ACTA ARITHMETICA
XLVI (1986)

Simultane diophantische Approximationen abhängiger Größen in mehreren Metriken

von

F. F. Želudevič (Minsk)

1. Einführung. Es sei k, l, m, n, $n_1, \ldots, n_m$, $M = k+l+n_1+\ldots+n_m$ ganze nichtnegative Zahlen und solche, daß $\max(k+2l, n_1, \ldots, n_m) \leqslant n$ ist.

Bezeichnen wir durch $|\ldots|_{p_1}, \ldots, |\ldots|_{p_m}$ die definierten durch die Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ und normalizierten (d.h. $|p_i|_{p_i} = p_i^{-1}$) Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen $\boldsymbol{Q}$. Die Bezeichnung $|\ldots|$ nehmen wir für den gewöhnlichen Absolutbetrag.

Betrachten wir auch das direkte Produkt $\Omega = \prod_{v\in V} K_v$ der lokalen kompakten Körpern K_v mit den Normen $|\ldots|_v$, $v \in V = \{1, 2, \ldots, M\}$, wo

$K_v = \boldsymbol{R}$, $|\ldots|_v = |\ldots|$, $v = 1, \ldots, k$ (v is reelle Bewertung),

$K_v = \boldsymbol{C}$, $|\ldots|_v = |\ldots|^2$, $v = k+1, k+2, \ldots, k+l$ (v is komplex),

$K_v = \boldsymbol{Q}_{p_1}$, $|\ldots|_v = |\ldots|_{p_1}$, $v = k+l+1, \ldots, k+l+n_1, \ldots,$

$K_v = \boldsymbol{Q}_{p_m}$, $|\ldots|_v = |\ldots|_{p_m}$, $v = M-n_m+1, \ldots, M$ (v ist nichtarchimedisch).

D.h. $\Omega = \boldsymbol{R}^k \times \boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{Q}_{p_1}^{n_1} \times \ldots \times \boldsymbol{Q}_{p_m}^{n_m}$, deren Elementen wir durch $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_M)$ bezeichnen werden, wo $\omega_v \in K_v$, $v \in V$.

Für den Raum Ω wird gleichfalls, wie für das Produkt der Räume, ein Maß $\mu = \prod_{v\in V} \mu_v$ definiert, wo μ_v ein Maß von Haar des Raumes K_v ist.

Wir bezeichnen die Höhe $H = H(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ und die Potenz $n = \deg P$ für das ganzahlige Polynom

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Wir werden durch $\bar{K}_v$ die algebraische Abschließung vom Körper K_v bezeichnen. Wenn $\alpha_v \in \bar{K}_v$ eine Wurzel vom Polynom $P(x)$ ist, so werden wir $\alpha_v = \alpha_v(P) \in P$ schreiben.

$c, c_1, c_2, \ldots$ sind überall weiter die Konstanten, die mittels der Regeln $c + c = c$, $c \cdot c = c$ summiert und multipliziert werden.

Der Zweck dieses Artikels besteht im Beweis einer Vermutung von V. G. Sprindžuk [3]. Und nämlich wird

THEOREM. *Wenn $w_n(\omega)$ ein Supremum derjenigen Werte $w > 0$, für die die Ungleichung*

$$\prod_{v\in V} |P(\omega_v)|_v < H^{-w}$$

unendliche Anzahl der Lösungen in ganzzahligen Polynomen $P(x)$, $\deg P \leqslant n$ hat, ist, so ist

$$w_n(\omega) = n+1-k-2l$$

für fast alle $\omega\in\Omega$ (im Sinne des Masses μ), bewiesen.

Dieses Theorem verallgemeinert berühmte Ergebnisse von V. G. Sprindžuk [2] über Approximationen in den reellen, komplexen und p-adischen Zahlenkörpern.

V. I. Bernik [1] bewies dieses Theorem für $\Omega = \boldsymbol{R}^2$ und gab den schematischen Beweis für $\Omega = \boldsymbol{R}^k$ mit beliebiger natürlicher Zahl k. Bernik stützte sich beim Beweis auf die Methode der wesentlichen und unwesentlichen Gebiete, die er durch arithmetisch-topologische Klassifikation der Gebiete erweiterte, in denen die Polynome nach dem Absolutbetrag die Bedeutungen bekammen, die kleiner als die ausgemachte Grenze sind.

Auf diesem Wege, wie es zu vermuten war, war ein endgültiger Beweis des Theorems zubekommen.

Ich will Herrn Professor V. G. Sprindžuk und Doctor V. I. Bernik für herzliche Hilfe danken.

2. Reduktion zu speziellen Polynomen. Wenn ganzzahliges Polynom reduzierbar ist, so ist es dem Produkt der ganzzahligen irreduziblen Polynome gleich (nach Lemma von Gauss). Und wenn dann die Eigenschaft der annähernden Multiplikativkeit der Höhe zu benutzen, so ist es leicht zu zeigen, daß für den Beweis des Theorems die Betrachtung irreduzibler Polynome genug ist.

