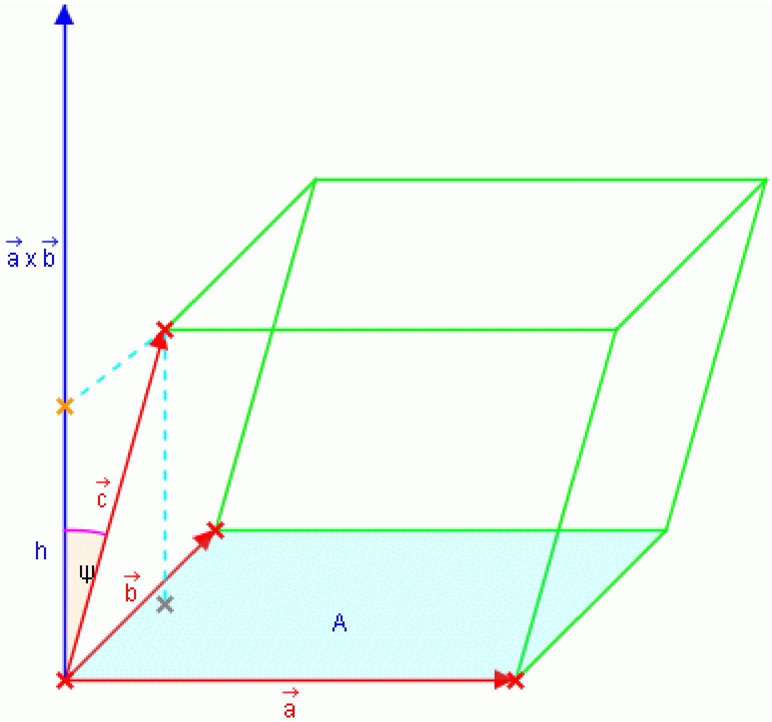
Das Spatprodukt



Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

Die Vektoren spannen einen Spat (Parallelvielflach) auf.

Spatprodukt.gxt

Volumen Spat $\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h}$ und $\mathbf{A} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ und $\mathbf{h} = |\mathbf{c}| \cdot |\cos(\psi)|$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\cos(\psi)|$$

$$\mathbf{V} = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

<u>Def.:</u> $\mathbf{SP}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ heißt Spatprodukt $\mathbf{V}_{\mathbf{Spat}} = |\mathbf{SP}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$

<u>Satz:</u> $\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow$ **a**, **b**, **c** sind linear abhängig

Die Berechnung des Spatproduktes

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \rightarrow (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot c_1 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot c_2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot c_3$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot a_3 \cdot b_2 + c_2 \cdot a_3 \cdot b_1 - c_2 \cdot a_1 \cdot b_3 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1 + c_3 \cdot a_1 \cdot b_2$$

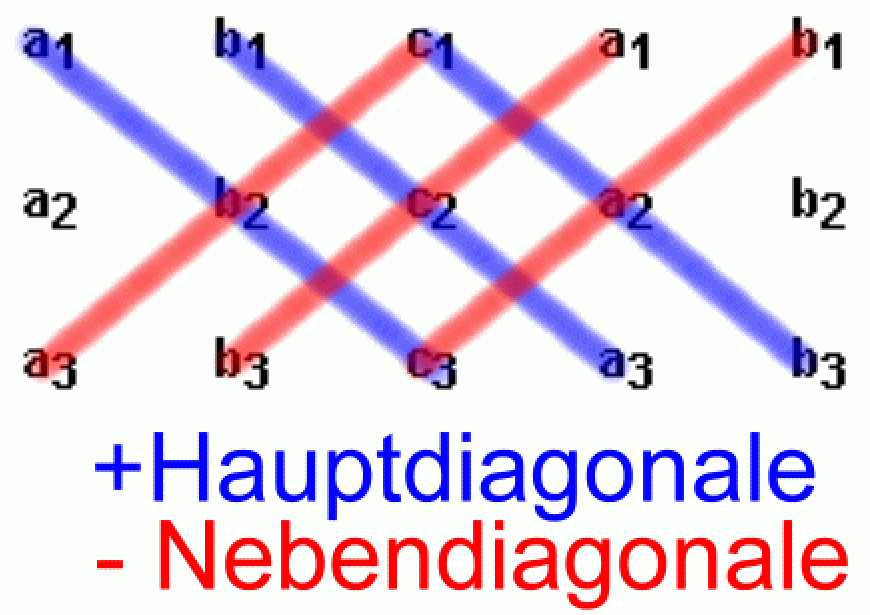
Dreireihige Determinanten

<u>Def.:</u> Unter einer dreireihigen Determinante versteht man das Zahlenschema

$$\mathbf{D}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \left|\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - b_3 \cdot c_2 \cdot a_1 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1$$

Regel von Sarrus



Es gilt also $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{D}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$

Anwendungen: $\mathbf{V}(\mathbf{Spat}) = |\mathbf{D}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})|$

$$\mathbf{V}(\mathbf{Tetraeder}) = \frac{1}{6} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{Spat})$$

$\mathbf{D}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ **a**, **b**, **c** sind linear abhängig