

Planare Projektionen und Betrachtungstransformation



Dimetric



Trimetric



Isometric



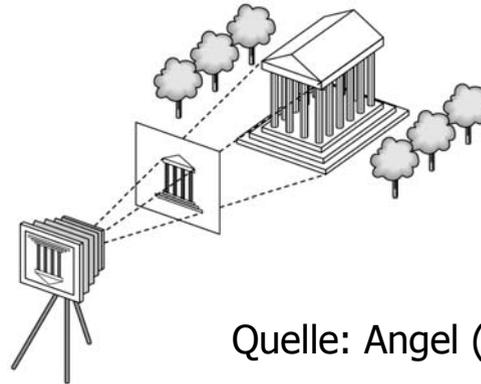
(a)



(b)



(c)



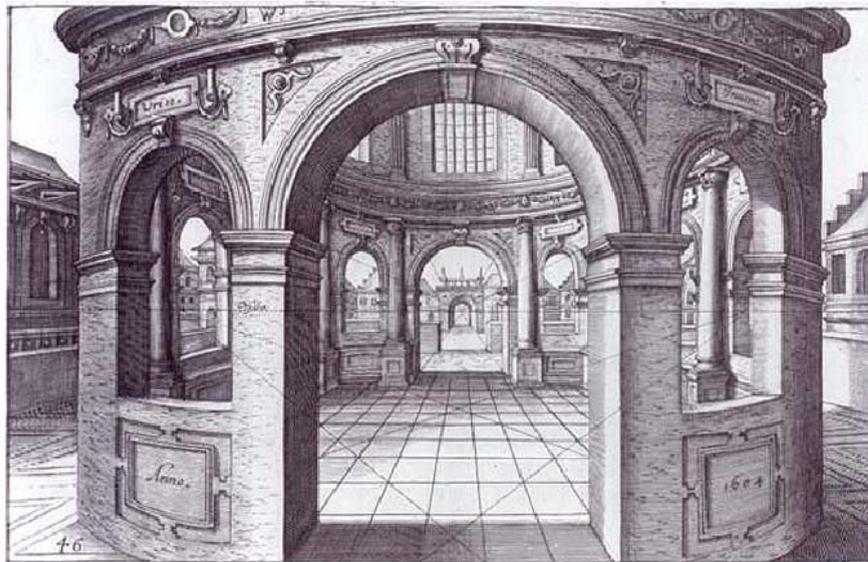
Quelle: Angel (2000)

Gliederung

- Einführung
- Parallelprojektionen
- Perspektivische Projektionen
- Kameramodell und Betrachtungstransformationen
- Mathematische Beschreibung von Projektionen

Einführung

A painting [the projection plane] is the intersection of a visual pyramid [view volume] at a given distance, with a fixed center [center of projection] and a defined position of light, represented by art with lines and colors on a given surface [the rendering]. (Alberti, 1435)

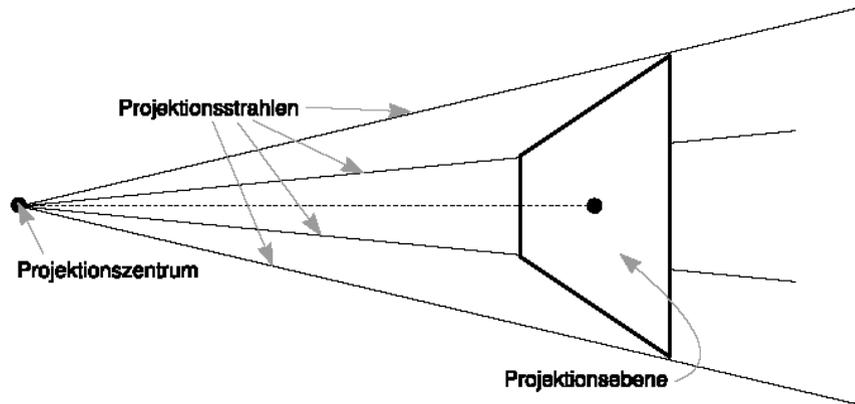


Hans Vredemann de Vries: Perspektiv 1604

Einführung

Planare Projektionen:

- Projektionsstrahlen sind Geraden
- Gerade Linien werden auf gerade Linien abgebildet (es entstehen keine Krümmungen).
- Projektionsfläche ist eine Ebene.

