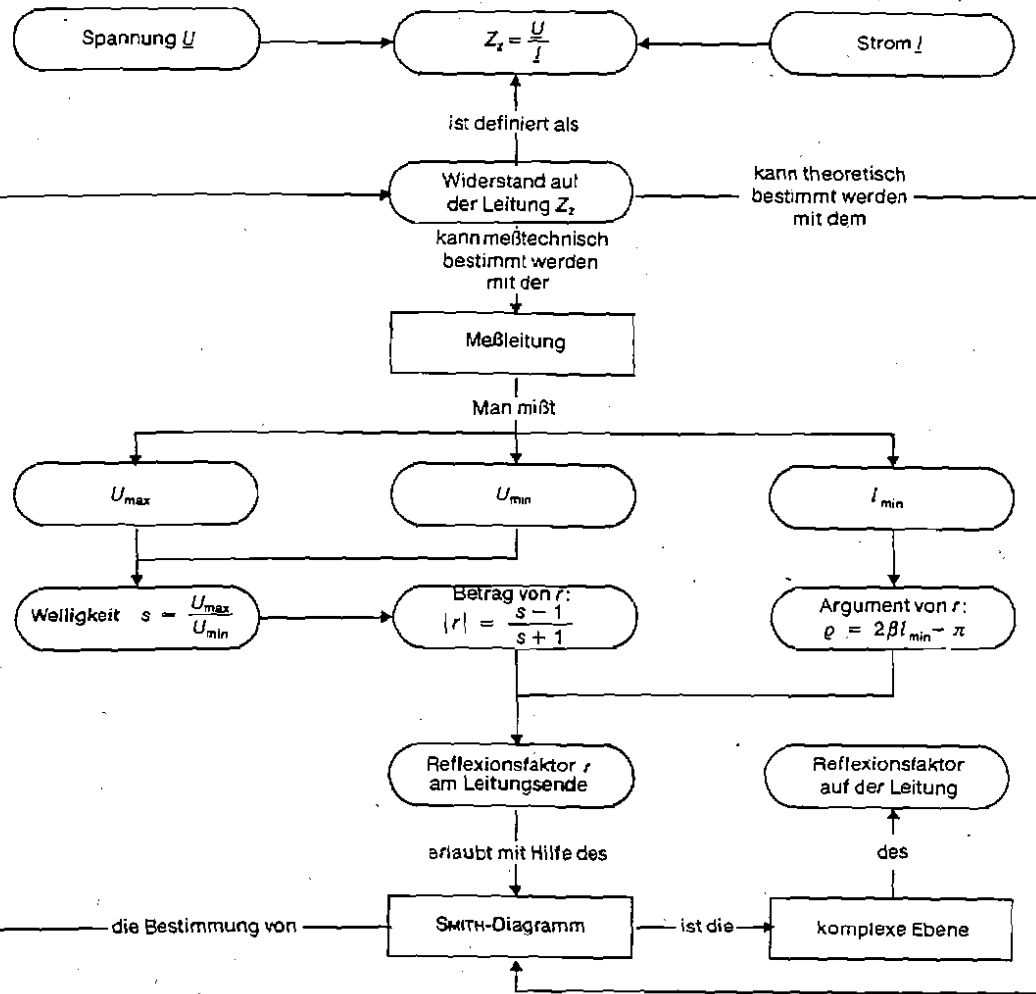
Demit ist der Reflexionsfaktor nach Betrag und Phase bestimmt. Der zugehörige Abschlußwiderstand kann aus dem Smith-Diagramm abgelesen werden (Bild 2.8c).

Bei der Widerstandsmessung mit Meßleitungen wird der unbekannte Widerstand mit dem Wellenwiderstand verglichen.

Der Wellenwiderstand bildet das Vergleichsnormale

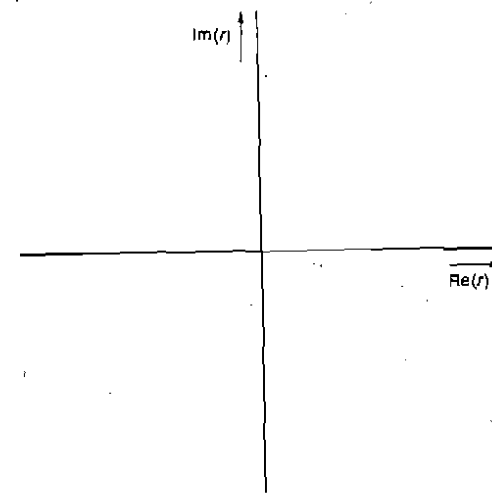
Die Querschnittsabmessungen in Meßleitungen müssen darum genau eingehalten und die Leitungen also sehr präzise ausgeführt werden.

Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übungsaufgaben zum Lernzyklus 2.2

- 1 Wie lautet die Abbildung, die dem SMITH-Diagramm zugrunde liegt? Nennen Sie die Bedeutung der Formelzeichen darin! *Ohne U*
- 2 Skizzieren Sie ein SMITH-Diagramm! Tragen Sie dazu in der komplexen Reflexionsfaktorebene Linien konstanten Realteils und konstanten Imaginärteils der Verhältnisse von Abschlußwiderstand zu Leitungswiderstand ein!



- 3 Was versteht man unter Welligkeit?
- 4 Wie lautet der Zusammenhang zwischen einem Leistungsverhältnis und seinem dB-Wert?
- 5 Erläutern Sie, wie man mit einer Meßleitung den Betrag des Reflexionsfaktors mißt!
- 6 Erläutern Sie, wie man mit einer Meßleitung die Phase des Reflexionsfaktors mißt!

7 Grundoperationen im SMITH-Diagramm

Unterlagen gestattet

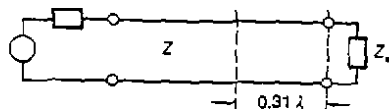
Lösen Sie diese Aufgabe mit Hilfe des beiliegenden SMITH-Diagramms (S. 721.)!

- a) Eine 50Ω -Leitung (Leitung mit Wellenwiderstand $Z = 50 \Omega$) sei mit $Z_L = (10 + j25) \Omega$ abgeschlossen. Wie groß sind Betrag und Phase des Reflexionsfaktors r ?
- b) Der durch den Leitungsabschluß bedingte Reflexionsfaktor r sei bekannt.

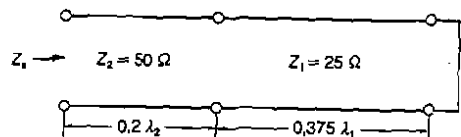
$$r = 0,5 e^{-j90^\circ}$$

Bestimmen Sie das Widerstandsverhältnis w !

- c) Eine Leitung mit dem Wellenwiderstand Z ist mit dem Widerstand Z_L abgeschlossen. Das Widerstandsverhältnis am-Ende der Leitung ist $w = Z_L/Z = 0,2 + j0,5$. Bestimmen Sie das auf den Wellenwiderstand bezogene Spannung/Strom-Verhältnis auf der Leitung in einem Abstand $0,31 \lambda$ ($\lambda =$ Leitungswellenlänge) vom Leitungsende! Nehmen Sie zunächst an, die Leitung sei verlustlos! Berücksichtigen Sie danach eine Leitungsdämpfung von $\alpha = 15 \text{ dB}/\lambda$!



- d) Gegeben sei folgende Hintereinanderschaltung einer Kurzschlußleitung mit einer Leitung anderen Wellenwiderstandes.



Bestimmen Sie den Eingangswiderstand dieser Anordnung ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)!

- e) Wie groß ist die Welligkeit s auf der Leitung, wenn das Widerstandsverhältnis des Abschlusses $w = 0,3 + j1,4$ ist?

8 Leitwertkoordinatennetz

Bestimmen Sie durch Rechnung sowie unter Benutzung des SMITH-Diagramms den Reflexionsfaktor der Leitungsabschlüsse $Z_L/Z = 0,3 + j0,4$ und $Y_L/Z = 0,3 + j0,4$! Vergleichen Sie die Ergebnisse für die beiden Leitungsabschlüsse. In welcher Weise ist das Widerstands-Koordinatennetz des SMITH-Diagramms auch als Leitwert-Koordinatennetz zu verwenden?

Bestimmen Sie unter Verwendung des SMITH-Diagramms die der Reihenschaltung $Z_1/Z = 0,3 + j0,4$ äquivalente Parallelschaltung!

Aufgaben zur Vertiefung 2

1 $\lambda/4$ -Leitung im Leerlauf

Zur Vertiefung

Das Bearbeiten dieser Aufgabe ist nicht unbedingt erforderlich. Sie zeigt aber beispielhaft, wie die im Lehrtext gezeigten Methoden auf ähnliche Probleme angewandt werden können.

Der Leerlaufwiderstand einer mit geringen Verlusten behafteten Leitung verhält sich wie der Resonanzwiderstand eines Reihenschaltkreises, wenn $\beta l \approx \pi/2$ ist. Bestimmen Sie aus den Leitungsdaten die Elemente des äquivalenten Reihenschaltkreises!

2 Kurzschlußleitung

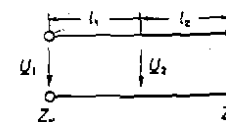
An einer Leitung mit den Teillängen $l_1 \approx l_2 = 30 \text{ km}$ wurden bei kurzgeschlossenem Leitungsende die in das folgende Bild eingetragenen Werte gemessen:

$$U_1 = 19,2 e^{j39,79^\circ} \text{ V}$$

$$U_2 = 10 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$Z_n = 0$$

$$Z_k = 242,5 e^{-j40,1^\circ} \Omega$$



Bestimmen Sie $\cosh \gamma l_1$, $\gamma = \alpha + j\beta$ und Z !

3 Toleranz für $\lambda/4$ -Leitung

Zur Vertiefung

Das Bearbeiten dieser Aufgabe ist nicht unbedingt erforderlich. Sie ist aber ein typisches, praktisch auftretendes Problem.

Ein ohmscher Widerstand R kann bekanntlich mit Hilfe eines verlustlosen, $\lambda/4$ langen Leitungsstückes an eine Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z \neq R$ angepaßt werden. Das $\lambda/4$ lange Leitungsstück muß für vollkommene Anpassung einen Wellenwiderstand von $Z_v = \sqrt{Z \cdot R}$ haben. Wie groß ist die Welligkeit $s \approx U_{max}/U_{min}$ auf der Leitung, wenn die Bedingung, die an Z_v gestellt werden muß, nicht erfüllt ist? Die Leitung und das Verbindungsstück sind verlustlos. Geben Sie einen Ausdruck für die Welligkeit in Abhängigkeit von Z_v und \sqrt{ZR} an!

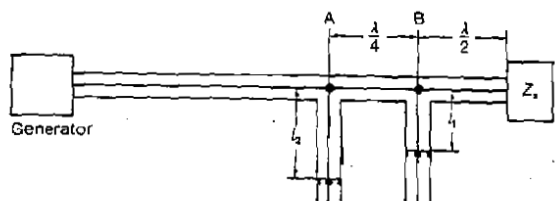
Zur praktischen Anwendung

4 Anpassung mit Sticheleitungen

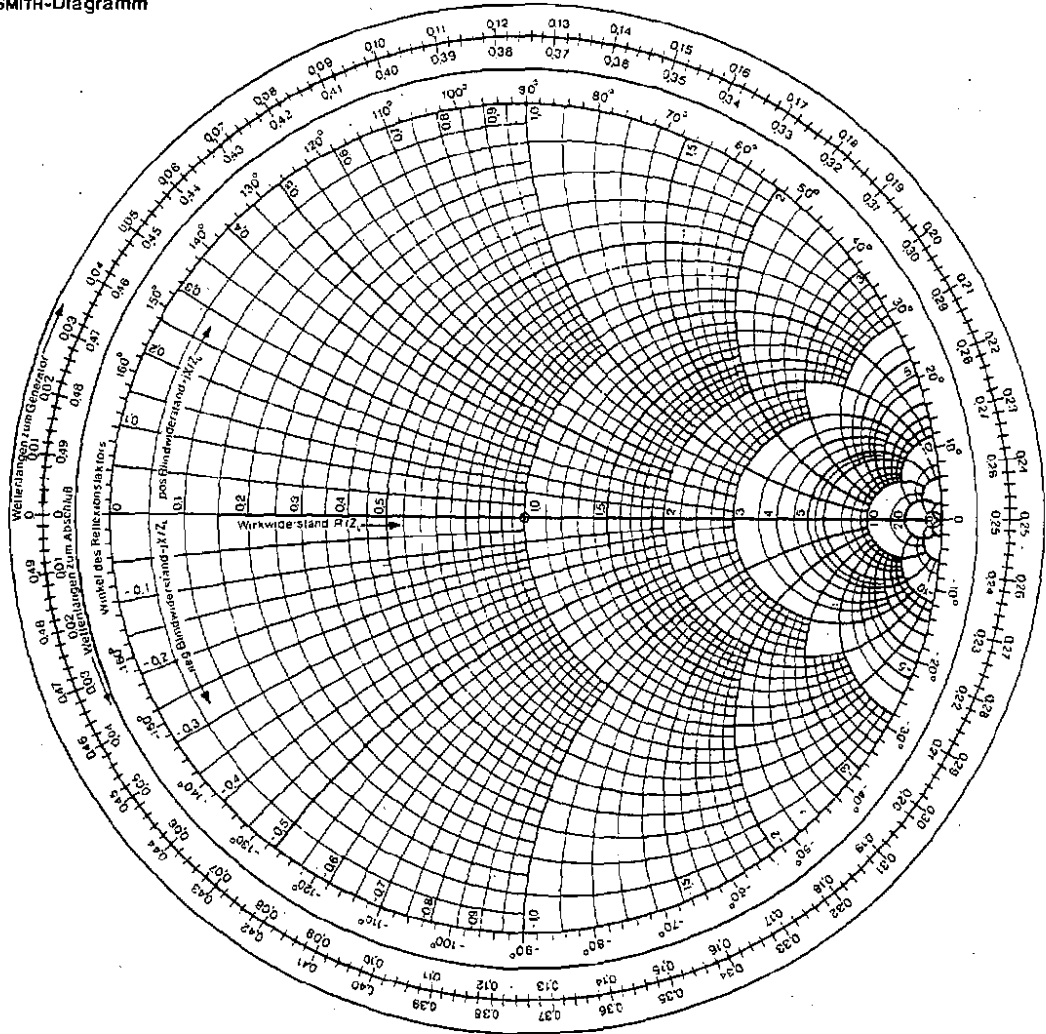
Wenn Sie diese Aufgabe nicht ohne in den Lösungen nachzuschlagen lösen können, ist das kein Grund zur Besorgnis.

Eine verlustlose Koaxialleitung mit dem Wellenwiderstand $Z = 1/Y$ verbindet einen Generator mit dem unbekanntem Widerstand $Z_x = 1/(G_x - jB_x)$. Mit zwei kurzgeschlossenen verlustlosen koaxialen *Sticheleitungen* veränderbarer Länge soll versucht werden, auf der weiterführenden Leitung links von A eine Welligkeit von Eins herzustellen. Die Sticheleitungen haben ebenfalls den Wellenwiderstand Z .

- Zeigen Sie im SMITH-Diagramm, wie lang die Sticheleitungen zu wählen sind!
- Für welche G_x ist links von A eine Welligkeit von Eins auf diese Weise überhaupt herstellbar?