Mit Hilfe der Transformationen der Translation $P(x)\to P(x+l)$, $l\in Z$ und der Inversion $P(x)\to x^n P(x^{-1})$ der Variable des Polynoms $P(x)$ kann man der Übergang in der Aufgabe zu den primitiven Polynomen machen, die die Bedingungen

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |a_i| \leqslant |a_n| = H, \tag{1}$$

$$|\alpha_v|_v < c, \quad \alpha_v\in P,\ v\in V \tag{2}$$

erfüllen.

Ausführlicher kann man den Übergang im Theorem zu den irreduziblen primitiven Polynomen $P(x)$, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, nach der Monographie von V. G. Sprindžuk [2] verfolgen. Wir werden weiter die Klasse solcher Polynome durch $P_n(H)$ bezeichnen.

Mit Hilfe des Schubfachprinzips kann man leicht zeigen, daß die Abschätzung $w_n(\omega)\geqslant n+1-k-2l$ gilt. Deshalb wenn wir zeigen, daß die Ungleichung

$$\prod_{v\in V} |P(\omega_v)|_v < H^{-n-1+k+2l-\varepsilon} \tag{3}$$

bei beliebiger fixierter Zahl $\varepsilon > 0$ die unendliche Anzahl der Lösungen in den Polynomen $P(x)\in P_n = \bigcup_{H=1}^{\infty} P_n(H)$ nur für die Menge der Punkte vom Maß Null aus Ω hat, so wird das Theorem ganz bewiesen.

Es sei aufgegebenes Polynom $P(x)\in P_n$. Es hat die Faktorzerlegung
in $\boldsymbol{C}$: $P(x) = a_n(x-\alpha_1')\dots(x-\alpha_n')$,
in $\bar{Q}_{p_i}$: $P(x) = a_n(x-\alpha_1^{(i)})\dots(x-\alpha_n^{(i)})$, $i = 1,\dots,m$.

Wir wollen nur eine Bemerkung machen, daß die Ordnung der Wurzeln der Polynome $P(x)\in P_n$ in den Körpern $\boldsymbol{C}$ und $\bar{Q}_{p_i}$ eine einfache Übung ist.

Mit Absicht der Vereinfachung der Berechnungen wird die spezielle Bezeichnung

$$\|\ldots\|_v = |\ldots|_v^T, \qquad T = [3Mn^2/\varepsilon]+1$$

hineingeführt.

Definieren wir jetzt die Gebiete

$$S(\alpha_v) = \{\omega_v\in K_v\colon \|\omega_v-\alpha_v\|_v = \min_{\beta_v\in P\cap\bar{K}_v} \|\omega_v-\beta_v\|_v\}$$

für die Wurzeln $\alpha_v\in P$, d.h. eine Menge der Zahlen des Körpers K_v, die als nächste Wurzel α_v haben.

Die Anzahl solcher Gebiete ist gleich offenbar $(m+1)n$ für beliebiges Polynom $P(x)\in P_n(H)$.

Wenn jetzt die Ungleichung (3) die unendliche Anzahl der Lösungen in den Polynomen $P(x)\in P_n$ hat, so hat die Ungleichung

$$\prod_{v\in V} |P(\omega_v)|_v < H^{-n-1+k+2l-\varepsilon}, \quad \omega_v\in S(\alpha_v),\quad v\in V, \tag{4}$$

die unendliche Anzahl der Lösungen in $P(x)\in P_n$ auch.

Man kann jetzt alle übrige Wurzeln des Polynoms $P(x)\in P_n(H)$ auf diese Weise

$$\|\alpha_v-\alpha_{v_2}\|_v \leqslant \|\alpha_v-\alpha_{v_3}\|_v \leqslant \dots \leqslant \|\alpha_v-\alpha_{v_n}\|_v, \quad v\in V \tag{5}$$

ordnen.

Führen wir die Bezeichnungen

$$\|\alpha_v-\alpha_{v_s}\|_v = H^{-\mu_v^{(s)}}, \quad [\mu_v^{(s)}] = l_v^{(s)}, \quad p_v^{(s-1)} = l_v^{(s)}+\dots+l_v^{(n)}, \quad s = 2,\dots,n$$

hinein.

Die Polynome $P(x) \in P_n$, die einen und denselben Vektor $l = (l_1^{(2)}, \ldots, l_M^{(n)})$ haben, vereinigen wir in der Klasse $P_n(l)$.

LEMMA 1. *Die Anzahl der Klassen $P_n(l)$ is endlich.*

Beweis. Die Abschätzung nach beiden Seiten $0 \leqslant l_v^{(s)} \leqslant 2n^2 T$ wird aus der Ungleichung (2) und den Ungleichungen

$$1 \leqslant |D(P)|^n \prod_{\substack{w \in V \\ w \text{ ist nichtarchimedisch}}} |D(P)|_w < cH^{2n^2} |\alpha_v - \alpha_{v_s}|_v$$

für Diskriminante $D(P)$ des irreduziblen Polynoms $P(x) \in P_n(l)$ bekommen.