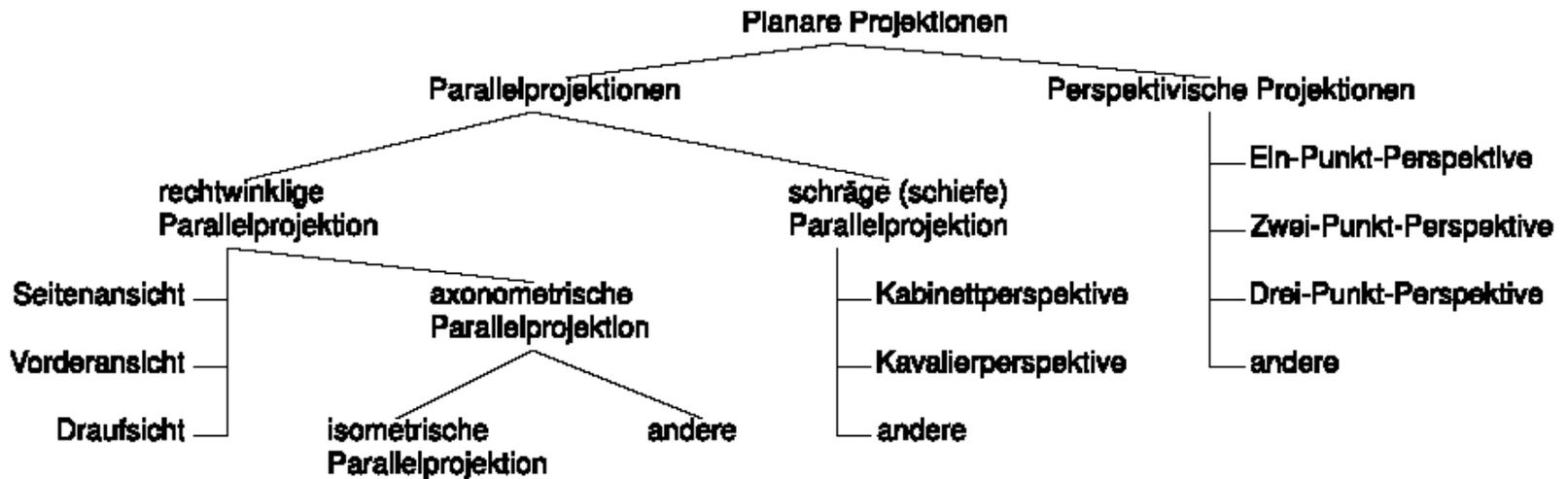


Einführung

Wichtige Begriffe und Abkürzungen:

- Parallelprojektion ist charakterisiert durch die **Richtung der Projektion** (direction of projection, *dop*)
- Perspektivische Projektion ist charakterisiert durch das **Projektionszentrum** (center of projection, *cop*)
- Ebene auf die das Bild projiziert wird: **Sichtebene** (view plane).
- Vektor, der senkrecht zur Projektionsebene steht: **Normale der Sichtebene** (view plane normal, *vpn*).
- Strahlen, die die Projektion charakterisieren: Projektoren. Bei perspektivischer Projektion gehen sie vom *cop* aus und divergieren; bei der Parallelprojektion sind sie parallel.

Klassifikation planarer Projektionen



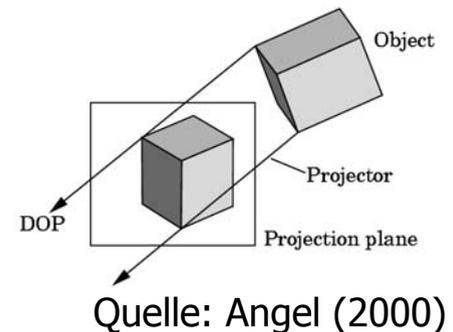
Rechtwinklige Parallelprojektion: vpn und dop stimmen überein.

Schräge Parallelprojektion: vpn und dop sind ungleich.

Parallelprojektionen

Parallelprojektion

- Projektionszentrum liegt im Unendlichen
→ Projektionsstrahlen verlaufen parallel
- Keine perspektivische Verkürzung
- Parallele Linien bleiben parallel.
- Unterschiede: Winkel zwischen vpn und dop sowie Winkel zwischen dop und den Koordinatenachsen



Konsequenzen für die Computergraphik: Mehrere Bestandteile des Renderingprozesses lassen sich bei Parallelprojektion beschleunigen (z.B. Strahlverfolgung beim Raytracing).

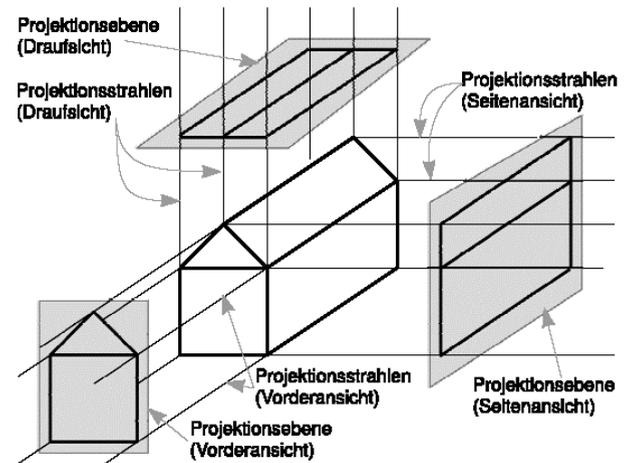
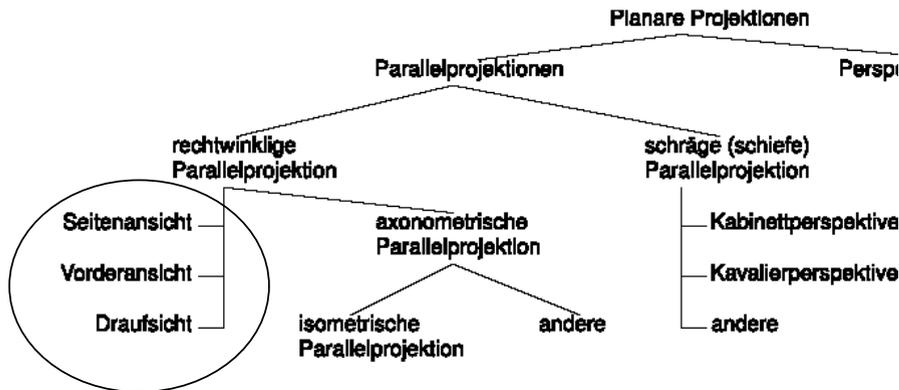
Parallelprojektionen

Typische Anwendungen:

- Darstellung von architektonischen Modellen (Gebäuden), die im wesentlichen durch rechtwinklige Bestandteile charakterisiert sind
- Darstellung medizinischer Daten

Parallelprojektionen

Seitenansicht, Vorderansicht, Draufsicht (Tafelprojektionen):
Rechtwinklige Parallelprojektion, bei der Sichtebene parallel zu einer Koordinatenachse ist.