SMITH-Diagramm



Parameter in radialer Richtung

| Reflexion | | Verluste in dB | |
|-----------|----------|----------------|------------|
| Faktor | | zurück- | in den |
| Amplitude | Leistung | laufend | Abschluß- |
| | | | widerstand |
| | | | laufend |
| 1,0 | 1,0 | 0 | ∞ |
| 0,9 | 0,81 | 1,0 | 10,0 |
| 0,8 | 0,64 | 2,0 | 5,0 |
| 0,7 | 0,49 | 3,0 | 4,0 |
| 0,6 | 0,36 | 4,0 | 3,0 |
| 0,5 | 0,25 | 5,0 | 2,0 |
| 0,4 | 0,16 | 6,0 | 1,5 |
| 0,3 | 0,09 | 7,0 | 1,0 |
| 0,2 | 0,04 | 8,0 | 0,5 |
| 0,1 | 0,01 | 10,0 | 0,1 |
| 0,0 | 0,00 | ∞ | 0 |

$-20 \log |r|$
 $-20 \log \sqrt{1 - |r|^2}$

3 Die Leitungskonstanten

Lernzyklus 3.1

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 3.1 sollen Sie in der Lage sein,

- die Begriffe *primäre Leitungskonstanten*, *sekundäre Leitungskonstanten* und *TEM-Welle* zu erläutern;
- die zulässigen Vereinfachungen anzugeben, mit denen Leitungsbeläge für einfache Doppelleitungsweilen berechnet werden können;
- die Frequenzabhängigkeit der Leitungsbeläge zu beschreiben;
- für das Produkt aus Induktivitäts- und Kapazitätsbelag eine einfache Beziehung mit ihrem Gültigkeitsbereich anzugeben;
- den Begriff *effektive Dielektrizitätskonstante* bei Leitungen mit geschichteten Dielektrika zu erläutern.

3 Die Leitungskonstanten

Für die Wellenausbreitung auf einer Leitung sind ihre Ausbreitungskonstante γ und ihr Wellenwiderstand Z maßgebend. γ und Z werden ihrerseits durch die Leitungsbeläge R' , L' , G' und C' bestimmt. Die Eigenschaften der Leitungsbeläge und ihr Zusammenhang mit γ und Z spielen darum eine entscheidende Rolle bei der Berechnung und dem Entwurf von Leitungen für alle Anwendungen.

Nachdem wir in den vorhergehenden Abschnitten untersucht haben, wie Ausbreitungskonstante und Wellenwiderstand die Wellenausbreitung auf Leitungen bestimmen, und nachdem sich daraus ergeben hat, wie Ströme, Spannungen und Widerstände am Eingang und Ausgang voneinander abhängen, müssen wir nun diese Leitungskonstanten selbst erst einmal näher kennenlernen. Die Leitungsbeläge R' , L' , G' und C' ergeben sich direkt aus den Querschnittsabmessungen und Materialeigenschaften der Leitung. Sie werden darum auch **primäre Leitungskonstanten** genannt. γ und Z werden dann erst durch die Leitungsbeläge bestimmt. Sie heißen deshalb **sekundäre Leitungskonstanten**.

3.1 Die primären Leitungskonstanten

Zur genauen Berechnung der Leitungsbeläge müssen eigentlich die *Maxwell'schen Gleichungen* unter den Randbedingungen des jeweiligen Leitungsquerschnittes gelöst werden. Für die einfachen Wellen auf Doppelleitungen, die wir bisher nur betrachtet und für die wir die Leitungsbeläge nur definiert haben, genügen aber *Näherungslösungen*, die für die einzelnen Konstanten unter folgenden Bedingungen gewonnen werden.

- C' : Der **Kapazitätsbelag** wird aus dem elektrostatischen Feld als Kapazität pro Längeneinheit der Leiteranordnung berechnet.
- L' : Der **Induktivitätsbelag** wird aus dem quasistationären, magnetischen Feld berechnet. Die **Stromverdrängung** in den Leitern wird dabei berücksichtigt.
- R' : Der **Widerstandsbelag** wird ebenfalls unter Berücksichtigung der **Stromverdrängung** quasistationär berechnet.
- G' : Der **Leitwertbelag** (Ableitungsbelag) wird mit dem elektrostatischen Feld unter Berücksichtigung von Leitfähigkeit und dielektrischen Verlusten im Wechselfeld berechnet.

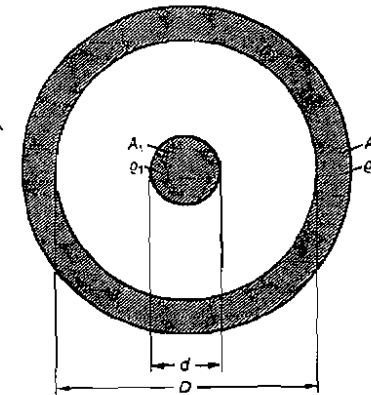


Bild 3.1
Koaxialleitung

Beispiel

Die Ergebnisse solcher Rechnungen sollen nur für ein Beispiel hier zusammengefaßt werden. Wir wählen die **Koaxialleitung**, da sie auf allen Gebieten der Elektrotechnik wichtige Anwendungen findet. Sie zeigt auch alle typischen Eigenschaften normaler Doppelleitungen. Gemäß Bild 3.1 sollen A_1 und A_2 die Querschnittsflächen von Innen- und Außenleiter sein. Der Innenleiter soll den spezifischen Widerstand ρ_1 und der Außenleiter ρ_2 haben.

Für den Stoff zwischen den Leitern werden die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r und der **Verlustwinkel** δ angenommen.

Die Formeln für die primären Leitungs konstanten sind in Tabelle 3.1 zusammengefaßt. Die Beziehungen für niedrige Frequenzen in der ersten Zeile gelten, solange die durch den **Skinneffekt** bedingten **Eindringtiefen** t wenigstens größer als die Wandstärke des Außenleiters bzw. als der Durchmesser des Innenleiters sind. Erst bei Eindringtiefen, die klein gegen diese Querschnittsabmessungen sind, gelten die Beziehungen für hohe Frequenzen in der zweiten Zeile.

Frequenzabhängigkeit der Eindringtiefe

| Frequenz | R' | L' | G' | C' |
|----------|---|--|---|--|
| niedrig | $\frac{\rho_1}{A_1} + \frac{\rho_2}{A_2}$ | $\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{D}{d} + \frac{1}{2} \right)$ innere Induktivität des Außenleiters ist vernachlässigt | $G' \approx 0$ Isolationswiderstand sehr hoch | $\frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{D}{d}}$ |
| hoch | $\frac{\rho_1}{dt, \pi} + \frac{\rho_2}{Dt, \pi}$ Eindringtiefe $t = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}}$ | $\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$ keine innere Induktivität | $2\pi \frac{\omega \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{D}{d}} \tan \delta$ | $\frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{D}{d}}$ |

Tabelle 3.1 Primäre Leitungs konstanten der Koaxialleitung

Entsprechend diesen Formeln sind Induktivitätsbelag und Kapazitätsbelag von der Frequenz nahezu unabhängig. Nur Widerstands- und Leitwertsbelag hängen stärker von der Frequenz ab. Für genügend hohe Frequenzen ist

$$R' \sim \sqrt{\omega} \quad \text{und} \quad G' \sim \omega \quad (\text{s. Bild 3.2}).$$

Aus den Beziehungen für hohe Frequenzen folgt für das Produkt aus Induktivitäts- und Kapazitätsbelag:

Produktbeziehung

$$L' C' = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \quad (3.1)$$

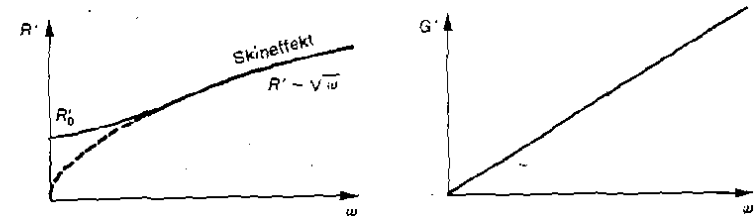


Bild 3.2 Widerstands- und Leitwertsbelag als Funktion der Frequenz

Dieses Produkt ist also unabhängig von den Querschnittsabmessungen und wird ausschließlich von den Konstanten des Stoffes zwischen den Leitern bestimmt. Diese Produktbeziehung (3.1) gilt aber nicht nur für die Koaxialleitung sondern für alle Doppelleitungen gleich welchen Querschnitts. Es müssen dazu die Leiter nur einen so kleinen Widerstand haben, daß die Längskomponente der elektrischen Feldstärke, die durch den Spannungsabfall am Leiterwiderstand entsteht, klein gegen das elektrische Transversalfeld ist. Außerdem muß der Stoff zwischen den Leitern homogen sein, also überall im Querschnitt die gleichen Werte für ϵ und μ haben. Unter diesen Bedingungen hat die einfache Leitungswelle, auf die wir uns von Anfang an beschränkt haben und die alleine für Signal- oder Energieübertragung benutzt wird, nur transversale Felder. Alle ihre Feldkomponenten liegen also in Querschnittsebenen. Man bezeichnet diese einfache Leitungswelle darum auch als **TEM-Welle** für **Transversal-Elektro-Magnetisch** und unterscheidet sie damit von anderen Wellen auf der Leitung, die auch Längskomponenten der Felder haben.

Verallgemeinerung der Voraussetzungen

Um zu zeigen, daß für jede TEM-Welle auf Doppelleitungen die Produktbeziehung (3.1) gilt, gehen wir von den **Maxwellschen Gleichungen** aus. Sie lauten in kartesischen Koordinaten x, y, z mit z als Längskoordinate und für $E_z = H_z = 0$:

Beweis

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= j\omega \mu H_x & -\frac{\partial H_x}{\partial z} &= j\omega \epsilon E_x \\ -\frac{\partial E_x}{\partial z} &= j\omega \mu H_y & \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega \epsilon E_y \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

Differenziert man das erste Gleichungspaar nach z und setzt für $\partial H_x / \partial z$ und $\partial E_z / \partial z$ vom zweiten Gleichungspaar ein, so folgt

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \gamma^2 E_y, \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \gamma^2 H_x$$

mit $\gamma^2 = -\omega^2 \epsilon \mu$.

Dieselben Gleichungen folgen für E_x und H_z , wenn man das zweite Komponentenpaar der Maxwell'schen Gleichungen nach z differenziert und vom ersten Gleichungspaar einsetzt. Man kann beide Gleichungspaare zu Vektorgleichungen zusammenfassen und erhält

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \gamma^2 \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \gamma^2 \mathbf{H} \quad (3.3)$$

Für das elektromagnetische Feld der TEM-Welle gilt also eine **Wellengleichung** ähnlich wie Gl. (1.5) für die Spannung von Leitungswellen. In ihr stellt

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (3.4)$$

die Ausbreitungskonstante der TEM-Welle dar. Vergleichen wir nun diesen Ausdruck mit

$$\gamma = j\omega \sqrt{L' C'} \sqrt{1 - jG'/\omega C'} \quad (3.5)$$

wie es für $R' = 0$ aus Gl. (1.4) folgt und berücksichtigen wir, daß $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 (1 - j \tan \delta)$ ist, so finden wir die Produktbeziehung (3.1) für alle TEM-Wellen bestätigt.

Rechenvereinfachung

Man braucht für solche Wellen oder immer dann, wenn die innere Induktivität der Leiter keine Rolle spielt, nur einen der Leitungsbeläge L' oder C' zu berechnen und erhält den anderen aus der Produktbeziehung. Das gilt mit guter Näherung sogar auch dann noch, wenn der Stoff zwischen den Leitern nicht mehr homogen ist. Bild 3.3 zeigt dazu als Beispiel eine **Koaxialleitung mit geschichteten Dielektrika** der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und ϵ_2 . Ihr Kapazitätsbelag ist

$$C' = \frac{2\pi \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_0}{\epsilon_1 \ln \frac{D}{d_e} + \epsilon_2 \ln \frac{d_e}{d}} \quad (3.6)$$

Eine Koaxialleitung mit gleichem Verhältnis der Leiterdurchmesser müßte homogen mit einem Stoff der relativen Dielektrizitätskonstanten

Effektive Dielektrizitätszahl

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \ln \left(\frac{D}{d} \right)}{\epsilon_1 \ln \left(\frac{D}{d_e} \right) + \epsilon_2 \ln \left(\frac{d_e}{d} \right)} \quad (3.7)$$

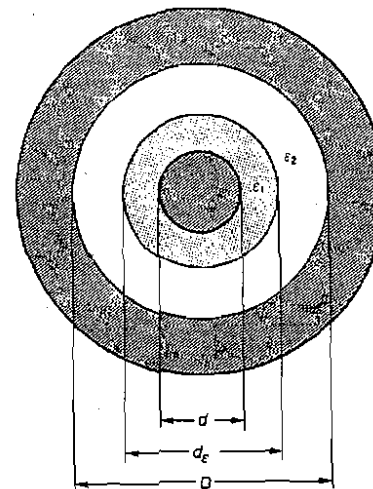


Bild 3.3 Koaxialleitung mit koaxial geschichtetem Dielektrikum

gefüllt werden, um den gleichen Kapazitätsbelag zu erhalten. Der Induktivitätsbelag ergibt sich unbeeinträchtigt von der Schichtung des Dielektrikums aus den Beziehungen der Tabelle. Die Produktbeziehung (3.1) ist demnach für inhomogene Dielektrika so zu verallgemeinern, daß man das ϵ_r durch ein ϵ_{eff} ersetzt, wie es sich durch Vergleich der Kapazitätsbeläge der Doppelleitungen mit homogenem und inhomogenem Dielektrikum ergibt.

Genaugenommen gilt die Produktbeziehung mit den effektiven Dielektrizitätskonstanten für Doppelleitungen mit inhomogenem Dielektrikum aber nur für nicht zu hohe Frequenzen, solange nämlich die Leitungswelle noch nahezu eine TEM-Welle ist. Bei sehr hohen Frequenzen, etwa dann, wenn sich die freie Wellenlänge $\lambda = 1/(f \sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \epsilon_0 \mu_0})$ in einem Dielektrikum mit $\epsilon_r = \epsilon_{\text{eff}}$ sich auf die Querschnittsabmessungen der Leitung verkürzt, verliert die Leitungswelle bei inhomogenem Dielektrikum unter Umständen immer mehr ihren TEM-Charakter. Auch die elektrostatischen Formeln für die Kapazitätsbeläge verlieren dann ihre Gültigkeit.

Frequenz

Die Tabelle 3.2 zeigt Querschnittsformen von weiteren Doppelleitungen, die praktische Bedeutung haben. Auch die Kapazitätsbeläge für diese Querschnittsformen sind in der Tabelle angegeben. **Streifenleitungen** und **Mikrostreifenleitungen** kommen in den planaren Anordnungen von **gedruckten Schaltungen** und **Filmschaltungen** vor, ebenso wie als Verbindungsleitungen in **integrierten Schaltungen**.

Für sie lassen sich Kapazitäts- und andere Leitungsbeläge allerdings nur näherungsweise durch elementare Funktionen der Querschnittsabmessungen angeben. Die Tabelle enthält jeweils zwei solcher Näherungen für Streifenbreiten, die im Verhältnis zum Leiterabstand groß bzw. klein sind.

Für die effektive Dielektrizitätskonstante der Mikrostreifenleitung mit ihrem inhomogenen Dielektrikum gilt dabei eine einheitliche Näherung für alle Streifenbreiten.