Weil die Anzahl der Vektoren l nach Lemma 1 endlich ist, so kann man anstatt der Ungleichung (4) die Ungleichung

$$\prod_{v \in V} |P(\omega_v)|_v < H^{-n-1+k+2l-\varepsilon}, \quad \omega_v \in S(\alpha_v), \quad P \in P_n(H) \cap P_n(l), \quad v \in V \tag{6}$$

betrachten.

Es sei $\|P(\omega_v)\|_v = H^{-\nu_v}$, $[\nu_v] = t_v$. Dann haben wir das System der Ungleichungen

$$\|P(\omega_v)\|_v < H^{-t_v}, \quad P \in P_n(H) \cap P_n(l), \quad \omega_v \in S(\alpha_v), \quad v \in V. \tag{7}$$

Die Exponenten dieses Systems erfüllen offenbar die Ungleichung

$$T^{-1} \sum_{v \in V} t_v \geqslant n+1-k-2l+7\varepsilon/8, \tag{8}$$

und es ist hinreichend zu zählen, daß

$$T^{-1} t_v > -\Theta_v, \tag{9}$$

$$\Theta_v = \begin{cases} 1, & v \text{ ist reell,} \\ 2, & v \text{ ist komplex,} \\ 0, & v \text{ ist nichtarchimedisch.} \end{cases}$$

Man kann $n \geqslant 2$ mitzählen, weil der Beweis des Theorems bei $n = 1$ aus dem Borel-Cantelli Lemma [2] trivial erfolgt.

Nach dem Sprindžuk Theorem gilt $T^{-1} t_v < n+2$. Deshalb erfolgt es aus (9), daß man im System (7) den Vektor $t = (t_1, \ldots, t_M)$ als fixierten zählen kann.

LEMMA 2. *Es sei $P(z) = a_n \prod_{l=1}^{n} (z - \alpha_{v_l})$, $\alpha_{v_1} = \alpha_v$ und (5). Wenn $\omega_v \in S(\alpha_v)$ und*

$$|\alpha_v - \alpha_{v_j}|_v < |\omega_v - \alpha_v|_v \leqslant |\alpha_v - \alpha_{v_{j+1}}|_v, \tag{10}$$

so gelten die Abschätzungen

$$2^{(j-n)/j} |\omega_v - \alpha_v|_v \leqslant \left| \frac{P(\omega_v)}{a_n \prod_{l=j+1}^{n} (\alpha_v - \alpha_{v_l})} \right|_v^{1/j} \leqslant 2^{(n-1)/j} |\omega_v - \alpha_v|_v, \tag{11}$$

wo $1 \leqslant j \leqslant n$ und $\alpha_{v_{n+1}} = \alpha_v - 1$.

Beweis. Da folgende Ungleichungen

$$|\omega_v - \alpha_{v_l}|_v \leqslant |\omega_v - \alpha_v|_v + |\alpha_v - \alpha_{v_l}|_v \leqslant \begin{cases} 2|\omega_v - \alpha_v|_v, & 1 \leqslant l \leqslant j, \\ 2|\alpha_v - \alpha_{v_l}|_v, & j < l \leqslant n, \end{cases}$$

$$|\alpha_v - \alpha_{v_l}|_v \leqslant |\omega_v - \alpha_v|_v + |\omega_v - \alpha_{v_l}|_v \leqslant 2|\omega_v - \alpha_{v_l}|_v, \qquad l = 1, \ldots, n$$

gelten, so bekommen wir

$$\frac{|\omega_v - \alpha_v|_v^j}{2^{n-j}} \leqslant \left| \frac{a_n \prod_{l=1}^{n} (\omega_v - \alpha_{v_l})}{a_n \prod_{l=j+1}^{n} (\alpha_v - \alpha_{v_l})} \right|_v \leqslant 2^{n-1} |\omega_v - \alpha_v|_v^j$$

und diese Abschätzungen gleichbedeutend mit (11) sind.

LEMMA 3. *Es sei $P(x) \in P_n(H) \cap P_n(l)$. Dann gelten die Abschätzungen*

$$\|P^{(s)}(\alpha_v)\|_v < cH^{\theta_v T - p_v^{(s)}}, \quad s = 1, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Beweis. Aus $P(\omega) = H \prod_{l=1}^{n} (\omega - \alpha_{v_l})$ bekommen wir

$$P^{(s)}(\omega) = Hs! \sum_{u_1 < \ldots < u_{n-s}} (\omega - \alpha_{u_1}) \ldots (\omega - \alpha_{u_{n-s}}),$$

wo verschiedene $u_1, \ldots, u_{n-s}$ aus der Menge $\{v_1 = v, v_2, \ldots, v_n\}$ sind. Jetzt erhält man aus (5) die Ungleichung (12).