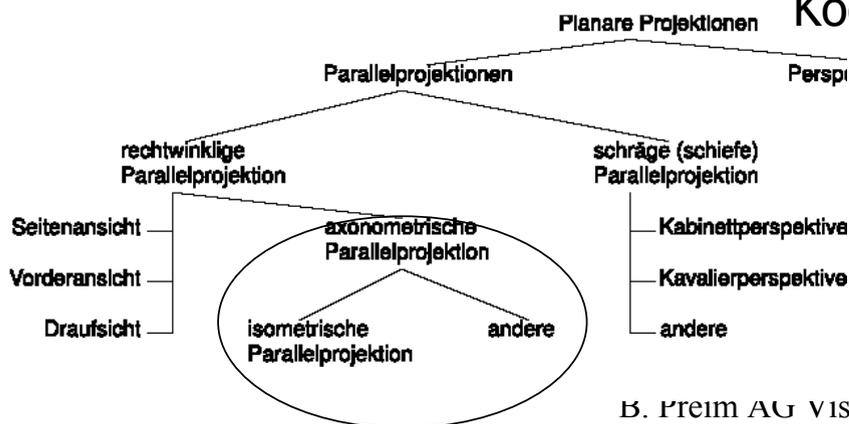


Quelle: Angel (2000)

Parallelprojektionen

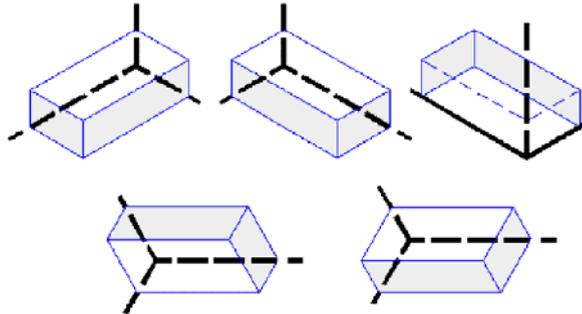
Axonometrische und isometrische Projektionen:

- Rechtwinklige Parallelprojektion, bei die Normale der Projektionsebene (vpn) nicht parallel zu einer der Koordinatenachsen ist.
- Parallele Linien bleiben parallel; Winkel bleiben nicht erhalten.
- **Isometrische Projektion:** Spezialfall, bei dem der Winkel zwischen vpn und allen drei Koordinatenachsen gleich ist.
- **Dimetrische Projektion:** Winkel zwischen vpn und zwei Koordinatenachsen gleich.

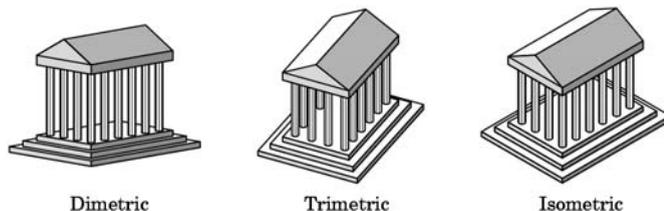


Parallelprojektionen

Beispiele für isometrische Projektionen:



Isometrische und andere axonometrische Transformationen



Quelle: Angel (2000)

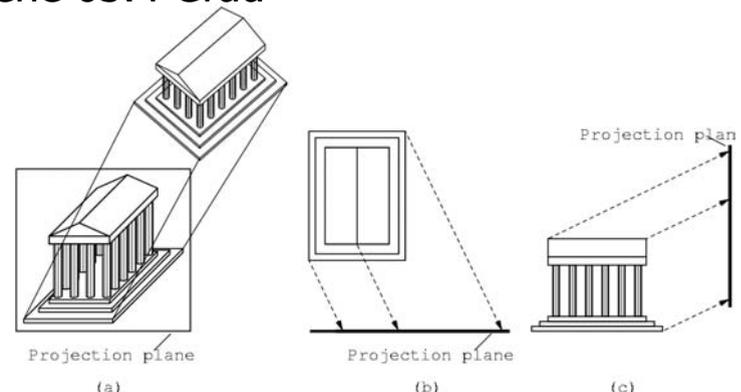
Trimetrisch: Winkel zwischen $v_p n$ und allen 3 Koordinatenachsen unterschiedlich.

Parallelprojektionen

Schräge bzw. schiefe Parallelprojektionen:

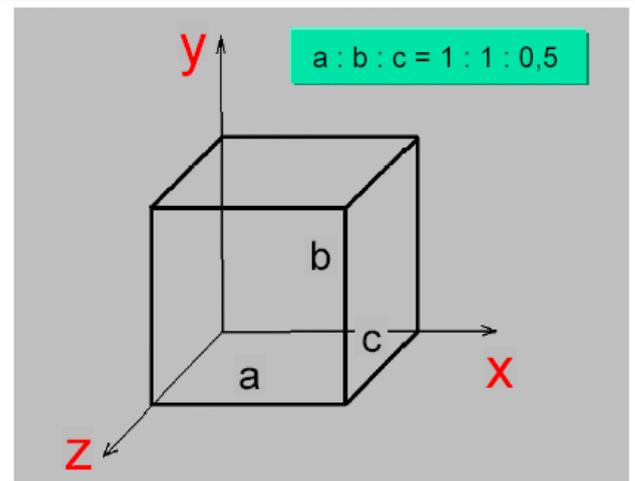
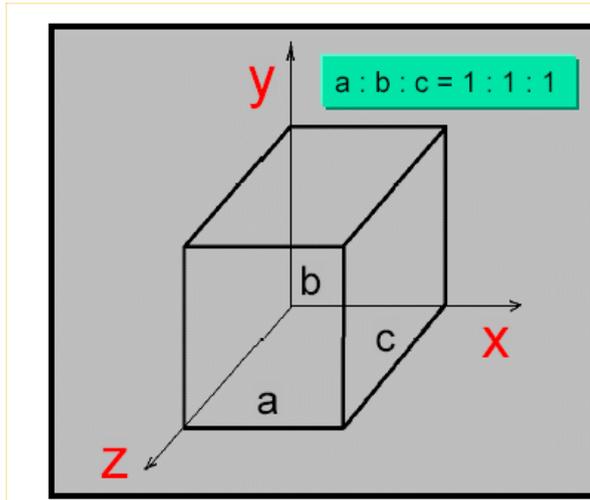
- Normale der Sichtebene \neq Projektionsrichtung
- Besserer räumlicher Eindruck als bei rechtwinkligen Projektionen
- Sichtebene parallel zu einer Koordinatenebene
- Typische Varianten:
 - Kavalierperspektive:
Winkel zwischen DOP und Sichtebene 45 Grad
 - Kabinettperspektive:
Winkel zwischen DOP und Sichtebene 63.4 Grad
(= $\arctan(2)$), Verkürzung um 1/2

Konstruktion einer schiefen Projektion sowie Vorder- und Seitenansicht



Parallelprojektionen

Kavalierperspektive und Kabinettperspektive:



Beide sind keine perspektivischen Projektionen!

