Lehrstuhl für Theoretische Physik II
U. Eckern

Übungen zur Theoretischen Festkörperphysik I — WS 2007/08
Blatt 2: Wiederholungen aus der Statistischen Physik

1. Zeigen Sie mit Hilfe der kanonischen Zustandssumme Z_K, dass für die Schwankung der Energie gilt:
$$(\Delta E)^2 \equiv \overline{E^2} - \overline{E}^2 = (kT)^2 \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial (kT)} \right)_V .$$
Welcher Zusammenhang besteht zur Wärmekapazität C_V und wie hängen die relativen Fluktuationen $\Delta E/E$ von der Systemgröße ab? (k: Boltzmann-Konstante)

2. (a) Leiten Sie aus der verallgemeinerten Entropie $\tilde{S}(\{W(n)\})$ die großkanonische Zustandsfunktion
$$W_G(n) = Z_G^{-1} \exp[-\beta(E_n - \mu N_n)]; \quad \beta = 1/(kT)$$
und die großkanonische Zustandssumme Z_G her. Dazu minimieren Sie mittels dreier Lagrange-Multiplikatoren $\tilde{S}(\{W(n)\})$ unter den Nebenbedingungen, dass die mittlere Energie $\overline{E}$ und Teilchenzahl $\overline{N}$ vorgegeben sind (und die Verteilung geeignet normiert ist). Identifizieren sie dann die Lagrange-Multiplikatoren durch geeignete Definitionen mit kT und μ.
   (b) Welche Bedeutung hat μ?
   (c) Verifizieren Sie, dass $K(T, \mu) \equiv -kT \ln Z_G$ die folgende Form hat:
$$K(T, \mu) = \overline{E} - TS - \mu \overline{N}$$
   (d) Zeigen Sie: $\partial K(T, \mu)/\partial \mu = -\overline{N}$ und $\partial K(T, \mu)/\partial T = -S$. Welche physikalischen Größen ergeben sich, wenn man diese Ableitungen nochmals nach T bzw. nach μ differenziert?

3. (a) Zeigen Sie, dass sich die kanonische Zustandssumme $Z_K(\beta) = \sum_n \exp(-\beta E_n)$ ($\beta = 1/(kT)$) als Laplace-Transformierte der mikrokanonischen Zustandssumme $\Omega(E) = \mathcal{N}(E)\delta E$, mit $\mathcal{N}(E) = \sum_n \delta(E - E_n)$, schreiben lässt:
$$Z_K(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \mathcal{N}(E) e^{-\beta E}$$
.
   (b) Werten Sie das Integral in der Sattelpunktsnäherung aus, und leiten Sie daraus die thermodynamische Beziehung $F = E - TS$ her; benutzen Sie dazu $F = -kT \ln Z_K$ sowie $S = k \ln \Omega(E)$.

4. Zum Debye-Modell:
Die Frequenzen ω der $3N$ Normalschwingungen der Atome eines einfachen Festkörpers seien: $\omega_i = c|\mathbf{k}_i|$, wobei c die Schallgeschwindigkeit im Kristall ist. Die erlaubten k-Werte erhält man durch Auferlegung periodischer Randbedingungen in einem Volumen $V = L^3$.

(a) Gehen Sie aus von der Energie $E = \sum_{r=1}^{3N} \hbar\omega_r(n_r + 1/2)$, $n_r = 0, \ldots, \infty$, und berechnen Sie Zustandssumme, freie Energie F, $\overline{E}$ und spezifische Wärme C_V.

(b) Bestimmen Sie die Zustandsdichte $\mathcal{D}(\omega)$ und daraus die maximale Frequenz ω_D der Phononen, so dass gilt: $\int_0^{\omega_D} d\omega \mathcal{D}(\omega) = 3N$; ω_D ist die wird Debye-Frequenz.

(c) Benutzen Sie $\mathcal{N}(\omega)$ und ω_D aus (b) zur Auswertung der Frequenzsumme im Ergebnis für C_V aus (a). Berechnen Sie C_V bei hohen und bei tiefen Temperaturen. [Benutzen Sie: $\theta_D = \hbar\omega_D/k$ und $D(x) = x^{-3} \int_0^x dt t^3 (e^t - 1)^{-1}$.]

Hinweis: $\sum_{\mathbf{k}} \to (L/2\pi)^d \int d^d k$.

5. Bohr-van-Leeuwen-Theorem: Zeigen Sie, dass im Rahmen der statistischen Mechanik ein Magnetfeld auf ein System (wechselwirkender) klassischer Teilchen im thermischen Gleichgewicht keine physikalische Auswirkung hat.
Hinweis: Gehen Sie aus von der Hamiltonfunktion $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}(\vec{p}_i + e\vec{A}(\vec{r}_i))^2 + V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ und zeigen Sie, dass die Zustandssumme nicht von $\vec{A}$ abhängt.

6. Betrachten Sie ein 3-dimensionales ideales Fermigas mit dem Energie-Impuls-Zusammenhang $\epsilon_p = p^2/2m$.

(a) Berechnen Sie mittlere Energie und Teilchenzahl bei der Temperatur $T = 0$.

(b) Berechnen Sie (bei gegebenem chemischem Potential μ) die Teilchenzahl im Grenzfall sehr kleiner (Sommerfeld-Entwicklung) und sehr großer Temperaturen.

(c) Berechnen Sie die Teilchenzahl für $\mu = 0$.

(d) Verwenden Sie die Ergebnisse von (b) und (c) um das Verhalten von μ als Funktion von T bei fester Teilchendichte zu diskutieren.