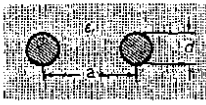
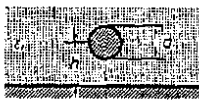
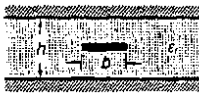
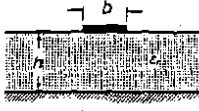
| Name | Querschnittsform | Kapazitätsbelag C' |
|-------------------------------|---|--|
| Symmetrische Zweidrahtleitung |  | $\frac{\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{2a}{d}}$ |
| Draht über Ebene |  | $\frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\operatorname{arcosh} \frac{h}{d}}$ |
| Streifenleitung |  | $\frac{b}{h} \geq 0,35: \approx 4 \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{2}{\pi} \ln 2 + \frac{b}{h} \right)$ |
| | | $\frac{b}{h} \leq 0,35: \approx \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{8h}{\pi b}}$ |
| Mikrostreifenleitung |  | $\frac{b}{h} \geq 1: \approx \epsilon_{\text{eff}} \epsilon_0 \left[\frac{b}{h} + 2,42 - 0,44 \frac{h}{b} + \left(1 - \frac{h}{b} \right)^2 \right]$ |
| | | $\frac{b}{h} \leq 1: \approx 2\pi \epsilon_{\text{eff}} \epsilon_0 / \ln \left(\frac{8h}{b} + \frac{b}{4h} \right)$ |

Tabelle 3.2 Kapazitätsbeläge von Doppelleitungen

Übungsaufgaben zum Lernzyklus 3.1

- 1 Welche Leitungs-konstanten werden primäre und welche sekundäre genannt? Ohne Unt. Warum?
- 2 Wird bei der Berechnung des Induktivitäts- und des Widerstandsbelages i.a. die Stromverdrängung berücksichtigt?
- 3 Welche Verlustursachen werden mit dem Leitwertbelag berücksichtigt?
- 4 Wie sind die Frequenzabhängigkeiten von Widerstands- und Leitwertbelag?
- 5 Ist der Widerstandsbelag stärker oder schwächer frequenzabhängig als der Leitwertbelag?
- 6 In welchem Winkel zur Ausbreitungsrichtung liegen die Feldkomponenten einer TEM-Welle?
- 7 Welche einfache Beziehung gilt für das Produkt L' C' für TEM-Wellen auf Doppelleitungen?
- 8 Was versteht man unter der effektiven Dielektrizitätskonstanten bei Leitungen mit geschichteten Dielektrika?
- 9 **Beläge einer Koaxialleitung**
Es sei eine Koaxialleitung gemäß Bild 3.1 gegeben. Die Abmessungen sind $D = 5,44 \text{ mm}$ und $d = 2,0 \text{ mm}$. Innen- und Außenleiter bestehen aus demselben Material mit einer Leitfähigkeit von $\sigma = 6,2 \cdot 10^7 \text{ S/m}$. Das Dielektrikum zwischen den Leitern hat die Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 2$ und einen Verlustwinkel von $\delta \approx \tan \delta = 2 \cdot 10^{-4}$. Bestimmen Sie mit Hilfe geeigneter Näherungsformeln für $f = 10 \text{ GHz}$ die Leitungsbeläge!

Unterlager

Lernzyklus 3.2

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 3.2 sollen Sie in der Lage sein,

- Wellenwiderstand, Dämpfungskonstante und Phasenkonstante von Freileitungen und Kabeln mit Hilfe einfacher Beziehungen aus den Leitungskonstanten zu berechnen;
- die Frequenzabhängigkeit von Wellenwiderstand, Dämpfungskonstante und Phasenkonstante zu skizzieren;
- die Eigenschaften der sog. *verzerrungsfreien Leitung* zu erläutern.

3.2 Sekundäre Leitungskonstanten

Ausbreitungskonstante und Wellenwiderstand ergeben sich aus den Leitungsbelägen. Für die Ausbreitungskonstante, bestehend aus Dämpfungs- und Phasenkonstante, gilt nach Gl. (1.13):

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}.$$

Zur Trennung in Real- und Imaginärteil wird diese Beziehung quadriert:

$$\alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta = R'G' - \omega^2 L'C' + j\omega(L'G' + R'C').$$

Der Realteil dieser Gleichung ist:

$$\alpha^2 - \beta^2 = R'G' - \omega^2 L'C'.$$

Das Quadrat des Betrages der Ausbreitungskonstante ist:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}.$$

Aus der Summe der letzten beiden Gleichungen ergibt sich die **Dämpfungskonstante** zu:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [R'G' - \omega^2 L'C' + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}}] \quad (3.8)$$

und aus der Differenz dieser Gleichungen folgt die **Phasenkonstante** zu:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 L'C' - R'G' + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}}] \quad (3.9)$$

Eine andere, oft nützlichere Darstellung von Dämpfungs- und Phasenkonstante sowie des Wellenwiderstandes ermöglichen die beiden **Verlustwinkel** ϑ und δ der Leitungsbeläge. Sie sind gemäß

$$\tan \vartheta = \frac{R'}{\omega L'}; \quad \tan \delta = \frac{G'}{\omega C'} \quad (3.10)$$

definiert.

Verallgemeinerung Wie man am Beispiel der Koaxialleitung in Tabelle 3.1 sieht, ist δ immer der Verlustwinkel des Dielektrikums zwischen den Leitern.

Mit diesen Verlustwinkeln schreibt man nun den Längsimpedanzbelag gemäß

$$Z' = R' + j\omega L' = |Z'| \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

und den Queradmittanzbelag gemäß

$$Y' = G' + j\omega C' = |Y'| \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

Damit ist

$$\gamma = \sqrt{Z' Y'} = \sqrt{|Z'| |Y'|} \cdot e^{j(\pi - \delta - \delta)/2}$$

Führt man hier für die Beträge der Längs- und Querbeläge

$$|Z'| = \frac{\omega L'}{\cos \delta} \quad \text{und} \quad |Y'| = \frac{\omega C'}{\cos \delta}$$

ein, so erhält man

$$\gamma = \frac{\omega \sqrt{L' C'}}{\sqrt{\cos \delta \cos \delta}} \cdot e^{j(\pi - \delta - \delta)/2} \quad (3.11)$$

Nach Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt sich daraus:

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{L' C'}}{\sqrt{\cos \delta \cos \delta}} \sin \frac{\delta + \delta}{2} = \beta = \frac{\omega \sqrt{L' C'}}{\sqrt{\cos \delta \cos \delta}} \cos \frac{\delta + \delta}{2} \quad (3.12)$$

Diese Darstellung der Leitungs-konstanten bezeichnet man als **trigonometrische Form**.

Für den Wellenwiderstand lautet die trigonometrische Form:

$$Z = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{L' \cos \delta}{C' \cos \delta}} e^{j(\delta - \delta)/2} \quad (3.13)$$

Der Verlustwinkel δ des Dielektrikums gibt dem Wellenwiderstand nach dieser Formel eine induktive Phase, während der Verlustwinkel δ des Leiterwiderstandes eine kapazitive Phase verursacht.

Phase des Wellenwiderstandes

3.3 Näherungen für die Leitungs-konstanten

Die Beziehungen (3.8) und (3.9) oder (3.10), (3.12) und (3.13) für den Zusammenhang zwischen primären und sekundären Leitungs-konstanten sind recht verwickelt. Es ist schwierig, aus ihnen allgemeine Gesetzmäßigkeiten und insbesondere die Abhängigkeit der verschiedenen Leitungs-konstanten von der Frequenz zu erkennen. Für die meisten praktischen Fälle sind aber wesentliche Vereinfachungen zulässig. Man erhält damit Näherungen, die über die charakteristischen Eigenschaften recht vollständig Auskunft geben.

In Praxis

3.3.1 Wellenwiderstand

a) Für **Freileitungen** mit genügend großen Leiterquerschnitten ist $G' \approx 0$ und $\omega L' \gg R'$. Es ergibt sich

$$Z \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

b) Für nahezu alle Leitungen gilt bei genügend *hohen Frequenzen* $\omega C' \gg G'$ und $\omega L' \gg R'$. Damit ist ebenfalls

$$Z \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

c) Für Kabel mit kleinem Leiterquerschnitt ist bei *tiefen Frequenzen* $R' \gg \omega L'$ und $G' \approx 0$. Es ergibt sich

$$Z = \sqrt{\frac{R'}{j\omega C'}}$$

Im allgemeinen ist der Wellenwiderstand komplex. Real- und Imaginärteil in $Z = Z_1 + jZ_2$ haben die in Bild 3.4 skizzierte Frequenzabhängigkeit. Bei tiefen Frequenzen ist

Allgemeint.

$$Z_1 \approx -Z_2 \approx \sqrt{\frac{R'}{2\omega C'}}$$

und bei hohen Frequenzen

$$Z_1 \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \quad Z_2 \approx 0.$$

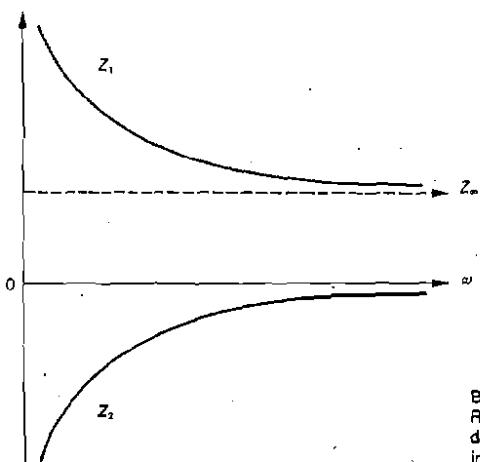


Bild 3.4
Real- und Imaginärteil
des Wellenwiderstandes $Z = Z_1 + jZ_2$
in Abhängigkeit von der Frequenz

3.3.2 Dämpfungskonstante

- a) Für verlustfreie Leitungen ist $R' = G' = 0$, also $\alpha = 0$.
- b) Bei hohem Induktivitätsbelag wie z.B. auf einer Freileitung ist $\omega L' \gg R'$ und $\omega C' \gg G'$. Die Verlustwinkel ϑ und δ sind klein, und aus der trigonometrischen Form ergibt sich:

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (3.14)$$

Abgesehen davon, daß R' und G' von der Frequenz abhängen können, ist die Dämpfung nach dieser Näherung unabhängig von der Frequenz.

- c) Eine frequenzunabhängige Dämpfungskonstante ergibt sich auch, wenn die Bedingung

$$\frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'} \quad (3.15)$$

erfüllt ist. Dann ist nämlich $\vartheta = \delta$, und die trigonometrische Form vereinfacht sich zu

$$\alpha = R' \sqrt{\frac{C'}{L'}} = G' \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (3.16)$$

Gl. (3.15) ist die Bedingung der sogenannten verzerrungsfreien Leitung. Es ist unter dieser Bedingung nicht nur die Dämpfung, sondern auch die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz. Damit werden alle Frequenzkomponenten eines Signales gleichförmig gedämpft und verzögert.

- d) Für Kabel mit kleinem Leiterquerschnitt ist bei tiefen Frequenzen $\omega L' \ll R'$ und $G' \approx 0$. Damit ergibt sich aus Gl. (3.8)

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega C' R'}{2}}$$

Im allgemeinen verläuft die Dämpfung als Funktion der Frequenz wie in Bild 3.5. Allgemein

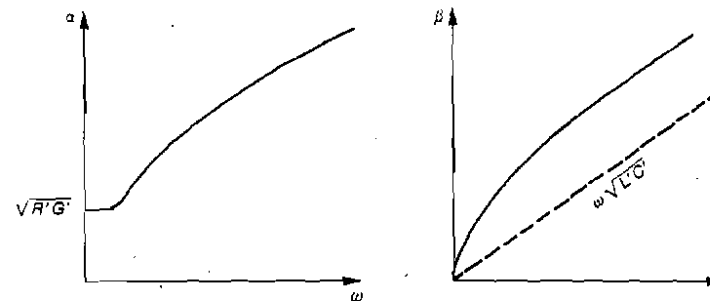


Bild 3.5 Dämpfungs- und Phasenkonstanten als Funktion der Frequenz

Bei tiefen Frequenzen gilt

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega C' R'}{2}}$$

und bei hohen Frequenzen

$$\alpha \approx \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

R' und G' hängen ihrerseits, wie in Tabelle 3.1 angegeben, von der Frequenz ab.

3.3.3 Phasenkonstante

a) Für verlustfreie Leitungen ist $R' = 0$ und $G' = 0$, also

$$\beta = \omega \sqrt{L' C'}$$

b) Bei hohem Induktivitätsbelag wie z.B. auf der Freileitung oder bei hohen Frequenzen ist $\omega L' \gg R'$ und $\omega C' \gg G'$. Die Verlustwinkel ϑ und δ sind klein, und es ergibt sich aus der trigonometrischen Form:

$$\beta = \omega \sqrt{L' C'}$$

c) Für Kabel bei tiefen Frequenzen ist $\omega L' \ll R'$ und $G' \approx 0$. Damit ist

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega C' R'}{2}}$$

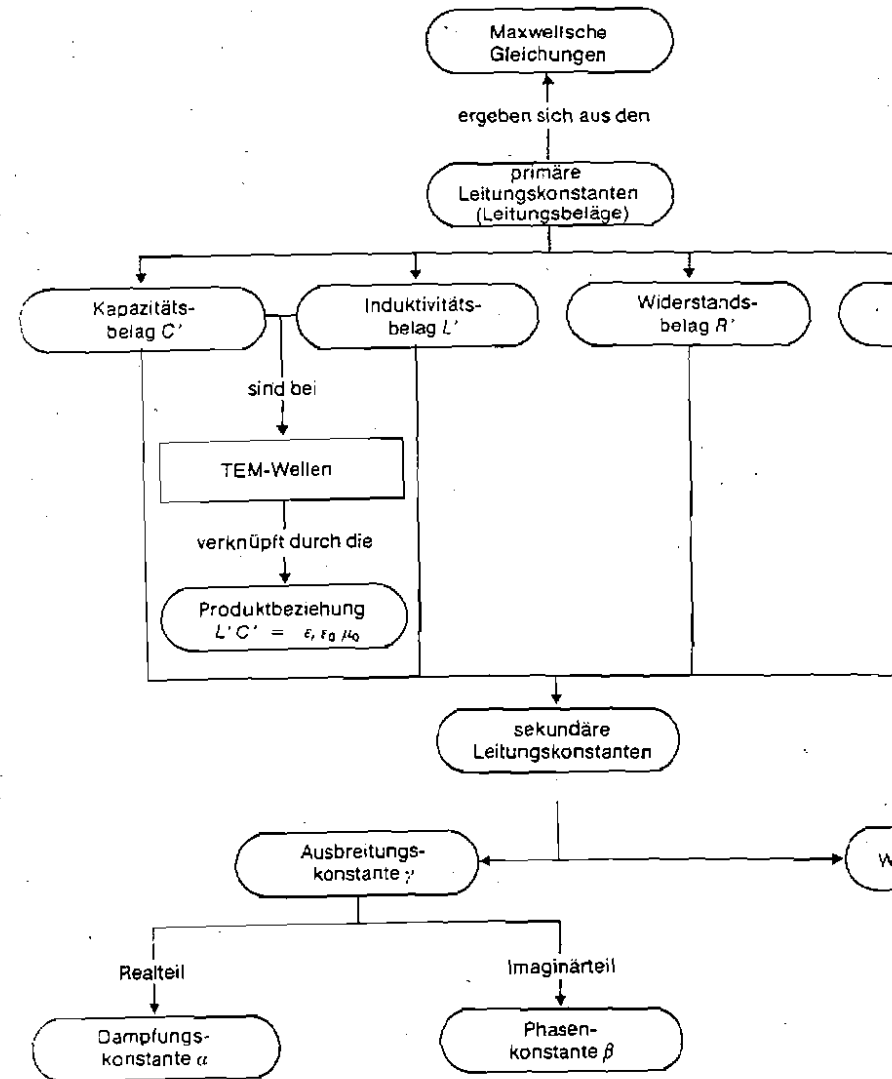
Allgemeinfall Im allgemeinen hängt die Phasenkonstante wie in Bild 3.5 von der Frequenz ab. Bei tiefen Frequenzen ist

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega C' R'}{2}}$$

und bei hohen Frequenzen

$$\beta = \omega \sqrt{L' C'}$$

Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übungsaufgaben zum Lernzyklus 3.2

- Ohne Unterlagen*
- 1 Wie sind die Verlustwinkel ϑ und δ der Leitungsbeläge definiert?
 - 2 Wie lauten die trigonometrischen Formen für Dämpfungs- und Phasenkonstante sowie für den Wellenwiderstand?
 - 3 Wie ist das Verhältnis von Imaginär- zu Realteil des Leitungswellenwiderstandes bei tiefen Frequenzen, und wie bei hohen?
 - 4 Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Dämpfungskonstante α von der Frequenz f . Wie groß ist α bei $f = 0$?
 - 5 Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Phasenkonstante β von der Frequenz f ! Welche Steigung hat die Asymptote für $f \rightarrow \infty$?