Quelle: M . Haller, FH
Hagenberg, (2002)

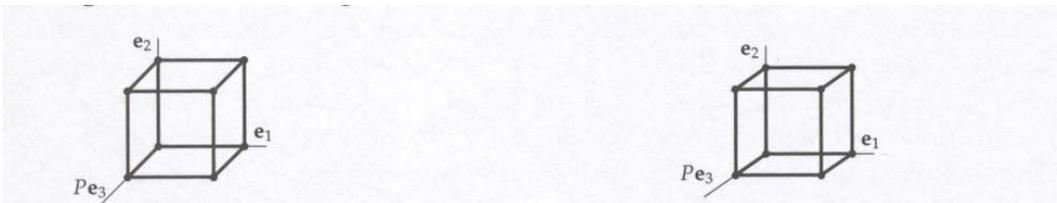
Parallelprojektionen

Kavalierperspektive mit $\alpha = 30$ Grad und $\alpha = 45$ Grad



Quelle: Bender/Brill (2003)

Kabinettperspektive mit $\alpha = 30$ Grad und $\alpha = 45$ Grad



Quelle: Bender/Brill (2003)

Parallelprojektionen

Vergleich der Projektionsarten:

1. Rechtwinklige (orthographische) Projektion

1.1 Tafelprojektionen

- VPN parallel zu einer Koordinatenachse, $DOP \parallel VPN$
- Bei einem Würfel: Zeigt eine Fläche, genaue Maße, kein 3D-Eindruck

1.2 Axonometrische Parallelprojektion

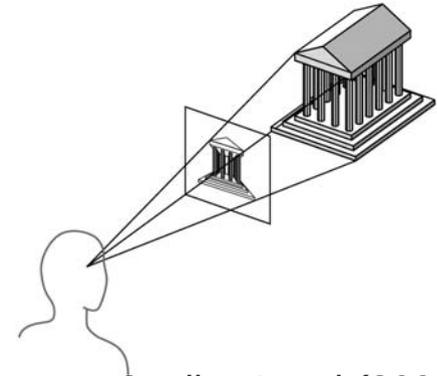
- VPN nicht parallel zu einer Koordinatenachse, $DOP \parallel VPN$
- Bei einem Würfel: Zeigt angrenzende Flächen, keine uniforme Verkürzung

2. Schräge Parallelprojektion

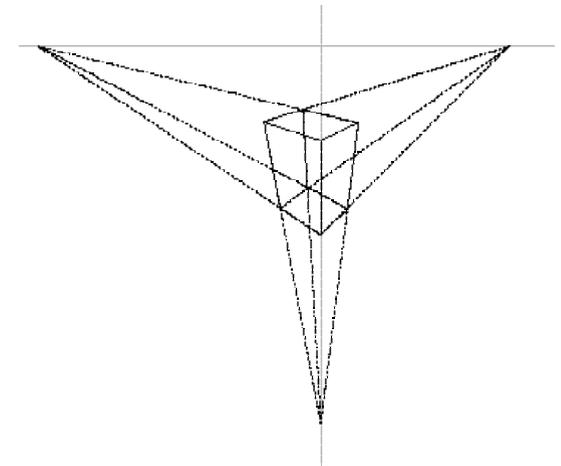
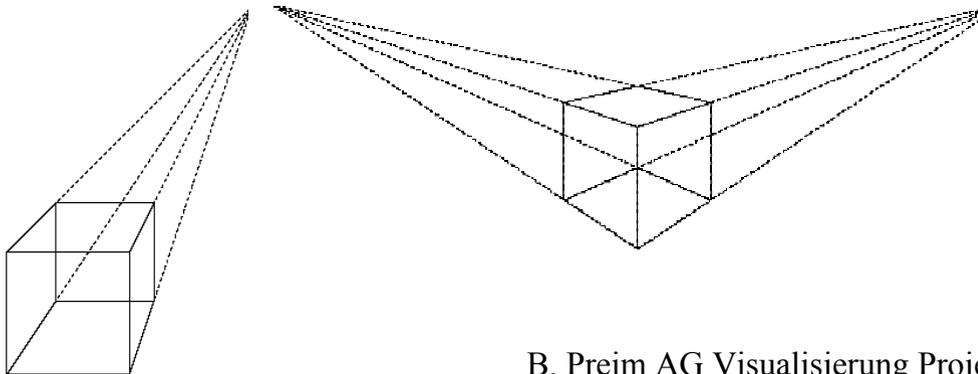
- VPN parallel zu einer Koordinatenachse, $DOP \neq VPN$
- Bei einem Würfel: Zeigt angrenzende Flächen, eine exakt, andere uniform verkürzt