Weiter definieren wir einen Kreis

$$\tau_P(w_v) = \{z_v \in K_v \colon \|z_v - \alpha_v\|_v \leqslant 2^{nT} H^{-w_v} \|P'(\alpha_v)\|_v^{-1}\}$$

und eine Zahl

$$k_v = \max_{l_v \in \mathbf{Z}} \{l_v \colon \tau_P(t_v - l_v) \subset S(\alpha_v)\}.$$

LEMMA 4. *Die Anzahl der Vektoren $k = (k_1, \ldots, k_M)$ ist endlich.*

Beweis. Aus (2), (9) und (11) ($j = n$) bekommen wir die Ungleichungen

$$|\omega_v - \alpha_v|_v \leqslant |P(\omega_v) H^{-1}|_v^{1/n} < H^{-n^{-1}(T^{-1} t_v + \theta_v)} < c_1,$$

$$|\omega_v|_v \leqslant |\omega_v - \alpha_v|_v + |\alpha_v|_v \leqslant c_2, \tag{13}$$

$$|P(\omega_v)|_v < c_3 H^{\theta_v}. \tag{14}$$

Nach der Definition k_v und (14) wird die Ungleichung

$$k_v < t_v + \theta_v T < 3nT \tag{15}$$

erfüllt.

Wenn jetzt $k_v < t_v - 3n^2 T$, so $\tau_P(3n^2 T) \cap S(\alpha_v) \cap S(\alpha_w) \neq \emptyset$ nach der Definition k_v für $w \neq v$, wo $\alpha_v, \alpha_w \in \bar{K}_v$. Deshalb kann man zählen, daß $|\alpha_v - \alpha_w|_v < 3|\omega_v - \alpha_v|_v$. Samt der Definition des Kreises $\tau_P(3n^2 T)$ folgt daraus, daß die Abschätzung

$$q_v = |(\alpha_v - \alpha_w) \prod_{l=2}^{n} (\alpha_v - \alpha_{v_l})|_v < cH^{-3n^2}$$

gilt. Da das Polynom $P(x) \in P_n(H)$ irreduzibel ist, so

$$1 \leqslant |D(P)|^n \prod_{\substack{w \in V \\ w \text{ ist nichtarchimedisch}}} |D(P)|_w < cH^{2n^2} q_v < cH^{-n^2}.$$

Diese Ungleichungen sind widerspruchsvoll bei $H \geqslant H_0$ (H_0 ist hinreichend große Zahl). Folglich ist $k_v \geqslant t_v - 3n^2 T > -4n^2 T$. Wir bekommen also mit Hilfe (15) nicht mehr als $(8n^2 T)^M$ der Werte für den Vektor $\boldsymbol{k}$.

Bezeichnen wir durch $P_n(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$ die Klasse der Polynome $P(x) \in P_n(\boldsymbol{l})$, die einen und denselben Vektor $\boldsymbol{k}$ haben.

Infolge Lemmas 4 kann man die Lösungen des Systems (7) in den Polynomen $P(x) \in P_n(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$ betrachten.

LEMMA 5. *Es sei $P(x)$ und $Q(x) \in P_n(\boldsymbol{l}) \cap P_n(H)$, $\tau_P(w_v) \cap \tau_Q(w_v) \neq \emptyset$ und*

$$l_v^{(2)} < (w_v + \theta_v T - p_v^{(2)})/2. \tag{16}$$

Dann gilt für alle $\omega_v \in \tau_P(w_v)$

$$\|Q(\omega_v)\|_v < cH^{-w_v + n^2}. \tag{17}$$

Der Beweis wird mit Hilfe der Lemmata 2 und 3 durchgeführt (siehe [1], Lemma 9).

Weiter kann man zählen, daß für alle Polynome $P(x) \in P_n(H)$ beliebige aber fixierte Zahl $\delta > 0$ existiert und sobald $H > H_0(\delta)$, die Ungleichung

$$\|\alpha_v(P) - \alpha_w(P)\|_v > \delta \tag{18}$$

gilt, wo v, w verschiedene Punkte aus V sind und $\alpha_v(P), \alpha_w(P) \in \bar{K}_v$.

Sonst folgt der Beweis des Theorems aus dem Lemma 2 trivial.

Unsere weitere Untersuchung ist vom Wert der Summe $\sigma = \sum_{v \in V} k_v$ abhängig.

Wir nehmen an, daß

$$k_v \geqslant 0, \quad v \in V. \tag{19}$$

3. Klasse vom Geschlecht zwei. Resultante.

LEMMA 6. *Es sei*

$$\sigma \leqslant T + Mn.$$

Das System (7) hat dann unendliche Anzahl der Lösungen $P(x) \in P_n(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})$ nur für die Menge der Punkte aus Ω vom Maß Null.