- Unterlagen gestattet*
- 6 **Eigenschaften einer Koaxialleitung**
Berechnen Sie für die Koaxialleitung aus der Übungsaufgabe 8 zum Lernzyklus 3.1 mit Hilfe geeigneter Näherungsformeln die Ausbreitungskonstante, die Wellenlänge, die Phasengeschwindigkeit und den Wellenwiderstand bei $f = 10$ GHz!

Lernzyklus 3.3

Lernziele

- Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 3.3 sollen Sie in der L
- zwischen Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit
 - den Begriff *Dispersion* zu erklären;
 - aus der Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante Phasen-Gruppengeschwindigkeit zu bestimmen.

3.4 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Im eingeschwungenen Zustand wandern die Nulldurchgänge von Strom oder Spannung einer kontinuierlichen Welle auf der Leitung mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Es ist dieses also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenphase, die sog. **Phasengeschwindigkeit**. Für die *verlustfreien* Leitungen und in der *verzerrungsfreien* Leitung oder auch bei hohem Induktivitätsbelag oder hohen Frequenzen ist $\beta = \omega \cdot \sqrt{L' C'}$. Die Phasengeschwindigkeit ist dann

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

also praktisch konstant, denn L' und C' sind nahezu unabhängig von der Frequenz. Mit der Produktbeziehung (3.1) ist die Phasengeschwindigkeit von TEM-Wellen

Lichtgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

Wenn immer also die Leiterwiderstände genügend niedrig sind oder bei inhomogenem Dielektrikum die Frequenz nicht zu hoch ist, so daß die Leitungswelle noch nahezu TEM-Charakter hat, breitet sie sich ebenso schnell aus wie eine homogene ebene Welle im Stoff mit ϵ_{eff} , ϵ_0 und μ_0 .

Im allgemeinen ist aber β nicht einfach proportional zur Frequenz. Die Phasengeschwindigkeit ist dann frequenzabhängig, d.h., die Phasen kontinuierlicher Wellenzüge verschiedener Frequenzen wandern mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit

Wir untersuchen die Wirkung einer frequenzabhängigen Phasengeschwindigkeit an einer **Schwebung**. Wir nehmen zwei kontinuierliche Wellenzüge gleicher Amplitude aber etwas verschiedener Frequenzen ω_1 und ω_2 an. β_1 und β_2 seien die Phasenkonstanten dieser Wellenzüge bei der Ausbreitung auf der Leitung.

Der Momentanwert der Spannung beider Wellen als Funktion von Zeit und Ort ist bei Vernachlässigung der Dämpfung

$$u(z, t) = \hat{U} \cdot [\cos(\omega_1 t - \beta_1 z) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 z)].$$

Nach Umformung der Kosinusfunktion ist:

$$u(z, t) = 2 \cdot \hat{U} \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} z \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z \right] \quad \text{Momen}$$

Die erste Kosinusfunktion in diesem Produkt stellt als Funktion von Ort und Zeit die **Einhüllende** der Schwebung dar, zwischen der die Spannung nach der zweiten Kosinusfunktion mit der Kreisfrequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ oszilliert (s. Bild 3.6).

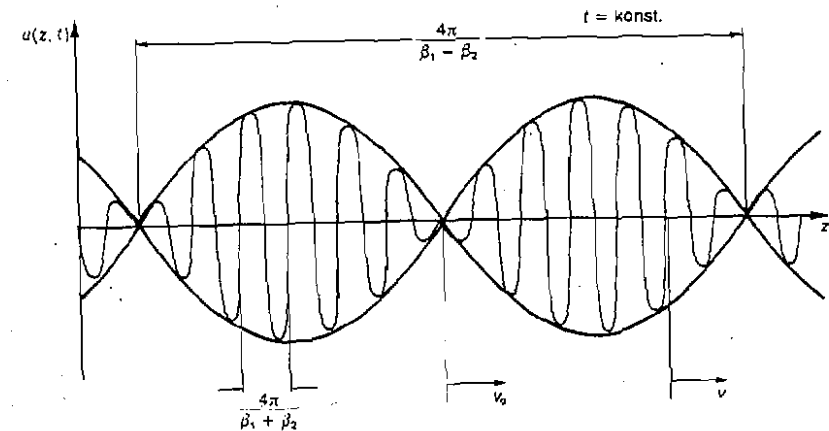


Bild 3.6 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei der Ausbreitung einer Schwebung

Diese **Oszillation** wandert entsprechend der Phasenkonstanten $(\beta_1 + \beta_2)/2$ mit der Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (3.17)$$

auf der Leitung.

Die *Einhüllende* der Schwebung dagegen hat die Kreisfrequenz $(\omega_1 - \omega_2)/2$. Sie wandert entsprechend der Phasenkonstanten $(\beta_1 - \beta_2)/2$ für die Schwebung mit der Geschwindigkeit:

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2} \quad (3.18)$$

Die *Einhüllende* der Schwebung wandert mit einer anderen Geschwindigkeit als die *Oszillation* innerhalb der *Einhüllenden*.

Die Energie des elektrischen und magnetischen Feldes auf der Leitung ist zwischen jeweils zwei benachbarten Knoten der *Einhüllenden* lokalisiert. Durch die Knoten findet kein *Energetransport* statt. Die Energie der Schwebung wandert darum mit der Geschwindigkeit v_g der *Einhüllenden*. Beim Grenzübergang $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ wird aus Gl. (3.17)

Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{\beta},$$

also die Phasengeschwindigkeit auf der Leitung. Aus Gl. (3.18) wird

Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (3.19)$$

Wie aus der Ausbreitung der Schwebung zu schließen, ist v_g die Geschwindigkeit einer Gruppe von Wellen in der Umgebung der Frequenz ω und insbesondere die Geschwindigkeit, mit der die Energie dieser Gruppe wandert. Man nennt v_g darum *Gruppengeschwindigkeit*.

Frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit

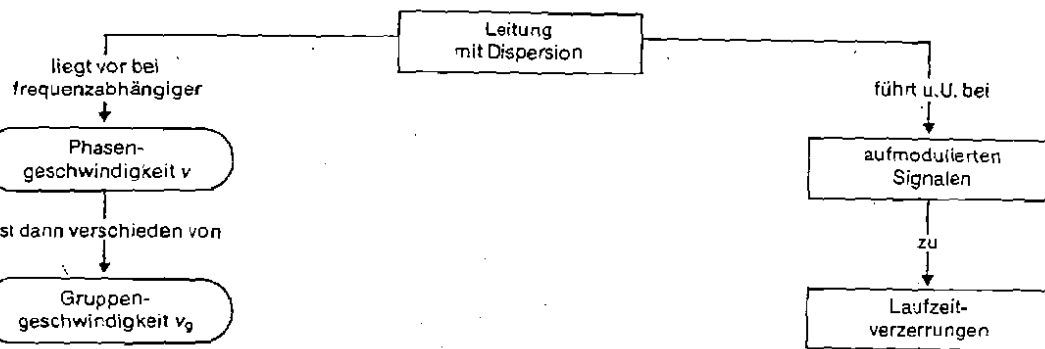
Bei frequenzunabhängiger Phasengeschwindigkeit ist $v_g = v$. Ändert sich v aber mit der Frequenz, dann ist v_g verschieden von v und muß entsprechend Gl. (3.19) durch *Differentiation der Phasenkurve* ermittelt werden. Diese Erscheinung, daß die Phasengeschwindigkeit einer Welle von ihrer Frequenz abhängt, heißt *Dispersion*. Also:

Wenn auf einer Leitung die Wellen eine andere Gruppen- als Phasengeschwindigkeit haben, so hat diese Leitung Dispersion.

Signale, die Wellen *aufmoduliert* sind, wandern mit der Gruppengeschwindigkeit, ähnlich wie die Schwebung mit dieser Geschwindigkeit wandert. Die Gruppengeschwindigkeit ist allerdings nur dann ein zuverlässiges Maß für die Ausbreitung eines allgemeinen Vorganges, wenn dieser nur Frequenzen eines schmalen Bandes

enthält, oder umgekehrt die *Gruppengeschwindigkeit* für alle Frequenzen, die in dem Vorgang enthalten sind, nahezu konstant ist. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, dann wird der Vorgang bei der Ausbreitung ohnehin seine Form verlieren, und man hat keinen einwandfreien Bezugspunkt mehr für die Definition einer Geschwindigkeit. Modulationssignale werden je nach Frequenzabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit im Modulationsband verzerrt. Sie erleiden die sog. *Laufzeitverzerrungen*.

Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übungsaufgaben zum Lernzyklus 3.3

- 1 Ist bei Dispersion die Phasengeschwindigkeit frequenzabhängig?
- 2 Was gilt bei dispersionfreien Leitungen für das Verhältnis von Phasen- zu Gruppengeschwindigkeit?
- 3 Wie nennt man bei modulierten Signalen die Verzerrungen durch frequenzabhängige Gruppengeschwindigkeit?

Ohr

Aufgaben zur Vertiefung 3

1 Mikrostreifenleitung

Eine Mikrostreifenleitung mit einem Wellenwiderstand von 50Ω soll auf verlustarmen Keramiksubstrat ($\epsilon_r = 10$) der Dicke $0,5 \text{ mm}$ aufgebaut werden. Wie breit ist der vernachlässigbar dünne, gut leitende Streifen zu fertigen? Bestimmen Sie die Toleranz für die Leiterbreite, wenn der Wellenwiderstand nur um 1% schwanken soll!

Bemerkungen Die Leitung soll bei $f = 2 \text{ GHz}$ betrieben werden. Geeignete Näherungslösungen sind zulässig.

2 Entzerrung einer Leitung

Gegeben ist eine Leitung mit den Daten:

$$R' = 10,6 \text{ } \Omega/\text{km},$$

$$L' = 0,63 \text{ mH/km},$$

$$G' = 0,63 \text{ } \mu\text{S/km},$$

$$C' = 38 \text{ nF/km}.$$

Die Eingangsspannung wird gebildet aus der Summe zweier Spannungen gleicher Amplitude mit den Frequenzen $f_1 = 1,8 \text{ kHz}$ und $f_2 = 2,2 \text{ kHz}$.

- Bestimmen Sie die Ausbreitungskonstante sowie die Phasengeschwindigkeit für die Frequenzen f_1 und f_2 !
- Mit welcher Geschwindigkeit breiten sich die Knoten der Schwebung auf der Leitung aus?
- Welche Eigenschaften muß ein Entzerrer besitzen, der die Verzerrungen infolge unterschiedlicher Dämpfung und unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit beseitigt? (Angabe je 1 km Leitungslänge.)
- Durch Änderung der Daten der Leitungsbeläge besteht theoretisch die Möglichkeit, die Leitung verzerrungsfrei zu machen. Welche Lösung ist praktisch sinnvoll?

4 Ersatzschaltungen, Kettenleiter und periodische Strukturen

Lernzyklus 4.1

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 4.1 sollen Sie in der Lage sein,

- einige wichtige Eigenschaften von Leitungsvierpolen anzugeben;
- unter Verwendung von Ersatzschaltungen mit konzentrierten Elementen die Übertragungseigenschaften von Leitungen zu berechnen;
- die Begriffe *elektrisch kurze Leitung*, *Längsspannung* und *Querstrom* zu erläutern;
- ein Berechnungsverfahren anzuwenden, das besonders geeignet für die Untersuchung mehrerer hintereinandergeschalteter Vierpole ist;
- Filter zu berechnen, in denen mehrere gleichartige Vierpole hintereinander geschaltet sind.

4 Ersatzschaltungen, Kettenleiter und periodische Strukturen

4.1 Allgemeine Leitungsersatzschaltungen

Bezüglich der Klemmenpaare am Anfang und Ende bildet die elektrische Leitung einen Vierpol. Dieser Vierpol ist passiv, d.h., er enthält keine Energiequellen. Er ist linear, solange die Feldstärken in den Grenzen bleiben, für die Leitungsströme nach dem Ohmschen Gesetz fließen, und im Isolierstoff zwischen den Leitern kein elektrischer Durchbruch eintritt. Außerdem ist der Vierpol reziprok, denn Leitungen bestehen normalerweise aus isotropen Stoffen mit richtungsunabhängigen Eigenschaften – also skalaren Stoffkonstanten ϵ und μ . Leitungsvierpole mit homogenen Leitungen sind auch immer richtungssymmetrisch. Wie alle Vierpole dieser Art läßt sich auch der Leitungsvierpol durch Ersatzschaltungen aus konzentrierten Schaltelementen – also Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten – darstellen. Solche Ersatzschaltungen sind in mancher Hinsicht nützlich. Es können mit ihnen Leitungen nachgebildet und z.B. die Leitungseigenschaften an diesen Ersatzschaltungen studiert werden. Andere physikalische Ausbreitungsvorgänge, für die die elektrische Leitung selbst nur ein Modell ist, können dann auch durch diese Ersatzschaltungen dargestellt werden. Schließlich kann aber auch umgekehrt die Leitung als Modell für andere Vierpole benutzt werden.

Symmetrische Vierpole lassen sich auf einfache Weise durch Π - oder T-Schaltungen darstellen (Bild 4.1).

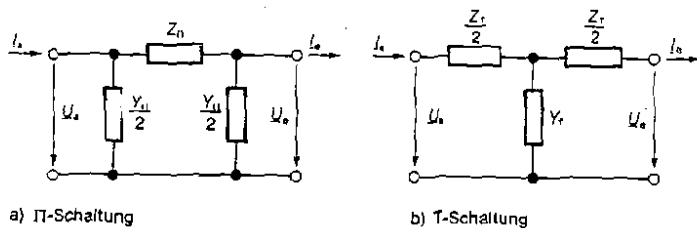


Bild 4.1 Allgemeine Ersatzschaltungen richtungssymmetrischer Vierpole

Für die Π -Schaltung nach Bild 4.1 a ist der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom am Eingang und Ausgang:

$$U_a = U_e \cdot \left(1 + \frac{1}{2} Z_0 \cdot Y_{11} \right) + Z_0 \cdot I_e$$

$$I_a = I_e \cdot \left(1 + \frac{1}{2} Z_0 \cdot Y_{11} \right) + U_e \cdot Y_{11} \left(1 + \frac{Z_0 \cdot Y_{11}}{4} \right)$$

Die Leitungsgleichungen lauten:

$$U_a = U_e \cdot \cosh \gamma l + Z \cdot I_e \cdot \sinh \gamma l$$

$$I_a = I_e \cdot \cosh \gamma l + \frac{U_e}{Z} \cdot \sinh \gamma l$$

Die Π -Schaltung wird zur Ersatzschaltung für die Leitung, wenn die Koeffizienten der Vierpolgleichungen mit den Koeffizienten der Leitungsgleichungen übereinstimmen, wenn also

$$\cosh \gamma l = 1 + \frac{Z_0 \cdot Y_{11}}{2}$$

$$Z \cdot \sinh \gamma l = Z_0 \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{Z} \cdot \sinh \gamma l = Y_{11} \cdot \left(1 + \frac{Z_0 \cdot Y_{11}}{4} \right)$$

ist.