Perspektivische Projektion

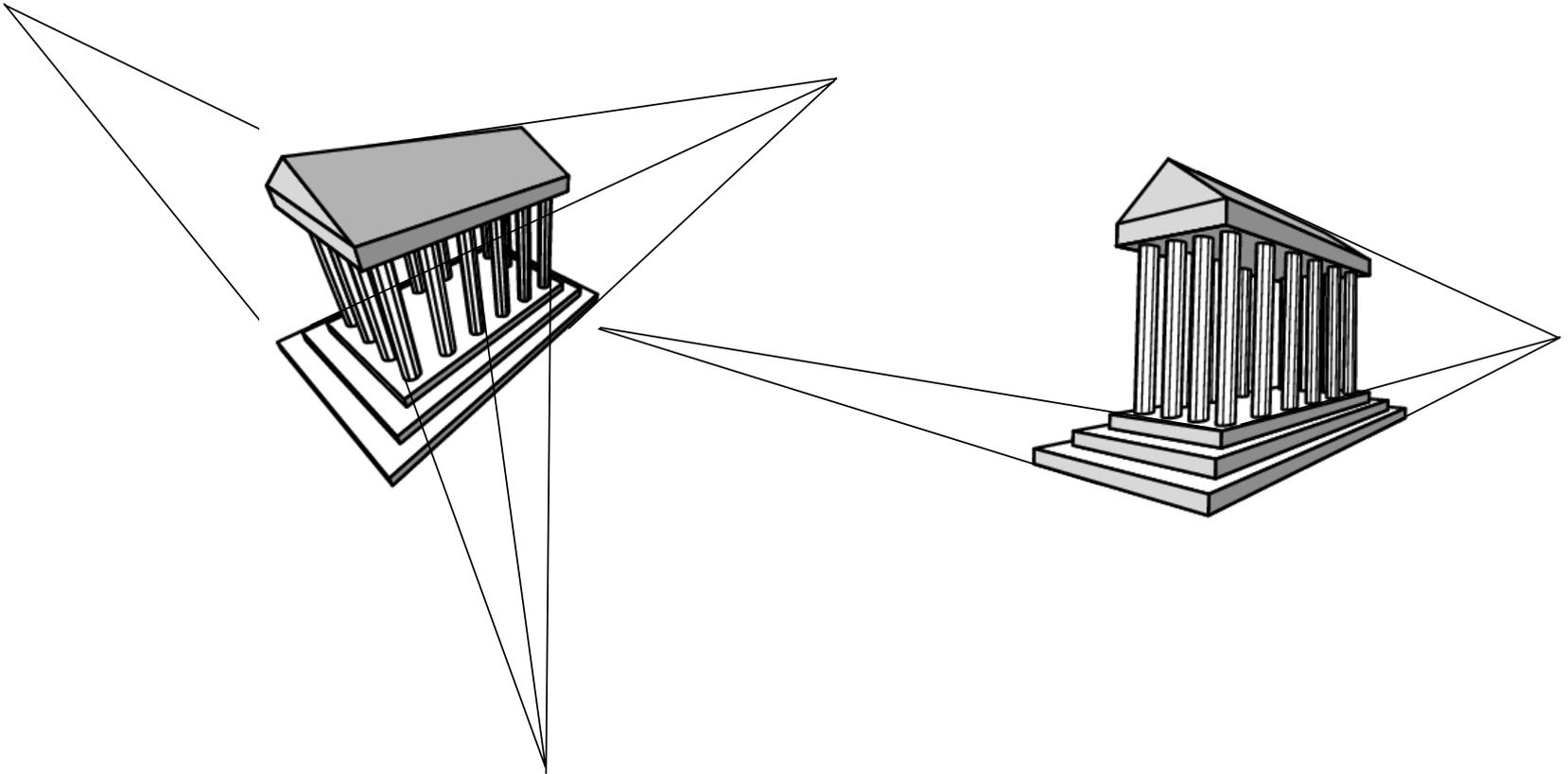
- Betrachter im COP
- Näher an der visuellen Wahrnehmung als Parallelprojektion
- Unterteilung nach der Anzahl der Fluchtpunkte (Schnittpunkte paralleler Geraden in x-, y- und z-Richtung).
 - 1, 2, 3



Quelle: Angel (2000)

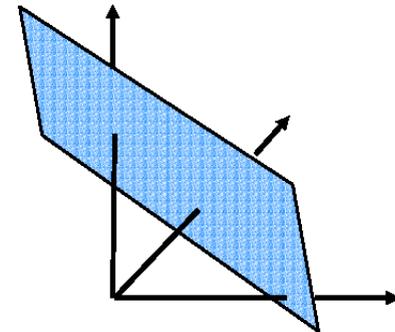
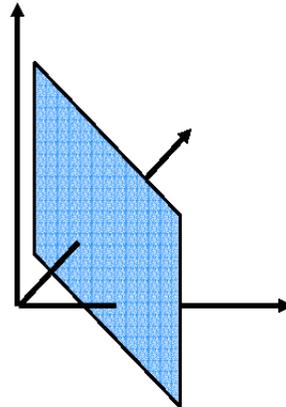
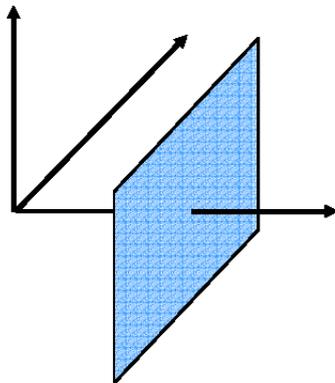
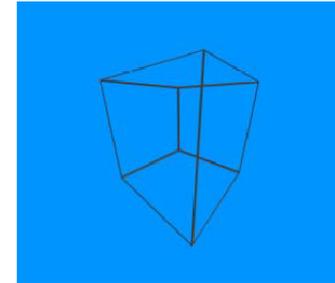
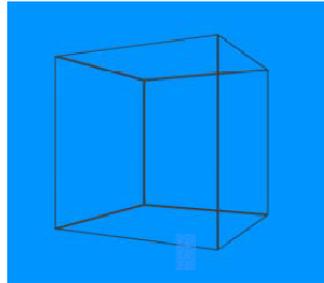
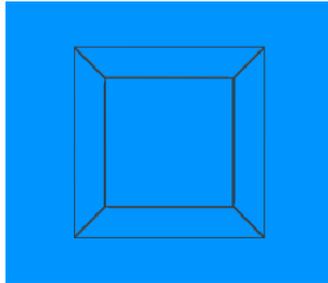


Perspektivische Projektion



Perspektivische Projektion

Sichtebene in Relation zu den Koordinatenachsen



Quelle: M . Haller, FH
Hagenberg, (2002)

Perspektivische Projektion

Eigenschaften:

- Bei allen Arten perspektivische Verkürzung
- Parallelität von Linien und Winkel werden im allgemeinen nicht erhalten.
- Unterschiedliche Anzahl der Fluchtpunkte resultiert aus dem Winkel zwischen Sichtebene und den Ebenen aus je zwei Koordinatenachsen.
- 3 Fluchtpunkte, wenn die Projektionsebene alle Ebenen (xy , xz und yz) schneidet. 1 Fluchtpunkt, wenn Sichtebene parallel zu einer der drei Ebenen.