Beweis. Aus der Definition k_v folgt, daß ein Punkt

$$\omega_v \in \tau_P(t_v - k_v - 1) \cap S(\alpha_v) \cap S(\alpha_w)$$

existiert, wo $w = v_l$, $l > 1$. Deshalb gelten nach Lemma 2 die Abschätzungen

$$H^{-l_v^{(2)}-1} < \|\alpha_v - \alpha_{v_2}\|_v \leqslant \|\alpha_v - \alpha_w\|_v \leqslant 2^T (\|\omega_v - \alpha_v\|_v + \|\omega_v - \alpha_w\|_v)$$
$$\leqslant c\|\omega_v - \alpha_v\|_v \leqslant cH^{-(t_v - k_v - 1) - \theta_v T + p_v^{(1)} + n - 1}.$$

Daraus erfolgt die Ungleichung

$$l_v^{(2)} > (w_v + \theta_v T - p_v^{(2)} - n)/2, \tag{20}$$

wo $w_v = t_v - k_v - 1$.

Es gibt die ganze Zahl $f = f_v > 1$, daß

$$\|\alpha_v - \alpha_{v_2}\|_v \leqslant \ldots \leqslant \|\alpha_v - \alpha_{v_f}\|_v < 1 \leqslant \|\alpha_v - \alpha_{v_{f+1}}\|_v \leqslant \ldots \leqslant \|\alpha_v - \alpha_{v_n}\|_v.$$

Als $f_v = 1$ für einen Punkt $v \in V$ ist, dann $l_v^{(2)} > w_v + \theta_v T$ statt (20) und

$$1 \leqslant \|\alpha_v - \alpha_{v_2}\|_v \leqslant H^{-l_v^{(2)}} < H^{-(t_v - k_v - 1) - \theta_v T},$$

d.h. $k_v \geqslant t_v + \theta_v T - 1$. Und in weiteren Berechnungen ersetzen wir k_v durch $t_v + \theta_v T - 1$ für solche v. Wenn $f_v = 1$ für alle $v \in V$ ist, so folgt der Beweis trivial aus dem Borel–Cantelli Lemma. Es existierten dann die ganzen Zahlen $e = e_v$, $2 \leqslant e_v \leqslant f_v$, die die Ungleichungen

$$l_v^{(e)} > (w_v + \theta_v T - p_v^{(e)} - n)/e \geqslant l_v^{(e+1)} \tag{21}$$

genügen.

Wir zeigen jetzt, daß kein Paar der Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ aus der Menge

$$P_n(s) = \bigcup_{2^s \leqslant H < 2^{s+1}} (P_n(H) \cap P_n(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k})), \quad h = 2^s$$

existiert, daß die Ungleichungen

$$\|\alpha_v(P) - \alpha_v(Q)\|_v < h^{-(w_v + \theta_v T - p_v^{(e)} - n)e - 1}, \quad v \in V \tag{22}$$

genügt.

Aus (21), (22) bekommen wir die Ungleichungen

$$(23)\qquad \prod_{1\leqslant a,b\leqslant e} \|\alpha_{v_a}(P)-\alpha_{v_b}(Q)\|_v < ch^{-e(w_v+\theta_v T-p_v^{(e)}-n)},$$

$$(24)\qquad \prod_{e<\max(a,b)\leqslant f} \|\alpha_{v_a}(P)-\alpha_{v_b}(Q)\|_v < ch^{-2ep_v^{(e)}},\qquad v\in V.$$

Die Multiplikatoren, die kleiner als $\delta/3$ sind, sind aus (23), (24) verschieden (im Sinne der Indizes). Wenn solche Multiplikatoren gleich sind, so kann man leicht wegen Lemma 2 den Widerspruch mit der Ungleichung (18) bekommen.

Es handelt sich gewiß nur um die Wurzeln, die im gemeinsamen Körper $\bar{K}_v$ liegen.

Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ sind irreduzibel, d.h. sie haben keine gemeinsame Wurzeln.

Deshalb gelten für Resultante $R(P, Q)$ mit der Berechnung (8), (23), (24) und $\sigma \leqslant T+Mn$ folgende Abschätzungen

$$(25)\qquad 1 \leqslant |R(P,Q)|\prod_{i=1}^{m}|R(P,Q)|_{p_i} < cH^{2n}\prod_{v\in V}\prod_{1\leqslant a,b\leqslant f_v}|\alpha_{v_a}(P)-\alpha_{v_b}(Q)|_v$$

$$< c2^{s(2n-2T^{-1}\sum_{v\in V}(w_v+\theta_v T-p_v^{(e)}-n))} < c2^{-\varepsilon s/3}.$$

Die Ungleichungen (25) bei $H \geqslant H_0$ sind widerspruchsvoll, denn $s = [\log_2 H]$ ist. Deshalb gilt (22) bei $h = 2^s \geqslant H_0$ nicht, d.h. es gibt im Gebiet

$$R = \{\omega\in\Omega\colon\ |\omega_v-\alpha_v(P)|_v < h^{-(w_v+\theta_v T-p_v^{(e)}-n)(eT)^{-1}},\ v\in V\}$$

keine Wurzeln $\alpha_Q = (\alpha_1(Q), \ldots, \alpha_M(Q))$ des anderen Polynoms $Q(x)\in P_n(s)$.