Für die Elemente der Π -Schaltung ergibt sich daraus:

$$Z_0 = Z \sinh \gamma l \tag{4.2}$$

$$Y_{11} = \frac{2 \cdot \tanh \frac{\gamma l}{2}}{Z} \tag{4.2}$$

Für die T-Schaltung nach Bild 4.1 b gelten entsprechende Überlegungen. Auch mit dieser Schaltung kann die Leitung nachgebildet werden. Die Elemente der T-Schaltung müssen dazu entsprechend

$$Y_{11} = \frac{1}{Z} \sinh \gamma l$$

$$Z_0 = 2 \cdot Z \cdot \tanh \frac{\gamma l}{2} \tag{4.3}$$

gewählt werden. Diese Formeln sind zu den Formeln für die Elemente der Π -Schaltung dual. So ergibt sich aus der Formel für den Längswiderstand der Π -Schaltung der Querleitwert der T-Schaltung, wenn Z durch $1/Z$ ersetzt wird. Ebenso folgt der Längswiderstand der T-Schaltung aus der Formel für den Querleitwert der Π -Schaltung, wenn gleichfalls Z durch $1/Z$ ersetzt wird.

Zu beachten ist, daß die Scheinwiderstände und -leitwerte beider Ersatzschaltungen über Z und γ in transzendenter Weise von der Frequenz abhängen. Es gilt darum für eine bestimmte Leitung bei jeder Frequenz ein anderes Ersatzschaltbild. Das Frequenzverhalten von $Z_{\Pi,T}$ und $Y_{\Pi,T}$ läßt sich allgemein nicht durch konzentrierte Schaltelemente nachbilden.

Frequenzabhängigkeit

4.2 Näherungsweise Ersatzschaltungen für kurze Leitungen

Für genügend kurze Leitungen lassen sich Ersatzschaltungen angeben, die auch das Frequenzverhalten richtig beschreiben. Als kurz werden hier Leitungen mit

„Elektrische Länge“

$$|\gamma \cdot l| \ll 1 \tag{4.4}$$

bezeichnet. Es handelt sich dabei um elektrisch kurze Leitungen. Die Bedingung (4.4) kann durchaus noch für geometrisch sehr lange Leitungen erfüllt sein, wenn nur die Phasenkonstante genügend klein ist. Für die Energieübertragung in der Starkstromtechnik sind die Frequenzen immer so niedrig (25 bis 60 Hz), daß auch $|\gamma|$ immer sehr klein ist. Bei diesen Frequenzen sind die Leitungen elektrisch immer kurz, selbst bei großen geometrischen Längen.

Unter der Bedingung (4.4) werden die Hyperbelfunktionen in den Gln. (4.2) und (4.3) durch wenige Glieder ihrer Potenzreihen gut angenähert:

$$\sinh \gamma l \approx \gamma l + \frac{1}{6} \cdot (\gamma l)^3$$

$$\cosh \gamma l \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot (\gamma l)^2$$

$$\tanh \frac{\gamma l}{2} \approx \frac{1}{2} \cdot \gamma l - \frac{1}{24} \cdot (\gamma l)^3$$

Die Elemente der Π -Ersatzschaltung bestimmen sich damit näherungsweise zu

$$\begin{aligned} Z_{\Pi} &\approx Z \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \gamma^2 l^2 \right) \\ Z_{\Pi} &\approx (R'l + j\omega L'l) \cdot \left[1 + \frac{1}{6} \gamma^2 l^2 \right] \approx R'l + j\omega L'l \end{aligned} \tag{4.5}$$

und

Näherung

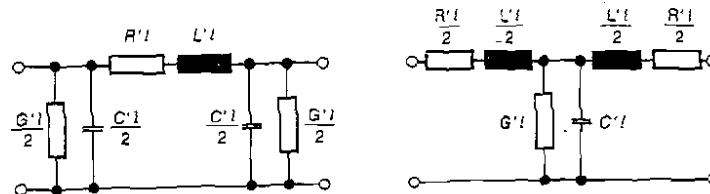
$$\begin{aligned} Y_{\Pi} &\approx \frac{\gamma l}{Z} \left(1 - \frac{1}{12} \gamma^2 l^2 \right) \\ Y_{\Pi} &\approx (G'l + j\omega C'l) \cdot \left[1 - \frac{1}{12} \gamma^2 l^2 \right] \approx G'l + j\omega C'l. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Bei Vernachlässigung der Glieder von dritter Ordnung in der kleinen Größe γl gilt also für die kurze Leitung die Π -Ersatzschaltung nach Bild 4.2a. Dieses ist eigentlich die Ersatzschaltung, die wir für ein infinitesimal kurzes Leitungsstück angenommen und auf der wir die Leitungstheorie aufgebaut hatten. Mit den Gln. (4.5) und (4.6) können wir jetzt feststellen, bis zu welchen endlichen Leitungslängen die Ersatzschaltung des infinitesimal kurzen Stückes Gültigkeit hat. Die Glieder

Rückblick

$$\frac{1}{6} \cdot \gamma^2 \cdot l^2 \text{ bei } Z_{\Pi} \text{ und } \frac{1}{12} \cdot \gamma^2 \cdot l^2 \text{ bei } Y_{\Pi}$$

stellen Korrekturglieder dar; mit ihnen können die Fehler dieser Näherung abgeschätzt werden.



a) Π -Schaltung

b) T-Schaltung

Bild 4.2 Ersatzschaltungen für kurze Leitungen

Für die T-Ersatzschaltung gelten entsprechende Überlegungen. Ihre Elemente sind für kurze Leitungen näherungsweise:

$$\begin{aligned} Y_T &\approx (G'l + j\omega C'l) \cdot \left[1 + \frac{1}{6} \gamma^2 l^2 \right] \approx G'l + j\omega C'l \\ Z_T &\approx (R'l + j\omega L'l) \cdot \left[1 - \frac{1}{12} \gamma^2 l^2 \right] \approx R'l + j\omega L'l \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die kurze Leitung hat also eine T-Ersatzschaltung nach Bild 4.2b. Für kurze Leitungen im Sinne der Bedingung (4.4) lassen sich auch die Leitungsgleichungen vereinfachen. Wenn die Hyperbelfunktionen durch die ersten Glieder ihrer Potenzreihen angenähert werden, ist:

$$\begin{aligned}
 U_a &\approx U_e \cdot \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2} \right) + I_e \cdot Z \cdot \gamma l \\
 &\approx U_e \cdot \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2} \right) + I_e \cdot (R'l + j\omega L'l) \\
 I_a &\approx I_e \cdot \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2} \right) + U_e \cdot \frac{\gamma l}{Z} \\
 &\approx I_e \cdot \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2} \right) + U_e \cdot (G'l + j\omega C'l)
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Vereinfachung
der Leitungsgleichungen

Wenn schließlich auch noch $\frac{\gamma^2 l^2}{2}$ gegenüber eins vernachlässigt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 U_a &\approx U_e + I_e \cdot (R'l + j\omega L'l) \\
 I_a &\approx I_e + U_e \cdot (G'l + j\omega C'l).
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Bei der Energieübertragung in der Starkstromtechnik beschreiben diese Gleichungen die praktischen Verhältnisse fast immer genügend genau. Nach ihnen unterscheidet sich die Anfangsspannung U_a von der Endspannung U_e nur um die sogenannte **Längsspannung** $I_e \cdot (R'l + j\omega L'l)$, d.h. um den Spannungsabfall des Endstromes am Längswiderstand der Leitung. Der Anfangsstrom I_a unterscheidet sich vom Endstrom I_e um den sogenannten **Querstrom** $U_e \cdot (G'l + j\omega C'l)$, d.h. um den Strom, den die Endspannung durch den Querleitwert der Leitung treibt.

4.3 Kettenleiter

Ein Kettenleiter entsteht, wenn mehrere Vierpole hintereinandergeschaltet werden (Bild 4.3). Sind alle Vierpole gleich, so ist der Kettenleiter *homogen*. Sind die einzelnen Vierpole auch noch richtungssymmetrisch, so bilden sie einen *richtungs-symmetrischen* Kettenleiter. Es sollen hier nur richtungssymmetrische und damit homogene Kettenleiter betrachtet werden.

Ebenso wie eine Leitung durch eine Vierpol-Ersatzschaltung dargestellt werden kann, kann umgekehrt jeder richtungssymmetrische Vierpol durch eine Leitung

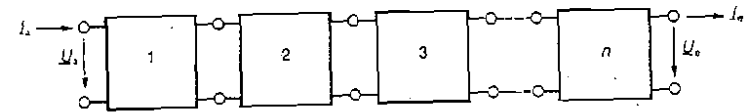


Bild 4.3 Allgemeiner Kettenleiter

ersetzt werden. Ist der Vierpol durch seine Π -Schaltung gegeben (Bild 4.1 a), dann errechnen sich aus Gl. (4.1) die Daten der äquivalenten Leitung zu

$$\begin{aligned}
 \cosh \gamma l &= 1 + \frac{Z_n Y_n}{2} \\
 Z &= \sqrt{\frac{Z_n}{Y_n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Z_n Y_n}{4}}}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Ist der Vierpol durch seine T-Schaltung gegeben (Bild 4.1 b), dann sind die Daten der äquivalenten Leitung

$$\begin{aligned}
 \cosh \gamma l &= 1 + \frac{Z_T Y_T}{2} \\
 Z &= \sqrt{\frac{Z_T}{Y_T} \cdot \left(1 + \frac{Z_T Y_T}{4} \right)}
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Die Daten der äquivalenten Leitung können schließlich auch durch Messung oder Berechnung der Kurzschluß- und Leerlaufwiderstände am Vierpol selbst bestimmt werden. Dabei gelten wieder die Gl. (2.16). Der Vierpol wird durch das Übertragungsmaß

$$g = \gamma l
 \tag{4.12}$$

der äquivalenten Leitung und ihren Wellenwiderstand Z vollständig charakterisiert.

Werden in einem Kettenleiter nun mehrere Vierpole hintereinandergeschaltet (Bild 4.3), so besteht das Leitungersatzbild aus einer entsprechenden Kaskadenschaltung von mehreren identischen Leitungen (Bild 4.4). Dem Kettenleiter mit n Gliedern entspricht also einfach eine homogene Leitung mit n -facher Länge der Ersatzleitung für den einzelnen Vierpol in der Kette. Für die homogene Leitung sind Strom und Spannung am Anfang und Ende durch die Leitungsgleichungen verknüpft.

Mit dem Übertragungsmaß g nach Gl. (4.12) lauten sie:

$$\begin{aligned} U_a &= U_e \cdot \cosh ng + I_e \cdot Z \cdot \sinh ng \\ I_a &= I_e \cdot \cosh ng + \frac{U_e}{Z} \cdot \sinh ng \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dieses sind die Kettenleitergleichungen. Die Berechnung der Eigenschaften von Kettenleitern ist damit auf die Berechnung von Leitungen zurückgeführt.

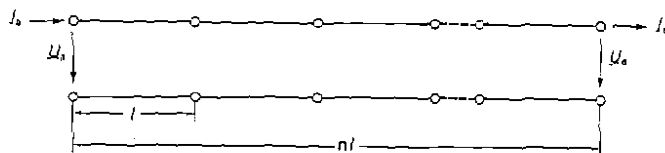


Bild 4.4 Leitungersatzbild für richtungssymmetrischen Kettenleiter

Ausbreitung im Kettenleiter

Es gelten für Kettenleiter die gleichen Gesetze der Wellenausbreitung wie für Leitungen. Allerdings kann man diese Wellenausbreitung nicht kontinuierlich wie auf Leitungen beobachten, sondern nur in diskreter Weise an den Klemmenpaaren, welche den Ausgang eines Vierpols mit dem Eingang des folgenden verbinden. An diesen Klemmenpaaren läßt sich aber die Spannungs- und Stromverteilung und damit die Überlagerung von vor- und rücklaufenden Wellen ebenso feststellen wie auf Leitungen. Auch sie lassen sich mit den Kettenleitergleichungen berechnen. Ähnlich wie bei Leitungen werden Spannungen, Ströme und Widerstände auch durch den Kettenleiter transformiert.

4.4 Wellenfilter

Eine wichtige Anwendung findet die Kettenleitertheorie beim Berechnen und Entwerfen von Filterschaltungen, die aus mehreren gleichartigen Filtern in einer Kette bestehen. Zur Erzielung einer guten Siebwirkung werden in Wellenfiltern oft viele gleichartige Reaktanz-Vierpole hintereinandergeschaltet. Sie bilden dann einen Kettenleiter.

Beispiel Wir betrachten als einfaches Beispiel einen Tiefpaß aus Längsinduktivitäten L und Querkapazitäten C (Bild 4.5). Ein elementarer Vierpol dieser Kette ist die Π -Schaltung in Bild 4.6.

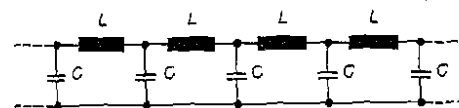


Bild 4.5 Ein homogener Kettenleiter aus Reaktanzen bildet ein Wellenfilter.

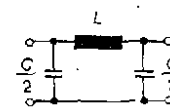


Bild 4.6 Elementarer Vierpol in Π -Schaltung

Es ergibt sich aus dem Vergleich mit Bild 4.1 a

$$Z_n = j\omega L, \quad Y_n = j\omega C.$$

Gemäß Gl. (4.10) sind damit das Übertragungsmaß des elementaren Vierpols und sein Wellenwiderstand gegeben durch

$$\begin{aligned} \cosh g &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC \\ Z &= \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 \cdot LC}{4}}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Trennt man das Übertragungsmaß nach Real- und imaginärteil

$$g = a + jb$$

wobei a Dämpfungsmaß und b Phasenmaß genannt werden, dann erhält man aus Gl. (2.4)

$$\cosh a \cdot \cos b + j \cdot \sinh a \cdot \sin b = 1 - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC.$$

Der Realteil dieser komplexen Gleichung ist

$$\cosh a \cdot \cos b = 1 - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC$$

und der Imaginärteil

$$\sinh a \cdot \sin b = 0.$$

Diese Gleichungen werden entweder durch

$$a = 0 \quad \cos b = 1 - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC \quad (4.15)$$

oder durch

$$b = n\pi \quad \cosh a = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC \right) \quad (4.16)$$

mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

erfüllt.

Der trigonometrische Kosinus ist dem Betrage nach immer kleiner als eins; der hyperbolische Kosinus ist dem Betrage nach immer größer als eins.

Für $|1 - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC| < 1$ gilt darum die Lösung (4.15), für $\frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC > 2$ aber die Lösung (4.16) mit $n = 1$.

Die Lösung (4.15) gilt also für den Frequenzbereich $0 < \omega < 2/\sqrt{LC}$. In diesem Frequenzbereich ist nach den Gln. (4.15) das Dämpfungsmaß Null.

Dieser Frequenzbereich wird darum **Durchlaßbereich** genannt. Die Lösung (4.16) gilt für $2/\sqrt{LC} < \omega < \infty$; die Kette hat hier eine mit der Frequenz ständig zunehmende Dämpfung. Darum wird dieser Frequenzbereich auch **Sperrbereich** genannt. Die Frequenzcharakteristik von Dämpfungs- und Phasenmaß im Durchlaß- und im Sperrbereich ist in Bild 4.7 skizziert.

