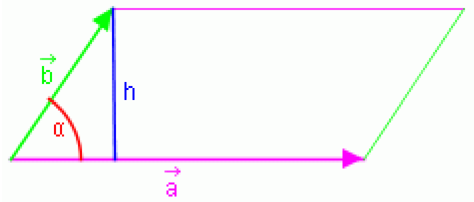
Zweireihige Determinanten



Gegeben sind die linear unabhängigen Vektoren **a**, **b** $\in R^2$

Gesucht ist die Fläche A des durch **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms.

$$A = |a| \cdot h = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\alpha) = |a| \cdot |b| \cdot \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}$$

$$A = \sqrt{(|a|)^2 \cdot (|b|)^2 - (|a|)^2 \cdot (|b|)^2 \cdot \cos(\alpha)^2}$$

$$A = \sqrt{a^2 \cdot b^2 - [|a| \cdot |b| \cdot (\cos(\alpha))]^2} \qquad \text{mit} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \sqrt{a^2 \cdot b^2 - (a \cdot b)^2}$$

$$A = \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2\right) - (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2)^2}$$

$$A = \sqrt{a_1^2 \cdot b_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_2^2 \cdot b_1^2}$$

$$A = \sqrt{(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2}$$

$$A = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1|$$

Seien nun **a** und **b** linear abhängig: $a = \lambda \cdot b$

Dann gilt: $A = |\lambda \cdot b_1 \cdot b_2 - \lambda \cdot b_2 \cdot b_1| = 0$

Satz: $A(\text{Parallelogramm}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0 \neq b$ sind linear unabhängig

Def.: Unter einer zweireihigen Determinante versteht man das Zahlenschema, für das gilt:

$$D(a, b) = \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$ "Hauptdiagonale - Nebendiagonale"

Für zwei Vektoren im R^2 mit Hilfe der zweireihigen Determinante entschieden werden, ob sie linear abhängig sind.

Bemerkung: Das Berechnungsschema für das Vektorprodukt lässt sich auch mit drei zweireihigen Determinanten ausdrücken.

Bsp.: Gegeben sind die Vektoren $a := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$D(a, b) := \left| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \right|$ $\quad D(a, b) = -11 \quad D(a, b) \neq 0 \quad \Rightarrow$ **a**, **b** sind linear unabhängig

$A(a, b) := \left| \left| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \right| \right|$ $\quad A(a, b) = 11$ Der Flächeninhalt des durch a, b aufgespannten Parallelogramms.