Deshalb wegen (13) ist die Anzahl der verschiedenen Polynome in der Klasse $P_n(s)$ nicht mehr als

$$(26)\qquad c(\mu R)^{-1} = c2^{sT^{-1}\sum_{v\in V}(w_v+\theta_v T-p_v^{(e)}-n)e^{-1}}$$

gleich. Wir bekommen aus Lemma 2 ($j = e$) und $H \geqslant 2^s$, daß die Menge der Punkte $\omega\in\Omega$, die (7) befriedigen, eine Teilmenge der Menge

$$A_P = \{\omega\in\Omega\colon\ |\omega_v-\alpha_v(P)|_v < c2^{-s(Te)^{-1}(t_v+\theta_v T-p_v^{(e)}-n)},\ v\in V\}$$

ist.

Die Punkte $\omega\in\Omega$, für die das System (7) unendliche Anzahl der Lösungen $P(x)\in P_n(s)$ hat, bilden eine Menge

$$A \subseteq \bigcup_{s=s_0}^{\infty}\ \bigcup_{P\in P_n(s)} A_P \quad \text{für beliebige } s_0 = 1, 2, \ldots$$

$\theta > 0$ sei beliebige Zahl und $s_0 = [\log_2 H_0]$, wo $H_0 = H_0(\theta)$ hinreichend große ganze Zahl ist. Für das Maß der Menge A bekommen wir die obere Abschätzung

$$\mu A \leqslant \sum_{s=s_0}^{\infty}\mu A_P\cdot(26) \leqslant c\sum_{s=s_0}^{\infty} 2^{-s\sum_{v\in V}(k_v+1)(e_v T)^{-1}}$$

$$< c\sum_{s=s_0}^{\infty} 2^{-s(\sigma+M)(nT)^{-1}} < \theta,$$

d.h. $\mu A = 0$, was zu beweisen war.

Schließlich, wenn (21) für ein $v\in V$ nicht erfüllt wird, so gelten die Ungleichungen

$$l_v^{(2)} \geqslant l_v^{(3)} \geqslant \ldots \geqslant l_v^{(f-1)} \geqslant \frac{w_v+\theta_v T-p_v^{(f-1)}-n}{f-1}$$

und ersetzen wir in (22) auch in weiteren Berechnungen e_v durch f_v-1 für ein solches v.

Lemma 6 ist ganz bewiesen.

4. Klasse vom Geschlecht eins. Induktion.

LEMMA 7. *Es sei*

$$\sigma > T+Mn.$$

Das System (7) *hat dann unendliche Anzahl der Lösungen* $P(x)\in P_n(l, k)$ *nur für die Menge der Punkte aus* Ω *vom Maß Null.*

Beweis. Um keine Verwirrung in den Bezeichnungen zu anstiften, nehmen wir an, daß die Bedingung

$$(27)\qquad k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_M$$

erfüllt wird.

Wir werden weiter mit den Systemen

$$(28)\qquad \begin{cases}\|P(\omega_v)\|_v < H^{-t_v+\delta_v},\\ \omega_v\in\tau_P(t_v-\delta_v),\ v\in V,\end{cases}$$

arbeiten, wo die ganzen δ_v solche sind, daß $0 \leqslant \delta_v \leqslant k_v$. Also sind die Lösungen des Systems (7) gleichfalls die Lösungen des Systems (28). Wir wählen den Punkt ω_v, für den

$$\|P(\omega_v)\|_v = c_v H^{-t_v+\delta_v}$$

ist, wo $c_v < 1$. Nach der Definition $\tau_P(w_v)$ und k_v haben wir die Inklusionen

$$\omega_v\in\tau_P(t_v-\delta_v) \subseteq \tau_P(t_v-k_v) \subset S(\alpha_v).$$

Mit Rücksicht auf Lemma 2 bekommen wir jetzt die Ungleichungen

$$cH^{-t_v+\delta_v}\|P'(\alpha_v)\|_v^{-1} < \|\omega_v-\alpha_v\|_v < \|\alpha_v-\alpha_{v_2}\|_v \leqslant H^{-l_v^{(2)}},$$

d.h.

$$l_v^{(2)} < (t_v-\delta_v+\theta_v T-p_v^{(2)})/2. \tag{29}$$

Bezeichnen wir für die ganzen u, $u+1\in V$,

$$\sigma_u = \sum_{v=1}^{M-u-1} k_v, \qquad a_u = T+(M-u)n-\sigma_u,$$

wo $\sigma_{M-1} = 0$. Nach der Bedingung des Lemmas $a_0 < k_M$. Wenn jetzt für ein u $(1\leqslant u\leqslant M-1)$ die Ungleichungen

$$a_{u-1} < k_M \leqslant a_u \tag{30}$$

erfüllt werden, so nehmen wir an, daß $k'_{M-u} = a_{u-1}-k_M+k_{M-u}$, $\delta_v = k_v$, $v = 1,\ldots, M-u-1$, $\delta_{M-u} = k'_{M-u}$, $\delta_M = k_M$, $\delta_v = 0$ für übrige $v\in V$.

