Einführung in die Aussagenlogik

<u>D. 1.</u> (*Aussage*)
Eine *Aussage* ist ein Satz, der genau einen der genau einen der *Wahrheitswerte wahr* (*W*) oder *falsch* (*F*) hat.

<u>B. 1.</u>
Die sog. *zweiwertige Logik* basiert auf folgenden grundlegenden <u>Prinzipien</u>:

P1: *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten*:
Es treten nur die beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch auf und keine weiteren.
(vgl. S.1.)

P2: *Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*:
Es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.
(vgl. S.2.)

<u>BS. 1.</u>
Folgende Sätze sind Aussagen. Ihre Wahrheitswerte sind in Klammern angegeben:

1. Brot ist ein Nahrungsmittel (*W*).
2. Die Zahl 24 ist eine ungerade Zahl (*F*).
3. Die Arbeitskraft ist ein Produktionsfaktor (*W*)
4. Die Zahl $20^{8465} - 1$ ist eine Primzahl
   (Es handelt sich auch hier um eine Aussage, obwohl deren Wahrheitswert (noch) nicht bekannt ist.)

<u>BS. 2.</u>
Folgende Sätze sind keine Aussagen:

1. Verkaufe mir Dein Auto!
2. Hoffentlich werden Autos billiger.
3. 2 + 5
4. Der Student x ist verheiratet.

<u>D. 2.</u> (*Aussageform*)
Ein Satz, der mindestens eine Variable enthält und durch Einsetzen eines konkreten Wertes aus einer angegebenen Gesamtheit für diese Variable zu einer Aussage wird, heißt *Aussageform*.
Tritt in einem Satz eine Variable x ein und bezeichnet man die zugrunde liegende Grundgesamtheit mit X, so kann man eine Aussageform auch abkürzend in der Form

$$\{H(x), \ \ x \in X\}$$

angeben.

<u>BS. 3.</u>
Wir bilden aus folgenden Aussageformen Aussagen:

1.
Aussageform: $H(x)$: Student x wohnt in Wildau.
Aussage: X : Menge aller Studenten der TFH Wildau; x = „Paul Schmidt".

2.
Aussageform: $H(x)$: x ist eine natürliche Zahl.
Aussage: X : Menge der natürlichen Zahlen; $x = 7$.

3.
Aussageform: $H(x,y)$: $x+y=13$, $x,y \in X$: Menge der natürlichen Zahlen..
Aussage: $x=7, \quad y=6$.

<u>B. 2.</u>
Man kann bei gegebener Grundgesamtheit X untersuchen, ob eine vorgegebene Aussageform für *jedes* Element der Grundmenge X zu einer wahren Aussage wird bzw. ob es überhaupt *ein* Element *gibt*, die aus der Aussageform eine Aussage macht.
Die sog. *Quantifikatoren* „für alle" ($\forall$) und „es gibt ein" ($\exists$) können also eine Aussageform zu einer Aussage machen. Symbolisch:

$$\forall x \in X \left(H(x)\right) \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in X \quad \text{bzw.} \quad H(x), \ \forall x \in X \, ;$$

$$\exists x \in X \left(H(x)\right) \quad \text{bzw.} \quad \exists x \in X : H(x)$$

<u>BS. 4.</u>

$\forall x \in \mathrm{N}$: $x+1>x \quad (W)$
$\forall x \in \mathrm{N}$: $x^2=5 \quad (F)$.

<u>D. 3.</u> (*Aussagenverbindungen*)
Aussagenverbindungen entstehen durch Verknüpfung von Aussagen mithilfe von *logischen Operationen*:

1) *einstellige* (Negation)
2) *zweistellige* (Alternative, Konjunktion, Implikation, Äquivalenz)

<u>D. 3.</u> (*Negation*)
Sei p eine Aussage. Die *Negation* von p, bezeichnet mit $\neg p$, sei durch folgende *Wahrheitswerttabelle* definiert:

p	$\neg p$
W	F
F	W

<u>BS. 5.</u>
Sei
p : „Alle Teilnehmer des Kurses sind fleißig"

Dann ist

$\neg p$: „Es gibt ein Teilnehmer des Kurses, der nicht fleißig is.“
bzw.
„Nicht alle Teilnehmer des Kurses sind fleißig.“

<u>D. 5.</u> (*Alternative bzw. Disjunktion*)
Seien p und q Aussagen. Die *Alternative* p oder q, symbolisch $p \vee q$, wird durch folgende Wahrheitswerttabelle definiert:

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

<u>BS. 6.</u>
Sei
p : „Die Zahl 10 ist durch 4 teilbar.“ (F)
q : „Die Zahl 10 ist durch 5 teilbar.“ (W)

Dann ist

$p \vee q$: „Die Zahl 10 ist durch 4 oder 5 teilbar.“ (W).

<u>D. 6.</u> (*Konjunktion*)
Seien p und q Aussagen. Die *Konjunktion* p und q, symbolisch $p \wedge q$, wird durch folgende Wahrheitswerttabelle definiert:

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

<u>BS. 7.</u>
Sei
p : „Die Zahl 10 ist durch 4 teilbar.“ (F)
q : „Die Zahl 10 ist durch 5 teilbar.“ (W)

Dann ist

$p \wedge q$: „Die Zahl 10 ist durch 4 und 5 teilbar.“ (F)

D. 7. **(*Implikation*)**
Seien p und q Aussagen. Die *Implikation wenn* p, dann q, symbolisch $p \Rightarrow q$, wird durch folgende Wahrheitswerttabelle definiert:

p	q	$p \Rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Man sagt auch „aus p folgt q“. p ist die *Voraussetzung* und q ist die *Behauptung* bzw. p ist *hinreichende Bedingung* für q und q ist *notwendige Bedingung* für p.