Um den Verlauf des Phasenmaßes b im Durchlaßbereich zu ermitteln, wird die entsprechende Gl. (4.15) folgendermaßen umgeschrieben:

$$\frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC = 1 - \cos b \approx 2 \cdot \sin^2 \frac{b}{2}$$

Daraus ergibt sich für das Phasenmaß im Durchlaßbereich die folgende Frequenzcharakteristik:

Phasenmaß

$$b = 2 \cdot \arcsin \frac{\omega \sqrt{LC}}{2}$$

Um den Verlauf des Dämpfungsmaßes a im Sperrbereich zu ermitteln, wird die entsprechende Gl. (4.16) in ähnlicher Weise umgeschrieben:

$$\frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot LC = \cosh a + 1 \approx 2 \cdot \cosh^2 \frac{a}{2}$$

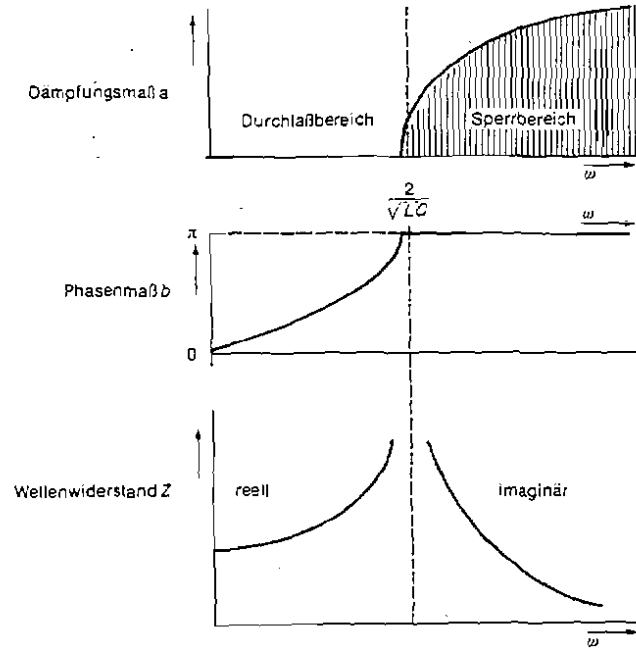


Bild 4.7 Dämpfungs-, Phasen- und Wellenwiderstandscharakteristik des einfachen Tiefpasses

Wenn diese Beziehung nach a aufgelöst wird, ergibt sich folgende Dämpfungscharakteristik im Sperrbereich:

$$a = 2 \operatorname{arcosh} \frac{\omega \sqrt{LC}}{2}$$

Dämpfung

Der Wellenwiderstand ist nach Gl. (4.14) im **Durchlaßbereich** rein **reell**; das Wellenfilter kann Leistung aufnehmen und sie verlustlos übertragen. Im **Sperrbereich** ist der Wellenwiderstand rein **imaginär**. Das Wellenfilter kann in diesem Bereich keine Leistung aufnehmen. Die Phase des Wellenwiderstands ist im **Sperrbereich** **kapazitiv**, denn bei sehr hohen Frequenzen ist die Querkapazität $C/2$ am Eingang des Π -Gliedes in Bild 4.6 maßgebend.

Wellenwiderstand

Übungsaufgaben zum Lernzyklus 4.1

Ohne Unterlagen

- 1 Ein Leitungsvierpol ist normalerweise *passiv, linear, reziprok* und *richtungs-symmetrisch*. Erläutern Sie diese Begriffe!
- 2 Zeichnen Sie die allgemeinen Schaltbilder einer Π - und einer T-Schaltung!
- 3 Welcher formelmäßige Zusammenhang ist gleichbedeutend mit der Aussage: *die Leitung ist elektrisch kurz*?
- 4 Wie breit ist der Frequenzbereich, in dem eine Ersatzschaltung mit konzentrierten Elementen für einen Leitungsvierpol genau gilt?
- 5 Wie groß sind Längsspannung und Querstrom elektrisch kurzer Leitungen?
- 6 Was charakterisiert einen *homogenen* Kettenleiter?
- 7 Was versteht man unter dem Übertragungsmaß eines Vierpols? Wie nennt man den Realteil und wie den Imaginärteil des Übertragungsmaßes?
- 8 Was ist ein *Tiefpaß*? Wie nennt man seine beiden charakteristischen Frequenzbereiche? Wodurch unterscheiden sich die Realteile seines Wellenwiderstands in diesen Frequenzbereichen?

Unterlagen gestattet

- 9 **Gruppenlaufzeit eines Tiefpasses**
Berechnen und skizzieren Sie für einen verlustlosen Tiefpaß nach Bild 4.5 die Gruppenlaufzeit je Glied in Abhängigkeit von ω/ω_0 mit $\omega_0 = 2/\sqrt{LC} = 2\pi \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$. Vergleichen Sie die Gruppenlaufzeit des Tiefpasses mit der Gruppenlaufzeit einer verlustlosen Leitung, die dem Tiefpaß bei niedrigen Frequenzen äquivalent ist:

Lernzyklus 4.2

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten des Lernzyklus 4.2 sollen Sie in der Lage sein,

- das Theorem von FLOQUET¹⁾ anzugeben;
- die Hillsche Differentialgleichung und die MATHIEU-Gleichung²⁾ niederzuschreiben sowie den Zusammenhang mit den Leitungsgleichungen für periodische Strukturen zu erläutern;
- das Stabilitätsdiagramm der MATHIEU-Gleichung zu skizzieren und im Hinblick auf die Übertragungseigenschaften einer periodischen Struktur zu erläutern;
- die Interferenzerscheinungen bei der BRAGG-Reflexion zu erklären;
- zu beschreiben, wie die Breite von Durchlaß- und Sperrbereichen bei sich periodisch ändernden Strukturen von der Stärke der Schwankungen abhängt;
- die Übertragungseigenschaften von sich periodisch schwach ändernden Strukturen zu berechnen.

1 Floquet [... kg],
2 Mathieu [...]2].

4.5 Periodische Strukturen

Der homogene Kettenleiter stellt eine periodische Struktur dar, in der sich die Eigenschaften von Glied zu Glied genau wiederholen. Periodische Strukturen kommen in der Elektrotechnik aber nicht nur in Form von diskreten gleichartigen Vierpolen vor, die hintereinander geschaltet sind, sondern allgemeiner noch in verteilter Form als inhomogene Leitungen oder Wellenleiter, deren Eigenschaften sich in Ausbreitungsrichtung der Wellen periodisch ändern. Darüber hinaus beschäftigt sich die Physik mit der Ausbreitung von elektromagnetischen und anderen Wellen in Medien mit räumlich periodischen Eigenschaften. Dazu gehören Licht- und mechanische Schwingungen in Kristallen. Auch der Leitungsmechanismus von Kristallen ist auf Grund der Wellennatur der Materie als Ausbreitung von Elektronenwellen in periodischen Strukturen zu verstehen und zu erklären.

Beispiele

Die allgemeine Kettenleitertheorie beschreibt zwar bei allen diesen Ausbreitungsvorgängen die grundsätzlichen Erscheinungen; um sie aber im Detail quantitativ auszuwerten, muß man die den Ausbreitungsgesetzen zugrunde liegenden Gleichungen unter den Randbedingungen der jeweiligen periodischen Struktur lösen. Bei den elektromagnetischen Wellen handelt es sich dabei um die Lösung der Feldgleichungen und bei den Wellen auf elektrischen Leitungen sogar nur um die Differentialgleichungen der Leitung.

Bevor wir aber diese Differentialgleichungen für sich periodisch ändernde Leitungsbeiläge ins Auge fassen, wollen wir ein allgemeines Gesetz für Wellen in periodischen Strukturen besprechen, das schon unmittelbar aus der Kettenleitertheorie zu erkennen ist.

Wir nehmen an, daß $U(z)$ die Spannungsverteilung einer Welle ist, die auf der in z -Richtung sich periodisch ändernden elektrischen Leitung in positiver z -Richtung wandert. Aus der Kettenleitertheorie folgt, daß sich die Spannung von Periode zu Periode nach Maßgabe des Übertragungsmaßes $g = \gamma p$ nur um den Faktor $\exp(-g) = \exp(-\gamma p)$ ändert.

Dabei ist p die Periodenlänge. Es gilt also das **Theorem von FLOQUET**:

$$U(z + p) = e^{-\gamma p} U(z) \quad (4.17)$$

Daraus folgt aber auch, daß

$$e^{\gamma(z-p)} U(z+p) = e^{\gamma z} U(z)$$

eine periodische Funktion von z ist, die sich in eine *Fourierreihe* entsprechend

$$e^{\gamma z} U(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m e^{-i2m\pi z/p}$$

entwickeln läßt. Infolgedessen wird

$$U(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m e^{-\gamma_m z} \quad (4.18)$$

$$\text{mit } \gamma_m = \gamma + j2m\pi/p. \quad (4.19)$$

Die Welle erscheint danach als eine Summe von unendlich vielen *Teilwellen* mit Ausbreitungskonstanten γ_m . Die Teilwellen existieren aber nicht unabhängig voneinander, sondern gehören als Glieder einer räumlichen Fourierentwicklung alle zu einer bestimmten Welle auf der periodischen Struktur. Sie werden darum auch **Raumharmonische** dieser Welle genannt. Nur alle diese Teilwellen zusammen erfüllen die **Randbedingungen** der periodischen Struktur.

Sie breiten sich auch alle mit der gleichen Gruppengeschwindigkeit aus. Das erkennen wir am einfachsten, wenn wir Wellenausbreitung ohne Dämpfung annehmen, also $\gamma = j\beta$ setzen, und irgendwelche Verluste vernachlässigen. Dann erhalten wir zwar für die **Phasengeschwindigkeit** der einzelnen Teilwellen entsprechend

$$v_m = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{\omega}{\beta + \frac{2m\pi}{p}} \quad (4.20)$$

verschiedene Werte, die **Gruppengeschwindigkeit** ist aber entsprechend

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta_m} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (4.21)$$

für alle Teilwellen gleich.

Während also die Gruppe als Ganzes mit einheitlicher Gruppengeschwindigkeit wandert, laufen die einzelnen Teilwellen mit ganz verschiedenen Phasengeschwindigkeiten. Teilwellen der negativen Ordnung $m < -\beta p/2\pi$ laufen mit ihren Phasen sogar **entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung** der Gruppe.

Um nun zu untersuchen, welche Ausbreitungskonstante γ sich für die ganze Gruppe ergibt und wie groß ihre Raumharmonischen sind, fassen wir eine elektrische Leitung

Berechnung

ins Auge, deren Eigenschaften sich periodisch mit z ändern. Der Längsimpedanzbelag $Z' = R' + j\omega L'$ ebenso wie der Queradmittanzbelag $Y' = G' + j\omega C'$ sind dann ebenfalls periodische Funktionen von z . Um das gekoppelte System (1.2) von gewöhnlichen Differentialgleichungen für Spannung und Strom im eingeschwungenen Zustand zu lösen, differenzieren wir die erste dieser Gleichungen nach z und setzen von der zweiten ein:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{1}{Z'} \cdot \frac{dZ'}{dz} \cdot \frac{dU}{dz} = Z' Y' U$$

Geringe Änderung

Hier wollen wir nun der Einfachheit halber annehmen, daß Z' sich nur so wenig oder so langsam mit z ändert, daß wir in der Differentialgleichung zweiter Ordnung das Glied mit der ersten Ableitung von U vernachlässigen können. Wir erhalten dann die Wellengleichung

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = Z' Y' U \quad (4.22)$$

für U , in der aber der Koeffizient $H(z) = Z' Y'$ periodisch von z abhängt. Eine Differentialgleichung dieser Art mit periodisch variablem Koeffizienten heißt *Hillsche Differentialgleichung*. Sie hat nach dem Theorem von FLOQUET (4.17) Lösungen der Form (4.18). Um diese Lösungen zu gewinnen, geht man von Gl. (4.18) als Ansatz aus, den man in Gl. (4.22) einführt. Auch die periodische Funktion $H(z) = Z' Y'$ entwickelt man in eine Fourierreihe der Art

$$Z' Y' = \sum H_m e^{j2m\alpha z/p} \quad (4.23)$$

und setzt sie ebenfalls in Gl. (4.22) ein.

Lösung

Nachdem man in Gl. (4.22) auf der linken Seite die Fourierreihe für $U(z)$ zweimal gliedweise nach z differenziert hat und auf der rechten Seite die Reihen für $U(z)$ und $Z' Y'$ miteinander multipliziert hat, gewinnt man aus dem *Koeffizientenvergleich* der Terme mit gleichen Exponentialfunktionen von z ein lineares System von Gleichungen für die Spannungskoeffizienten \underline{U}_m der Teilwellen. Das System ist *homogen*; damit es eine *nichttriviale Lösung* hat, muß seine *Koeffizientendeterminante verschwinden*. Diese Bedingung für die Koeffizientendeterminante stellt die sog. *charakteristische Gleichung* oder *Eigenwertgleichung* dar. Sie ist eine Bestimmungsgleichung für die noch unbekannte Ausbreitungskonstante γ . Der Wert für γ , der sich aus der Eigenwertgleichung ergibt, heißt auch *Eigenwert* des Problems. Er bildet die Ausbreitungskonstante der sog. *Eigenwelle* der periodischen Struktur, der Welle nämlich, die der Struktur eigen ist, und sich auf ihr so ausbreitet, daß sich die Spannungsverteilung von Periode zu Periode wiederholt und sich dabei nur um einen konstanten Faktor ändert, so wie es das Theorem von FLOQUET in Gl. (4.17) aussagt.

Praktisch stößt man bei der Auswertung der charakteristischen Gleichung und der Lösung des linearen Gleichungssystems für die Teilwellenspannungen \underline{U}_m unter Umständen auf Schwierigkeiten. Das System hat genau genommen unendlich viele Gleichungen für ebenso viele Spannungskoeffizienten \underline{U}_m . Für numerische Lösungsverfahren muß man sich aber auf eine endliche Zahl von Gleichungen beschränken. Dabei muß man jedoch alle Teilspannungen berücksichtigen, die so groß sind, daß sie sich in der Gesamtspannung noch bemerkbar machen. Man muß dann mit ebenso vielen Gleichungen in dem linearen System rechnen. Mitunter konvergieren die Reihen nicht sehr gut, so daß die vielen notwendigen Glieder zu einem entsprechend umfangreichen Gleichungssystem führen, dessen Lösung lange Rechenzeiten braucht.

Auswertung

Um nur die wesentlichen Eigenschaften von Wellen in periodischen Strukturen zu untersuchen, wollen wir uns darum auf solche Abweichungen von homogenen Strukturen beschränken, die sich im Koeffizienten der Hillschen Differentialgleichung durch eine einfache Sinusfunktion schon erfassen lassen.

Beschränkung

In der Wellengleichung (4.22) folgt für homogene Strukturen aus dem Koeffizienten $Z' Y'$ die Ausbreitungskonstante $\gamma = \sqrt{Z' Y'}$. Bei ungedämpfter Wellenausbreitung auf verlustlosen Strukturen ist die Ausbreitungskonstante rein imaginär also $\gamma = j\beta$, so daß sich die Phasenkonstante ergibt aus:

$$\beta^2 = -Z' Y'$$

Bei periodischen Änderungen von Z' und Y' schwankt nun auch β^2 periodisch. Wir wollen von dieser Schwankung nur das erste Glied der Fourierreihe berücksichtigen, also mit

$$\beta^2(z) = \beta_0^2 + 2c \cdot \cos(2\beta_1 z) \quad (4.24)$$

rechnen.

Dabei liegt β_1 entsprechend

$$\beta_1 = \frac{\pi}{p} \quad (4.25)$$

durch die Periodenlänge p der Schwankung fest.

Unter diesen Bedingungen folgt aus der Wellengleichung (4.22) für die Spannungsverteilung folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\beta_0^2 + 2c \cdot \cos(2\beta_1 z)) U = 0 \quad (4.26)$$

Mit einer Transformation der unabhängigen Variablen entsprechend

$$v = \beta_1 z = \frac{\pi z}{p} \quad (4.27)$$

und mit den Substitutionen

$$b = \frac{\beta_0}{\beta_1} \quad q = -\frac{c}{\beta_1^2} \quad (4.28)$$

geht diese Differentialgleichung über in:

$$\frac{d^2 U}{dv^2} + (b^2 - 2q \cdot \cos(2v)) U = 0 \quad (4.29)$$

Das ist die Normalform der sogenannten MATHIEU-Gleichung. Bei reellen Werten für b und q haben ihre Lösungen von Periode zu Periode entweder den Charakter einer ungedämpften Welle oder den einer aperiodisch exponentiell gedämpften Verteilung.