Wir bemerken, daß $T^{-1}\sum_{v\in V}\delta_v > 1$ und wegen (30) $n < \delta_{M-u} < k_{M-u}$.

Für erklärtes Polynom $P(x)\in P_n(H)\cap P_n(l, k)$ liegen alle Punkte $\omega\in\Omega$, die das System (28) erfüllen, im Gebiet $T_P = \prod_{v\in V}\tau_P(t_v-\delta_v)$.

Es sei jetzt das Polynom $Q(x)\in P_n(H)\cap P_n(l, k)$, das auch das System (28) erfüllt.

(i) Wenn $T_P\cap T_Q \neq \emptyset$, so gilt $\tau_P(t_v-\delta_v)\cap\tau_Q(t_v-\delta_v) \neq \emptyset$ für alle $v\in V$ und nach Lemma 5 für alle Punkte $\omega\in T_P$ die Ungleichungen

$$\|Q(\omega_v)\|_v < cH^{-t_v+\delta_v+n^2}, \qquad v\in V$$

erfüllt werden, mit Rücksicht auf (2). Deshalb für das Polynom

$$R(x) = P(x)-Q(x), \qquad \deg R\leqslant n-1, \qquad H(R)\leqslant 2H,$$

und alle Punkte $\omega\in T_P$ gilt das System der Ungleichungen

$$\|R(\omega_v)\|_v < cH^{-t_v+\delta_v+n^2}, \qquad v\in V, \tag{31}$$

wo

$$T^{-1}\big(-\sum_{v\in V} t_v+\sum_{v\in V}\delta_v+n^2 M\big)\leqslant -\big((n-1)+1-k-2l\big)-3\varepsilon/8.$$

Aber nach der Induktion (der Fall $n = 1$) kann man schließen, daß das System (31) unendliche Anzahl der Lösungen $R(x)\in P_{n-1}$ nur für die Menge der Punkte aus Ω vom Maß Null hat.

(ii) Wenn schließlich $T_P\cap T_Q = \emptyset$ für alle Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ aus

$P_n(H)\cap P_n(l, k)$ ist, so gilt

$$\sum_{P\in P_n(H)\cap P_n(l,k)}\mu T_P < c,$$

mit Rücksicht auf (13).

Mit Rücksicht jedoch auf die Ungleichungen

$$\mu_v\tau_P(t_v) < c_v H^{-\delta_v}\mu_v\tau_P(t_v-\delta_v), \qquad v\in V$$

gilt die folgende Abschätzung

$$\sum_{H=1}^{\infty}\sum_{P\in P_n(H)\cap P_n(l,k)}\mu\big(\prod_{v\in V}\tau_P(t_v)\big)\leqslant c\sum_{H=1}^{\infty}H^{-1-Mn/T}\sum_{P\in P_n(H)\cap P_n(l,k)}\mu T_P < \infty.$$

Und jetzt kann man Borel–Cantelli Lemma gebrauchen.

Wenn (30) gilt nicht, so sind dann

$$k_v\geqslant k_M > a_{M-1} = T+n > \delta_v = (T+n)M^{-1}, \qquad v\in V,$$

u.s.w., wie in den Fällen (i), (ii) sind.

Lemma 7 ist ganz bewiesen.

5. Gemischte Klasse. Schließlich nehmen wir an, daß die Bedingung (19) nicht gilt und

$$k_1\geqslant\ldots\geqslant k_{M-u}\geqslant 0 > k_{M-u+1}\geqslant\ldots\geqslant k_M, \qquad u \text{ aus } V. \tag{32}$$

(i) Es sei

$$\sigma_{u-1}\leqslant T+(M-u)n.$$

Infolge (20) und (32) gelten die Ungleichungen

$$l_v^{(2)} > (t_v-1+\theta_v T-p_v^{(2)}-n)/2, \qquad v = M-u+1,\ldots, M.$$

Wir handeln weiter wie beim Beweis Lemma 6, wo nur w_v durch t_v-1 in (22) für $v = M-u+1,\ldots, M$ ersetzt wird.

(ii) Es sei

$$\sigma_{u-1} > T+(M-u)n,$$

d.h. $u < M$, da $\sigma_{M-1} = 0$ ist.