Kameramodell

- Reale Kamera als Orientierung und Metapher für den Viewingprozess.
- Parameter realer Kameras:
 - Position
 - Blickrichtung
 - Brennweite
 - Tiefenschärfe
 - Art des Objektivs (Weitwinkel, Tele) bestimmt den Öffnungswinkel → Projektionen sind teilweise nicht planar.
- Parameter der entstehenden Bilder:
 - Größe (Breite, Höhe, bzw. Breite und Seitenverhältnis)
 - Typische Werte für Seitenverhältnis: 4:3 (Fernsehen), 16:9
 - Auflösung

Kameramodell

Zusammenhang zwischen Öffnungswinkel und Brennweite:

Öffnungswinkel	Brennweite
76 Grad	24 mm
67,6 Grad	28 mm
56,4 Grad	35 mm
41,4 Grad	50 mm
24,9 Grad	85 mm
15,8 Grad	135 mm
10,7 Grad	200 mm

Kameramodell

In der Computergraphik wird ein vereinfachtes Kameramodell genutzt:

- Position – Punkt (Koordinaten in 3D)
- Blickrichtung – Vektor (Koordinaten in 3D)

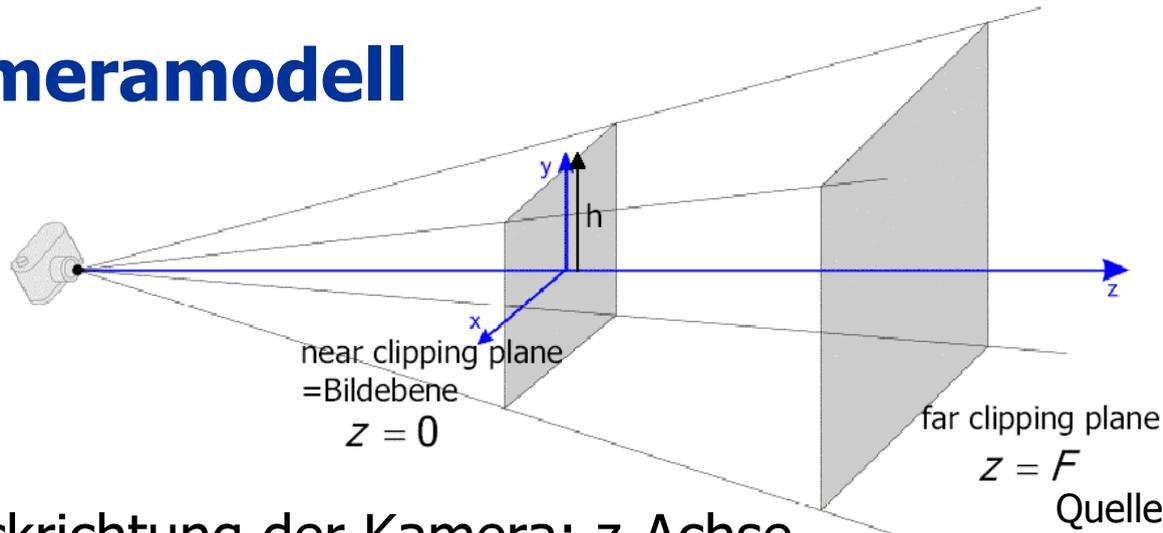
Bildspezifikation:

- Größe des Viewports in der Sichtebene (Pixel)

Zusätzlich:

- Schnittebenen, die die dargestellte Szene auf solche Objekte begrenzen, die hinter einer ersten Ebene (near) und vor einer zweiten (far) liegen.
 - Spezifikation als Abstände von der Kamera in Blickrichtung.
 - Objekte, die eine Ebene schneiden, müssen geclippt werden.

Kameramodell



Blickrichtung der Kamera: z-Achse

Sichtebene: xy-Ebene

Warum die Schnittebenen?

- Near-Ebene verhindert, dass Objekte die sehr nahe an der Kamera sind, alles verdecken und das Objekte hinter der Kamera berücksichtigt werden.
- Far-Plane verhindert, dass weit entfernte und damit im Bild sehr kleine Objekte Rechenaufwand beanspruchen.

Kameramodell

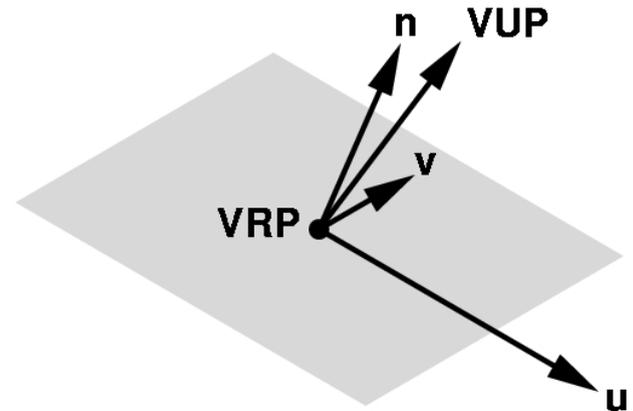
- Model-View-Transformation beschreibt die Transformation zwischen Modell und der Kamera.
- Repräsentiert durch eine Matrix in homogenen Koordinaten.
- **Standardwert:** Einheitsmatrix
- **Praktisch:** In der Regel ist zumindest eine Verschiebung der Kamera nötig, damit diese außerhalb der Szene platziert ist. Das Modell ist normalerweise um den Ursprung angeordnet.