Im ersten Fall ist der komplexe Faktor $\exp(-\gamma z)$ im Theorem von FLOQUET (4.17) vom Betrage eins, γ ist rein imaginär ($\gamma = j\beta$), so daß $\exp(-j\beta z)$ nur eine Phasendrehung bedeutet. Der Bereich für diese ungedämpfte Wellenlösung ist der Durchlaßbereich, wie wir ihn auch am Beispiel der Tiefpaßkette beobachtet haben.

Rückblick

Im anderen Fall, nämlich der aperiodisch gedämpften Verteilung, ist $\exp(-\gamma z)$ rein reell und kleiner als eins; auch γ ist dabei rein reell.

Diese Lösung liegt im Sperrbereich der periodischen Struktur.

Das sog. Stabilitätsdiagramm der MATHIEU-Gleichung in Bild 4.8 zeigt als Funktion von b und q die Grenzen zwischen Durchlaß- und Sperrbereichen als durchgezogene Linien an. Außerdem sind in diesem Diagramm gestrichelte Linien für konstante Werte der auf $\beta_1 = \pi/p$ bezogenen Phasenkonstante

$$v = \frac{\beta p}{\pi}$$

für die Phasendrehung βp pro Periode im Durchlaßbereich eingetragen.

In den Sperrbereichen zeigt das Diagramm strichpunktierte Linien für konstante Werte des Dämpfungsfaktors

$$s = \exp(\alpha p).$$

Die Größe $\alpha p = \ln s$ stellt das Dämpfungsmaß pro Periode der Struktur im Sperrbereich dar.

Bei Änderungen der Frequenz ändert sich von den Parametern in der MATHIEU-Gleichung in erster Linie b und zwar wegen $\beta_0 \approx \omega \sqrt{L'C'}$ proportional zu ω . Man bewegt sich dabei also parallel zur b -Achse auf vertikalen Geraden. Sehr kleine Werte von $-q$ nahe der vertikalen b -Achse des Stabilitätsdiagramms bedeuten, daß die Struktur durch periodische Schwankungen kleiner Amplitude nur schwach gestört ist. Steigert man bei so schwachen Störungen die Frequenz angefangen von $\omega = 0$, so durchläuft man nahe der b -Achse zunächst den ersten Durchlaßbereich und stößt dann bei $b = 1$ durch die Spitze des ersten Sperrbereiches. Weitere Sperrbereiche folgen bei $b = 2, 3, \dots, m \dots$

Wach

Lage c

Bei diesen ganzen Zahlen m für b ist nach Gl. (4.28) die Wellenlänge $\lambda_0 = 2\pi/\beta_0$ auf der homogenen Struktur gerade das $(1/m)$ -fache der doppelten Periodenlänge. Umgekehrt ausgedrückt liegen bei schwachen periodischen Störungen überall dort Sperrbereiche, wo die Periodenlänge nahe einem ganzen Vielfachen der halben Wellenlänge ist.

Physikalisch zu erklären sind diese Sperrbereiche mit den Reflexionen, die eine Welle der homogenen Struktur an den periodischen Störungen erfährt. Die periodischen Störungen folgen im Abstand p aufeinander.

Erklär

Die Reflexion einer Periode ist darum gegen die Reflexion von der nächstfolgenden Periode um $2\beta_0 p$ in der Phase gedreht. Wenn $2\beta_0 p = 2m\pi$ ist oder

$$p = \frac{m\lambda}{2} \quad (4.30)$$

sind alle Reflexionen in Phase und interferieren konstruktiv miteinander. Wie klein auch immer die Reflexion der einzelnen Periode unter diesen Bedingungen, wenn nur die periodische Struktur genügend lang ist, baut sich schließlich eine so hohe Gesamtreflexion auf, daß die Struktur bei diesen Wellenlängen sperrt. Nach dem Physiker BRAGG, der aufgrund dieses Effektes als erster die Kristallstruktur mit Röntgenstrahlen untersuchte, nennt man den Vorgang auch BRAGG-Reflexion.

Bei stärkeren Schwankungen der periodischen Struktur im größeren Abstand von der b -Achse des Stabilitätsdiagramms verbreitern sich die Sperrbereiche auf Kosten der Durchlaßbereiche, bis schließlich angefangen mit dem ersten Durchlaßbereich ein Durchlaßbereich nach dem anderen wegschrumpft und die periodische Struktur nur noch sperrt.

Stärkere

Aufgrund der endlichen Dämpfung im Sperrbereich ist eine periodische Struktur immer noch etwas durchlässig. Im allgemeinen ist sie aber auch im Durchlaßbereich nie ganz durchlässig. Nur wenn bei einer Frequenz im Durchlaßbereich die periodische Struktur auf beiden Seiten an die vorhergehende und nachfolgende Struktur

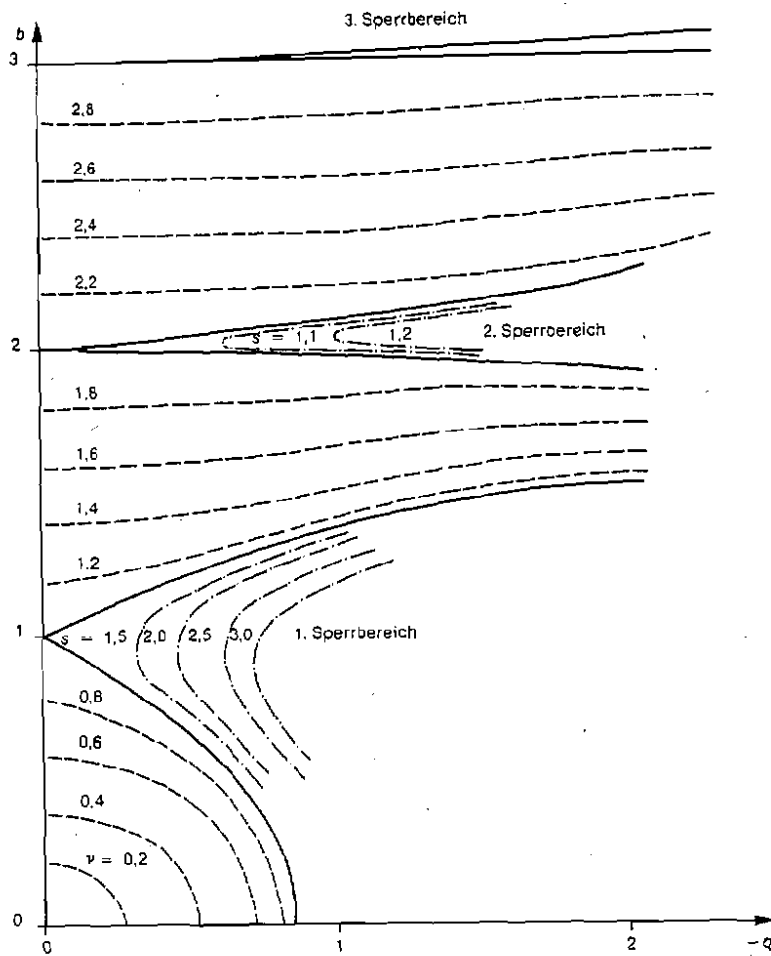


Bild 4.8 Stabilitätsdiagramm der MATHIEU-Gleichung

angepaßt wird, ist sie ohne Verluste auch vollkommen durchlässig. Bei periodischen Strukturen in Form von Kettenleitern muß an den Wellenwiderstand des einzelnen Vierpoles in der Kette angepaßt werden.

Um auch kontinuierlich verteilte, periodische Strukturen anzupassen, berechnet man die Reflexion am Eingang der Struktur und richtet die Verhältnisse ggf. so ein, daß diese Reflexion verschwindet. Für diese Rechnung braucht man die Spannungs- und Stromverteilung entlang der periodischen Struktur, um daraus Wellenwiderstände und Reflexionskoeffizienten zu finden. Im Falle von periodischen Strukturen, für welche die MATHIEU-Gleichung gilt, lassen sich die Spannungs- und Stromverteilung mit MATHIEU-Funktionen darstellen. Ihre Berechnung aus normalerweise nur langsam konvergierenden Reihen der Form (4.18) ist aber recht umständlich.

Anpassu.

Um das Wesentliche kennenzulernen, beschränken wir uns deshalb auf Strukturen mit nur kleinen periodischen Schwankungen. Für sie führen wir eine Störungsrechnung durch, die von der entsprechenden homogenen Leitung ausgeht. Auf der homogenen Leitung hätten die vor- und rücklaufenden Wellen Spannungsverteilungen $u_h \exp(-j\beta_0 z)$ bzw. $u_r \exp(j\beta_0 z)$. Für die periodische Struktur setzen wir deshalb

$$u_h = u_h(z) e^{-i\beta_0 z} \quad \text{und} \quad u_r = u_r(z) e^{i\beta_0 z} \quad (4.31)$$

Ansatz

an, wobei wir wegen der schwachen Störung gegenüber der homogenen Leitung damit rechnen können, daß sich $u_h(z)$ und $u_r(z)$ nur langsam mit z ändern. Wir können darum $\frac{d^2 u_h(z)}{dz^2}$ und $\frac{d^2 u_r(z)}{dz^2}$ vernachlässigen und erhalten, wenn wir den Ansatz (4.31) in Gl. (4.26) einführen und beispielsweise nach $\frac{du_h(z)}{dz}$ auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{du_h(z)}{dz} = & -j \frac{c}{2\beta_0} [u_r(z) (e^{i2\beta_0 z} - \beta_1) + e^{i2\beta_0 z} \beta_1] + \\ & + u_h(z) (e^{i2\beta_0 z} + e^{-i2\beta_0 z}) + \frac{du_r(z)}{dz} e^{i2\beta_0 z} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sind alle mit Exponentialfunktionen vom Betrage eins behaftet, durch die sie mit z mehr oder weniger schnell in der Phase drehen.

Wenn $\beta_0 = \beta_1$ ist, dreht nur das erste Glied rechts langsam, während alle anderen Glieder sehr schnell mit z drehen. Wenn wir unter diesen Bedingungen Gl. (4.32) längs z integrieren, um $u_h(z)$ zu gewinnen, leistet zu diesem Integral nur das erste Glied rechts einen wesentlichen Beitrag. Alle anderen Glieder drehen mit z so schnell in der Phase, während ihre Beträge sich dabei mit z nur so langsam ändern, daß sie

Näherung

sich nie zu merkbaren Beiträgen zu $\underline{u}_h(z)$ aufintegrieren können. Es ist dann also einfach

$$\frac{d\underline{u}_h(z)}{dz} = -j\kappa \underline{u}_r(z) e^{i2\delta z} \quad (4.33)$$

ebenso wie

$$\frac{d\underline{u}_r(z)}{dz} = j\kappa \underline{u}_h(z) e^{-i2\delta z} \quad (4.34)$$

ist, mit

$$\kappa = \frac{c}{2\beta_0} \quad \text{und} \quad \delta = \beta_0 - \beta_1. \quad (4.35)$$

Das System von Differentialgleichungen (4.33) und (4.34) verkoppelt die vorlaufende Welle der entsprechenden homogenen Struktur mit der rücklaufenden. Ursache für diese Verkopplung ist die periodische Störung, an der die Wellen der homogenen Leitung fortlaufend etwas reflektiert werden.

Eine wesentliche Gesamtreflexion baut sich aber auf den Teilreflexionen nur auf, wenn $\beta_0 \approx \beta_1$, d.h. $\lambda_0 \approx 2p$ ist und deshalb die Teilreflexionen konstruktiv miteinander interferieren.

Die Bedingung $\lambda_0 = 2p$ entspricht der BRAGG-Reflexion *erster Ordnung* in Gl. (4.30); wir beobachten hier den ersten Speerbereich des Bildes 4.8 bei $b = 1$. Die BRAGG-Reflexionen *höherer Ordnung* würden sich aus dem Ansatz (4.31) ergeben, wenn wir nicht $\beta_0 \approx \beta_1$, sondern $\beta_0 \approx m\beta_1$ annehmen und bei der Integration der Wellengleichung nur die Reflexionsterme berücksichtigen, die mit z langsam in der Phase drehen, so daß sie durch konstruktive Interferenz wesentlich zur Gesamtreflexion beitragen.

Mögliche Realisierung

Die verteilten Reflexionskoeffizienten $j\kappa$ in den gekoppelten Differentialgleichungen (4.33) und (4.34) für die Spannungen der vor- und rücklaufenden Wellen sind bei normalerweise reellem κ rein imaginär. Das entspricht ganz den Verhältnissen auf einer Leitung, die durch Blindwiderstände in gleichen Abständen quer zur Leitung oder in Reihe mit den Leitern periodisch gestört ist.

Die Leistung, welche jede dieser Wellen führt, ist $\frac{|\underline{u}_r(z)|^2}{Z}$ bzw. $\frac{|\underline{u}_h(z)|^2}{Z}$ mit Z als Wellenwiderstand der entsprechenden homogenen Leitung. Aus den Gln. (4.33) und (4.34) folgt, daß

$$\frac{d}{dz} [|\underline{u}_h(z)|^2 - |\underline{u}_r(z)|^2] = 0$$

ist, die Leistung, welche die Wellen in einer Richtung führen, also konstant ist.

Damit finden wir den *Energieerhaltungssatz* für die voraussetzungsgemäß verlustlose Struktur bestätigt.

Zur Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen (4.33) und (4.34) gehen wir zunächst gemäß Lösung:

$$\underline{u}_h(z) = \underline{h}(z) e^{\delta z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{u}_r(z) = \underline{r}(z) e^{-i\delta z} \quad (4.36) \quad \text{Variabl}$$

auf neue Variablen $\underline{h}(z)$ und $\underline{r}(z)$ über, für die sich aus den Gln. (4.33) und (4.34) die Differentialgleichungen

$$\frac{d\underline{h}}{dz} + j\delta \underline{h} = -j\kappa \underline{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\underline{r}}{dz} - j\delta \underline{r} = j\kappa \underline{h} \quad (4.37)$$

ergeben. Dieses System hat im Gegensatz zu Gl. (4.33) und (4.34) *konstante Koeffizienten* und kann darum mit dem *Exponentialansatz*

$$\underline{h} = \underline{h}_1 e^{-\eta z}, \quad \underline{r} = \underline{r}_1 e^{-\eta z} \quad (4.38)$$

geißt werden. Es folgen mit diesem Ansatz aus Gl. (4.37) zunächst zwei *lineare homogene Gleichungen* für \underline{h}_1 und \underline{r}_1 , die nichttriviale Lösungen nur unter der Bedingung

$$\eta^2 = \kappa^2 - \delta^2 \quad (4.39)$$

haben, und zwar lauten sie

$$\underline{r}_{1,2} = -\frac{\delta \pm j\eta}{\kappa} \underline{h}_{1,2}. \quad (4.40)$$

Damit folgt für die allgemeine Lösung von Gl. (4.37)

$$\underline{h} = \underline{h}_1 e^{-\eta z} + \underline{h}_2 e^{\eta z} \quad (4.41)$$

$$\underline{r} = -\frac{\delta + j\eta}{\kappa} \underline{h}_1 e^{-\eta z} - \frac{\delta - j\eta}{\kappa} \underline{h}_2 e^{\eta z},$$

und die Spannungen haben, so wie sie als vor- und rücklaufende Wellen der entsprechenden *homogenen* Leitung definiert sind, die Form

$$\underline{u}_h = (\underline{h}_1 e^{-\eta z} + \underline{h}_2 e^{\eta z}) e^{-i\delta z} \quad (4.42)$$

$$\underline{u}_r = \left(-\frac{\delta + j\eta}{\kappa} \underline{h}_1 e^{-\eta z} - \frac{\delta - j\eta}{\kappa} \underline{h}_2 e^{\eta z} \right) e^{-i\delta z}.$$

Sie überlagern sich zur Gesamtspannung

$$U = U_1 + U_r \quad (4.43)$$

Andererseits besteht diese Gesamtspannung aber auch aus den vor- und rücklaufenden Eigenwellen der *periodischen* Struktur. In Gl. (4.42) erscheint die vorlaufende Eigenwelle mit dem Faktor h_1 und hat die Spannungsverteilung

Anders zusammengefaßt

$$U_1 = h_1 \left[e^{-(\gamma + j\beta_1)z} - \frac{\delta + j\eta}{\kappa} e^{-(\gamma - j\beta_1)z} \right] \quad (4.44)$$

während die rücklaufende Eigenwelle mit dem Faktor h_2 erscheint und die Spannungsverteilung

$$U_2 = h_2 \left[-\frac{\delta - j\eta}{\kappa} e^{(\gamma + j\beta_1)z} + e^{(\gamma - j\beta_1)z} \right] \quad (4.45)$$

hat. Die ersten Terme in diesen Eigenwellenspannungen stellen die *Grundwelle* der räumlichen Fourierentwicklung dar, während die zweiten Terme die ersten und einzigen *Raumharmonischen* sind, welche diese Näherungsrechnung berücksichtigt. Die Grundwellen haben die *Ausbreitungskonstante* $\gamma = \eta + j\beta_1$, während die ersten Raumharmonischen $\gamma - j2\beta_1$ als Ausbreitungskonstante haben.