Bezeichnen wir

$$r(t_v) = 2^{nT}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\big(H^{-t_v}/\|H\prod_{l=j+1}^{n}(\alpha_v-\alpha_{v_l})\|_v\big)^{1/j},$$

$$\mathscr{S}_P(t_v) = \{z_v\in K_v\colon \|z_v-\alpha_v\|_v < r(t_v)\}, \qquad v\in V.$$

Wenn jetzt Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ aus $P_n(H)\cap P_n(l, k)$ und $\mathscr{S}_P(t_v)\cap\mathscr{S}_Q(t_v)\neq\emptyset$ sind, so wird die Ungleichung

$$\|Q(\omega_v)\|_v\leqslant cH^{-t_v+n} \qquad \text{für alle } \omega_v\in\mathscr{S}_P(t_v)$$

festgestellt, wie im Lemma 5 (siehe auch [1]). Wir handeln weiter wie beim Beweis Lemmas 7. Und nämlich haben wir

$$a_u = T+(M-u)n-\sigma_u = T+(M-u)n-\sigma_{u-1}+k_{M-u} < k_{M-u}.$$

Wenn die ganze Zahl r, $1 \leqslant r \leqslant M-u-1$, existiert, daß

$$a_{u+r-1} < k_{M-u} \leqslant a_{u+r}, \tag{33}$$

so nehmen wir an, daß $k'_{M-u-r} = a_{u+r}-k_{M-u}+k_{M-u-r}$. Und weiter arbeiten wir mit dem System (28) und den Gebieten

$$T_P = \prod_{v=1}^{M-u} \tau_P(t_v-\delta_v) \prod_{v=M-u+1}^{M} \mathscr{S}_P(t_v-\delta_v),$$

wo $\delta_v = k_v$, $v = 1, 2, \ldots, M-u-r-1$, $\delta_{M-u-r} = k'_{M-u-r}$, $\delta_{M-u} = k_{M-u}$, $\delta_v = 0$ für übrige $v \in V$.

Wenn (33) nicht gilt, so sind dann

$$k_v \geqslant k_{M-u} > a_{M-1} = T+n > \delta_v = (T+n)(M-u)^{-1}, \quad v = 1, 2, \ldots, M-u,$$

$$\delta_v = 0, \quad v = M-u+1, \ldots, M.$$

Das Theorem ist ganz bewiesen.

Zum Schluß des Artikels bemerken wir, daß man das Theorem auf den Ring S-adele beliebiger endlicher Körpererweiterung der rationalen Zahlen Q verallgemeinern kann.

Literaturverzeichnis

[1] V. I. Bernik, *Metric theorem on the simultaneous approximations of zero by values of polynomials with integral coefficients*, Izv. Akad. SSSR 44 (1980), pp. 24–45 (Russian) or Math. USSR Izv. 16 (1981), pp. 21–40.

[2] V. G. Sprindžuk, *Mahler's problem in metric number theory* (Russian), Minsk 1967 or Amer. Math. Soc. Transl. of math. monographs 25 (1969).

[3] — *Achievements and problems in Diophantine approximation theory*, Uspekhi Mat. Nauk 35 (4) (1980), pp. 3–68 (Russian) or Russ. Math. Surv. 35 (4) (1980), pp. 1–80.

Eingegangen am 15.10.1984 (1463)

ACTA ARITHMETICA
XLVI (1986)

Ideal class groups of cubic cyclic fields

by

SHIN NAKANO (Tokyo)

In this note, we apply the basic lemmas in [2] to the proof of a result on the ideal class groups of cubic cyclic fields, which gives a better estimation than Uchida [3]. We shall prove the following

THEOREM. *For any given natural number n, there exist infinitely many cubic cyclic fields whose ideal class group contains a subgroup isomorphic to* $(Z/nZ)^2$.

We fix, throughout this note, a natural number n (>1). Let $\mathscr{L}$ be the set of all prime factors of n and put $n_0 = \prod_{l \in \mathscr{L}} l$. For a number field k, denote by $k^\times$ and W_k its multiplicative group and the group of the roots of unity contained in k respectively. For a natural number v and a prime p satisfying $p \equiv 1 \pmod{v}$, denote by $\left(\frac{-}{p}\right)_v$ the vth power residue symbol modulo p.

The basic lemmas in [2] are the following

LEMMA 1. *Let K be a number field of finite degree, r be the free-rank of the unit group of K and suppose there exist $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K^\times$ $(s > r)$ satisfying the following conditions:*

(i) $(\alpha_i) = \mathfrak{a}_i^n$ *for some ideal* $\mathfrak{a}_i$ *of* K $(1 \leqslant i \leqslant s)$,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *are independent in* $K^\times/W_K K^{\times l}$ *for any* $l \in \mathscr{L}$.

Then the ideal class group of K contains a subgroup isomorphic to $(Z/nZ)^{s-r}$.

LEMMA 2. *Let $f(X)$ be a monic irreducible polynomial in $Z[X]$, θ be a root of $f(X)$, $K = Q(\theta)$ and suppose there exist rational integers A_i, C_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ such that*

(i) $f(A_i) = \pm C_i^n$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$,

(ii) $(f'(A_i), C_i) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$.

Then the s elements $\alpha_i = \theta - A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ satisfy the condition (i) *of Lemma* 1. *Moreover, if there exist $t \in Z$ and primes $p_1, \ldots, p_s \equiv 1 \pmod{M}$, where $M = \prod_{l \in \mathscr{L}} l^{1+\mathrm{ord}_l(|W_K|)}$, so that*