Kameramodell

Bequeme Formen der Kameraspezifikation:

- Angabe der Kameraposition:
`view_reference_point (vrp)`
- Angabe der Orientierung:
`view_plane_normal (vpn)`
- Angabe der Richtung „nach oben“
view_up-Vektor (*vup*)
- *v* ist Projektion des *vup* in die Sichtebene
- *u* steht senkrecht zu *v* und *n*
- GKS/PHIGS:

```
set_view_reference_point (vrp);  
set_view_plane_normal (vpn);  
set_view_up (vup);
```
- Art der Perspektive wird in der Projektionsmatrix festgelegt (später).



Quelle: Angel (2000)

Kameramodell

Look-At Funktion:

Kameraposition/Augpunkt: eye;

Ziel: at

vup kann gewählt werden.

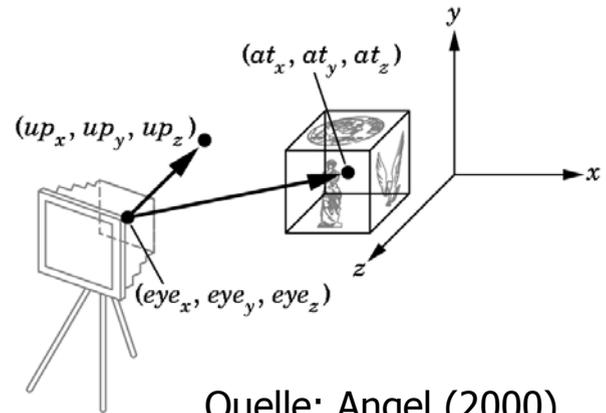
$vpn = eye - at$

$vrp = eye$

Wahl des „At“-Vectors: z.B. Schwerpunkt des Modelles oder Mittelpunkt des umschließenden Quaders (für eine zentrierte Darstellung)

OpenGL:

```
gluLookAt (eye_x, eye_y, eye_z,  
          at_x, at_y, at_z,  
          up_x, up_y, up_z);
```

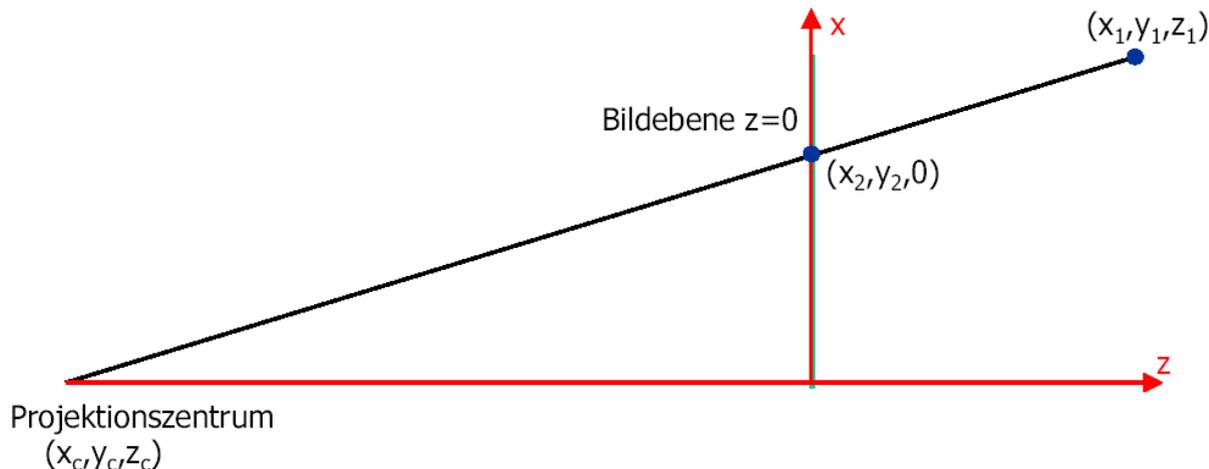


Quelle: Angel (2000)

Mathematische Beschreibung von Projektionen

Zentralprojektion:

- Annahme, die Bildebene geht durch den Ursprung
- Gegeben: COP (x_C, y_C, z_C) und ein Punkt (x_1, y_1, z_1)
- Bild soll also auf die xy -Ebene bei $z=0$ projiziert werden
→ Projizierte Koordinaten haben die Form $(x, y, 0)$



Mathematische Beschreibung von Projektionen

Zentralprojektion:

Die Projektionsgerade für Punkt $(x_1; y_1; z_1)$ kann folgendermaßen in Parameterform beschrieben werden.

$$x = x_c + (x_1 - x_c) u$$

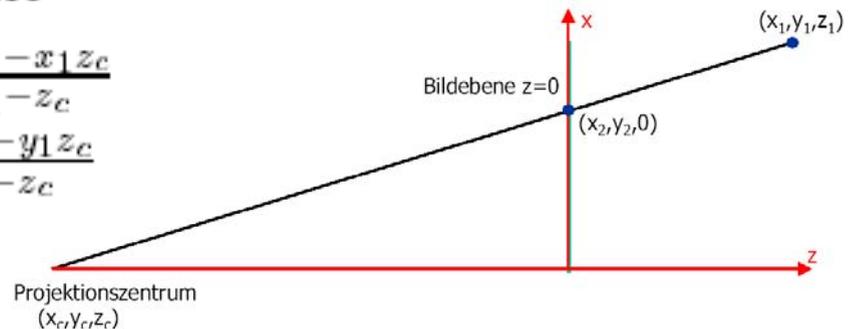
$$y = y_c + (y_1 - y_c) u$$

$$z = z_c + (z_1 - z_c) u$$

aus $z=0$ folgt $u = -\frac{z_c}{z_1 - z_c}$, also

$$x_2 = x_c - z_c \frac{x_1 - x_c}{z_1 - z_c} = \frac{x_c z_1 - x_1 z_c}{z_1 - z_c}$$

$$y_2 = y_c - z_c \frac{y_1 - y_c}{z_1 - z_c} = \frac{y_c z_1 - y_1 z_c}{z_1 - z_c}$$