Im *Durchlaßbereich* sind die Ausbreitungskonstanten der Eigenwellen rein imaginär. Dazu muß nach Gl. (4.39) $\delta^2 > \kappa^2$ sein.

Im *Sperrbereich* für $-\kappa > \delta > \kappa$ ist dagegen η reell, und die Ausbreitungskonstanten sind komplex. Ihr Realteil $\eta = \alpha$ stellt die Dämpfung im Sperrbereich dar, während der Imaginärteil in $\beta_1 p = \pi$ die Phasendrehung pro Periode der Struktur angibt.

Randbedingungen

Die Faktoren h_1 und h_2 bei den Eigenwellen bzw. in den Spannungsverteilungen (4.42) für die vor- und rücklaufenden Wellen der entsprechenden homogenen Leitung bestimmen sich aus den Anregungsbedingungen am Anfang der periodischen Struktur und bei einer Struktur endlicher Länge auch aus den Abschlußbedingungen an ihrem Ende.

Beispiel

Als Beispiel untersuchen wir eine homogene Leitung, die sich nach beiden Seiten unbegrenzt ausdehnt, und die zwischen $z = 0$ und $z = l$ periodisch so gestört ist, daß in diesem Abschnitt Gl. (4.26) gilt. Von $z < 0$ soll eine Welle der Spannung $U_0 \exp(-j\beta_0 z)$ auf den gestörten Abschnitt treffen.

Da unter diesen Umständen für $z > l$ nur eine Welle in positiver z -Richtung läuft, gelten die Randbedingungen

$$U_n|_{z=0} = U_0, \quad U_r|_{z=l} = 0.$$

Durch sie wird die vorlaufende Eigenwelle des *periodisch gestörten* Abschnittes mit dem Faktor

$$h_1 = \frac{\delta - j\eta}{2(\delta \sinh \eta l - j\eta \cosh \eta l)} e^{\eta l} U_0$$

angeregt, und die rücklaufende Eigenwelle mit dem Faktor

$$h_2 = \frac{-\delta - j\eta}{2(\delta \sinh \eta l - j\eta \cosh \eta l)} e^{-\eta l} U_0.$$

Vor- und rücklaufende Welle der *homogenen Leitung* haben mit diesen Eigenwellen im gestörten Abschnitt die Spannungen:

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{\delta \sinh[\eta(l-z)] - j\eta \cosh[\eta(l-z)]}{\delta \sinh \eta l - j\eta \cosh \eta l} e^{-j\beta_1 z} U_0 \\ U_r &= \frac{-\kappa \sinh[\eta(l-z)]}{\delta \sinh \eta l - j\eta \cosh \eta l} e^{j\beta_1 z} U_0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

In der Mitte des Sperrbereiches, wenn die BRAGG-Bedingung $\beta_0 = \beta_1$ erfüllt wird, ist $\delta = 0$ und $\eta = \kappa$.

Dann lauten die Spannungen einfach:

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{\cosh[\kappa(l-z)]}{\cosh \kappa l} e^{-j\beta_1 z} U_0 \\ U_r &= -j \frac{\sinh[\kappa(l-z)]}{\cosh \kappa l} e^{j\beta_1 z} U_0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Auf der homogenen Leitung vor dem gestörten Abschnitt läuft eine Welle zurück, die durch die Reflexionen an den periodischen Störungen entsteht.

Ihre Spannung steht am Eingang zum gestörten Abschnitt bei $z = 0$ zur Spannung der einfallenden Welle im folgenden Verhältnis:

$$r = \frac{U_r(0)}{U_h(0)} = \frac{-\kappa \sinh \eta l}{\delta \sinh \eta l - j\eta \cosh \eta l} \quad (4.48) \quad \text{Reflexio:}$$

Dieser Reflexionsfaktor ist in Abhängigkeit von δ am größten, wenn $\delta = 0$ ist, also in der Mitte des Sperrbereiches, wo die BRAGG-Bedingung $\beta_0 = \beta_1$ gilt. Dort lautet er:

$$r = -j \tanh \alpha l \quad (4.49)$$

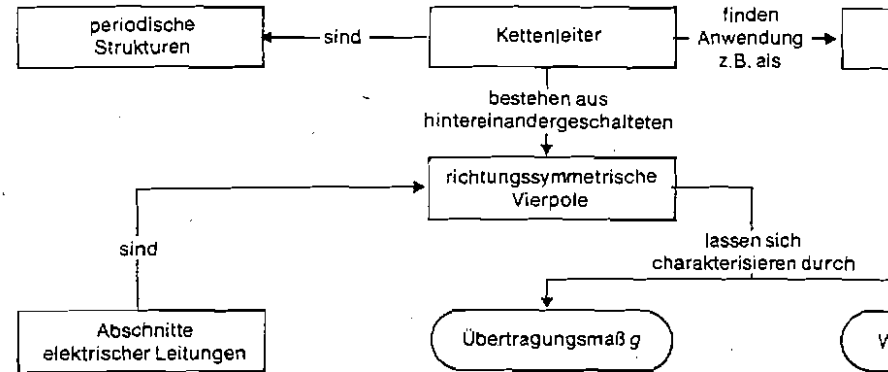
Aber selbst im Durchlaßbereich, wo $|\delta| > \alpha$ ist und die Eigenwellen des periodisch gestörten Abschnittes nicht mehr gedämpft werden, wird die einfallende Welle im gestörten Abschnitt noch teilweise reflektiert. Für $|\delta| \gg \alpha$, d.h. im großen Abstand vom Sperrbereich, hat der Reflexionsfaktor aber nur noch den Betrag

$$|r| = \left| \frac{\alpha}{\delta} \sin \delta l \right|.$$

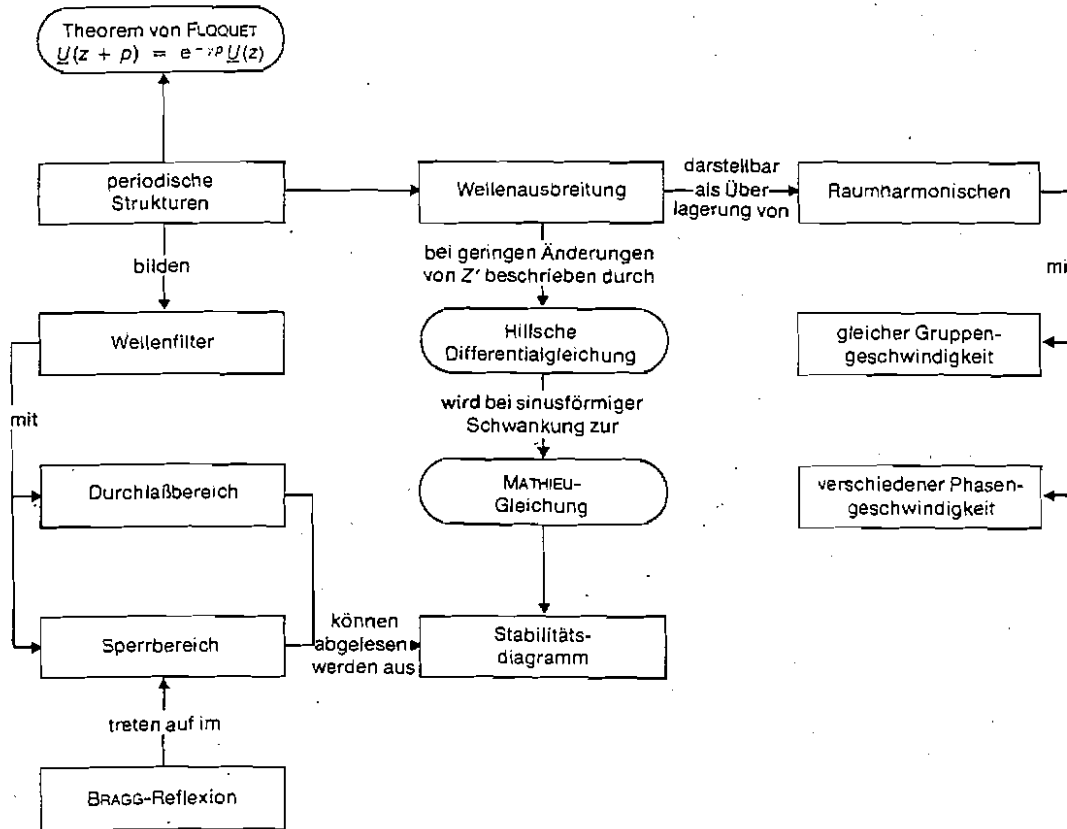
Anwendung Periodische Störungen im Zuge einer homogenen Leitung dienen aufgrund der BRAGG-Reflexionen als **Bandsperr**e in Filterschaltungen. Die Periodenlänge der Störung ebenso wie ihre Stärke wird dabei so bemessen, daß das zu sperrende Frequenzband gerade dem Sperrbereich $-\alpha < \delta < \alpha$ der Störung entspricht. Mit der Länge des gestörten Abschnittes kann man die gewünschte Sperrdämpfung in Bandmitte an Hand des Reflexionsfaktors in Gl. (4.49) einstellen.

Neben dieser einen praktischen Anwendung von periodisch veränderlichen Leitungen gibt es aber noch viele andere Beispiele in Natur und Technik von Wellenausbreitung in periodischen Strukturen.

Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte

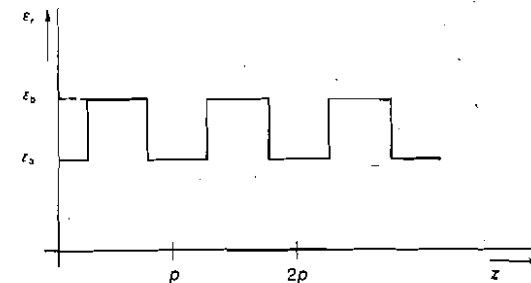


Übersichtliche Darstellung der Studieninhalte



Übungsaufgaben zum Lernzyklus 4:2

- 1 Wie lautet das Theorem von FLOQUET? Für welche Art von Strukturen gilt es?
- 2 Muß eine Raumharmonische für sich die Randbedingungen für Strom und Spannung auf einer Leitung erfüllen?
- 3 Ist die Phasengeschwindigkeit der Raumharmonischen positiv oder negativ?
- 4 Wie löst man ein homogenes Gleichungssystem? Wie heißen die dabei auftretenden Gleichungen und Lösungswerte?
- 5 Unter welchen Einschränkungen läßt sich die Wellenausbreitung auf einer periodisch gestörten Leitung durch die MATHIEU-Gleichung beschreiben?
- 6 Bei welchen Wellenlängen liegen die Sperrbereiche von periodischen Strukturen? Wie hängt die Bandbreite eines Sperrbereichs qualitativ von der Stärke der Schwankungen ab?
- 7 **Bandsperr**. Eine Leiteranordnung für eine TEM-Welle soll durch ein in Ausbreitungsrichtung z periodisch geschichtetes Dielektrikum mit $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r(z)$ zu einer Bandsperr gemacht werden. Gesucht sind für den ersten Sperrbereich die Mittenfrequenz f_0 , die Halbwertsbreite Δf und der Betrag des Reflexionsfaktors bei $f = f_0$ in Abhängigkeit von der Dielektrizitätszahl, der Periodenlänge p und der Länge l des periodisch gestörten Bereichs.



- a) Es gelte für die Phasenkonstante $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon}$. Bestimmen Sie dafür aus dem skizzierten $\epsilon_r(z)$ -Verlauf mit einer Fourier-Analyse für die Funktion $\beta^2(z)$ den arithmetischen Mittelwert β_0^2 und den Koeffizienten der Grundschwingung $2z$! Nehmen Sie im folgenden an, daß die Rechnung mit dieser abgebrochenen Fourierreihe genau genug ist!
- b) Wie groß sind die Mittenfrequenz f_0 und der Betrag des Reflexionsfaktors in Bandmitte?
- c) Bestimmen Sie näherungsweise die Differenz Δf der Frequenzen, bei denen der Betrag des Reflexionsfaktors auf das $1/\sqrt{2}$ -fache seines Wertes bei f_0 abgefallen ist!

Hinweis Sollte Ihnen diese Aufgabe zu schwierig erscheinen, ist das kein Grund zur Beunruhigung. Verfolgen Sie dann den Rechengang und die Ergebnisse anhand der Lösungen.

Aufgaben zur Vertiefung 4

1 Realisierung einer Leitungsentzerrung

Die Leitung in Aufgabe 2 (vgl. S. 100) soll durch Reihenschaltung von Induktivitäten L_s in 1 km Abstand verzerrungsfrei gemacht werden. *Zur pr.*

- a) Bestimmen Sie die Werte, die für die Induktivitäten L_s gewählt werden müssen!
- b) Welche Grenzfrequenz ergibt sich bei einer derartigen Dimensionierung?

Jeweils 1-km-Abschnitte der Leitung können zusammen mit der konzentrierten Induktivität als Π - oder T-Glied eines Kettenleiters betrachtet werden. *Hinwei*

2 Leitungsnachbildung

Ein verlustloses Kabel ($Z = 60 \Omega$, $v = 200\,000 \text{ km/s}$, $l = 100 \text{ m}$) soll durch eine Kettenschaltung aus Π -Gliedern nachgebildet werden. Die Nachbildung ist so zu dimensionieren, daß bei niedrigen Frequenzen die elektrischen Eigenschaften von Kabel und Nachbildung übereinstimmen. Bei $f = 10 \text{ MHz}$ dürfen die Abweichungen des Wellenwiderstands maximal 10% betragen. *Zur pra*

- a) Welche Werte sind für L und C zu wählen?
- b) Wieviele Kettenglieder sind zum Aufbau der Nachbildung erforderlich?
- c) Bestimmen Sie die Abweichungen im Winkelmaß bei $f = 10 \text{ MHz}$!
- d) Die Kettenschaltung zeigt das Verhalten eines Tiefpasses. Bestimmen Sie die Grenzfrequenz dieses Tiefpasses!
- e) Bestimmen Sie die Wellendämpfung eines Gliedes sowie der gesamten Kette bei dem 1,2fachen der Grenzfrequenz!