BS. 8.
Sei
p: „Die Zahl 10 ist durch 4 teilbar.“ (F)
q: „Die Zahl 10 ist durch 5 teilbar.“ (W)

Dann ist

$p \Rightarrow q$: „Wenn die Zahl 10 durch 4 teilbar ist, so ist sie durch 5 teilbar.“ (W)

D. 8. **(*Äquivalenz*)**
Seien p und q Aussagen. Die *Äquivalenz* p genau dann, wenn q, symbolisch $p \Leftrightarrow q$, wird durch folgende Wahrheitswerttabelle definiert:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Man sagt auch „p und q sind äquivalent“.

BS. 9.
Sei
p: „Die Zahl 10 ist durch 4 teilbar.“ (F)
q: „Die Zahl 10 ist durch 5 teilbar.“ (W)

Dann ist

$p \Leftrightarrow q$: „Die Zahl 10 ist genau dann durch 4 teilbar, wenn sie durch 3 teilbar ist.“ (W)

D. 9. (***Logische Äquivalenz***)
Wenn zwei Aussagenverbindungen die gleichen Wahrheitswerte liefern, so heißen sie *logisch äquivalent* (bzw. *logisch gleichwertig*).

D. 10. (***Tautologie***)
Eine *Tautologie* ist eine Aussagenverbindung, die unabhängig vom Wahrheitswert der erhaltenen Einzelaussagen immer den Wahrheitswert wahr besitzt.

S. 1. (***Satz vom ausgeschlossenen Dritten***)
Die Aussage $p \vee \neg p$ ist eine Tautologie.

Beweis:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
W	F	W
F	W	W

S. 2. (***Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch***)
Die Aussage $\neg(p \wedge \neg p)$ ist eine Tautologie.

Beweis:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
W	F	F	W
F	W	F	W

S. 3. (***De Morgansche Regeln***)
Die Aussagen

a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Beweis:
a)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
W	W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	F	W	W	W
F	W	F	W	W	F	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

b)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
W	W	W	F	F	F	F	W
W	F	W	F	F	W	F	W
F	W	W	F	W	F	F	W
F	F	F	W	W	W	W	W

BS. 10.
a)
Sei

p: „Paul ist Raucher."
q: „Paul ist Student."

Dann sind folgende Aussagen logisch äquivalent:

$\neg(p \wedge q)$: „Es stimmt nicht, dass Paul Raucher und Student ist."
$\neg p \vee \neg q$: „Paul ist Nichtraucher oder er ist kein Student."

b)
Sei

p: „Der Tank ist leer."
q: „Der Motor ist defekt."

Dann sind folgende Aussagen logisch äquivalent:

$\neg(p \vee q)$: „Es stimmt nicht, dass der Tank leer oder der Motor defekt ist."
$\neg p \wedge \neg q$: „Der Tank ist nicht leer und der Motor ist in Ordnung."

D. 11. (*Schlussregel*)
Eine *Schlussregel* ist eine Implikation, die Tautologie ist.

BS. 11.
a)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	W

Die Aussage „Wenn p und q gelten, so gilt auch q." ist also eine Schlussregel.

b)

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow q$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	F
F	W	F	F	W
F	F	W	F	W

Die Aussage $(p \wedge \neg q) \Rightarrow q$ ist also keine Schlussregel.

<u>**S. 4.**</u> **(*Abtrennungsregel (Modus ponens, direkter Beweis)*)**
Die Implikation

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

ist eine Tautologie.

Beweis:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

<u>**B. 3.**</u>
Eine andere gebräuchliche Schreibweise für die obige Schlussregel ist auch die folgende:

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Diese Schlussregel sichert, dass aus der Richtigkeit von p und der Richtigkeit des Schlusses $p \Rightarrow q$ die Richtigkeit von q folgt.

<u>**S. 5.**</u> **(*Indirekter Beweis*)**
Die Implikation

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

ist eine Tautologie

Beweis:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	W	F	W
F	W	W	F	W	F	W
F	F	W	W	F	F	W

(Man kann diese Regel auch wie folgt schreiben:

$$\begin{array}{l} p \\ \neg q \Rightarrow \neg p \\ \hline q \end{array}$$

)

<u>S. 6.</u> (*Fallunterscheidung*)
Die Implikation

$$\left[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \right] \Rightarrow r$$

ist eine Tautologie.

(Man kann diese Regel auch wie folgt schreiben:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

)

Beweis: (Übung!)

<u>S. 7.</u> (*Kettenschluss*)
Die Implikation

$$\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

ist eine Tautologie.

(Man kann diese Regel auch wie folgt schreiben:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

)

Beweis: (Übung!)

<u>B. 4.</u>
Es gibt auch Schlussregeln, die umkehrbar sind. Eine solche Schlussregel stellt eine Äquivalenz dar, die unabhängig von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen immer wahr ist. Im folgenden Satz ist eine umkehrbare Schlussregel angegeben:

<u>S. 8.</u> (*Contraposition*)
Es gilt die folgende Schlussregel:

$$\left(p \Rightarrow q \right) \Leftrightarrow \left(\neg q \Rightarrow \neg p \right)$$

ist eine Tautologie.

Beweis: (Übung!)

BS. 12.
Sei

p: „Student Paul hat Prüfung."
q: „Student Paul muss sich konzentrieren."

Die Aussage

$p \Rightarrow q$: „Student Paul hat Prüfung."

ist logisch äquivalent zur Aussage

$\neg q \Rightarrow \neg p$: „Wenn Student Paul sich nicht konzentriert, so hat er keine Prüfung."

(Letzte Aktualisierung: 11.10.05)