Mathematische Beschreibung von Projektionen

Bisher:

aus $z=0$ folgt $u = -\frac{z_c}{z_1 - z_c}$, also

$$x_2 = x_c - z_c \frac{x_1 - x_c}{z_1 - z_c} = \frac{x_c z_1 - x_1 z_c}{z_1 - z_c}$$

$$y_2 = y_c - z_c \frac{y_1 - y_c}{z_1 - z_c} = \frac{y_c z_1 - y_1 z_c}{z_1 - z_c}$$

Beschreibung durch eine Matrix in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} -z_c & 0 & x_c & 0 \\ 0 & -z_c & y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c z_1 - x_1 z_c \\ y_c z_1 - y_1 z_c \\ 0 \\ z_1 - z_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalisieren

Mathematische Beschreibung von Projektionen

Parallelprojektion:

- Projektionsebene sei die xy-Ebene
- Projektionsrichtung parallel zur z-Achse
- Projektionsrichtung parallel zum Vektor $(x_p; y_p; z_p)^T$ $z_p = 0$
- Projektionsgerade für Punkt $(x_1; y_1; z_1)$ erfüllt

$$x = x_1 + x_p u$$

$$y = y_1 + y_p u$$

$$z = z_1 + z_p u$$

aus $z=0$ folgt $u = -\frac{z_1}{z_p}$, also:

$$x_2 = x_1 - z_1 \frac{x_p}{z_p}$$

$$y_2 = y_1 - z_1 \frac{y_p}{z_p}$$

Mathematische Beschreibung von Projektionen

Parallelprojektion:

Darstellung in homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mathematische Beschreibung von Projektionen

Schiefwinklige/schräge Parallelprojektionen:

Bild 2.26 Bender/Brill

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sin(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mathematische Beschreibung von Projektionen

Bei Kavalierprojektion: $\beta = 45$ Grad

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geraden in z-Richtung werden nicht verkürzt, wegen $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Bei Kabinettprojektion: $\beta = 63.4$ Grad

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos(\alpha)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(\alpha)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geraden in z-Richtung werden halbiert, wegen $\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) = 1/2$

Implementierung von Projektionen

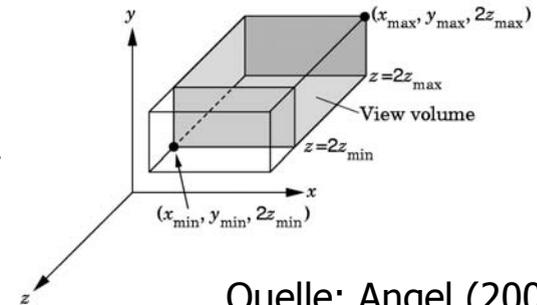
Implementierung in OpenGL:

```
glMatrixMode (GL_PROJECTION);  
glLoadIdentity ();
```

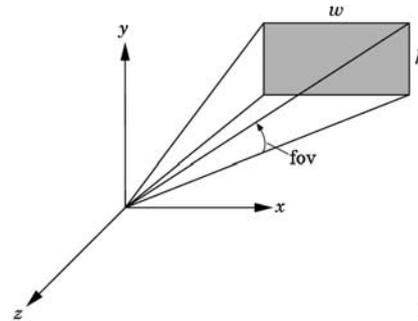
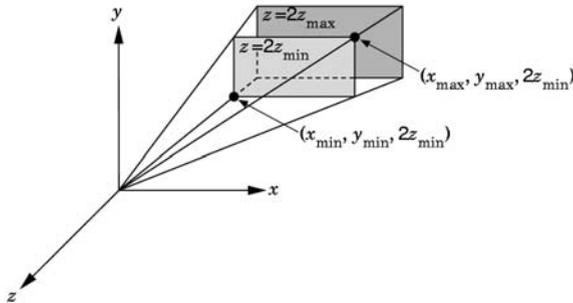
Sichtkörper für Parallelprojektion in OpenGL:

```
glOrtho (xmin, xmax, ymin, ymax, near, far);
```

Unterstützt keine schrägen Projektionen!



Implementierung von Projektionen



Quelle: Angel (2000)

Spezifikation einer perspektivischen Projektion

Explizite Definition des View Frustums (linkes Bild)

```
glFrustum (xmin, xmax, ymin, ymax, near, far);
```

Definition des Winkels *field of view* (fov) und des
Größenverhältnisses des Bildes (aspect = w/h)
(rechtes Bild)

```
glPerspective (fovy, aspect, near, far);
```

Zusammenfassung: Projektionen

- Übergang zwischen verschiedenen Koordinatensystemen (3D → 2D)
- Projektionen sind keine affinen Transformationen; sie sind nicht umkehrbar (Parallelität von Geraden wird nicht erhalten).
- Ausnutzen der Eigenschaften homogener Koordinaten bei der Berechnung
- Mathematische Beschreibung war auf die einfachsten Projektionen (Projektionsebene = xy-Ebene) konzentriert.
- Transformation der Kamera in Weltkoordinaten (Model-View) und Projektion werden nacheinander durchgeführt.



Ausblick

- In einigen Gebieten der Visualisierung, z.B. bei der Darstellung geographischer Daten und abstrakter Daten werden nichtlineare Projektionen genutzt.
- **Beispiele:** Fisheye-Projektionen mit einem oder mehreren Fokuspunkten zur Darstellung geographischer Daten
- **Vorbild:** Projektionen aus der Kartographie, die das Stadtzentrum (als Fokus) vergrößert darstellen.