Übungsblatt 9 zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2012

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutor: Frederik Garbe

http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/lina2012
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraII.php

Abgabe bis spätestens 18. Juni 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 15. Juni 2012 in Frederiks Fach, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. *[4 Punkte] Nicht-ausgeartete Bilinearform*

Eine Bilinearform b auf einem Vektorraum V heißt nicht-ausgeartet, *wenn gilt:*

$$b(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V \text{ impliziert } x = 0, b(x,y) = 0 \text{ für alle } x \in V \text{ impliziert } y = 0.$$

Sei V nun ein endlich dimensionaler Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Man definiere den Kern von s durch:

$$\ker s : \{x \in V : s(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$$

und zeige, dass $\ker s$ ein Unterraum ist und dass s eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $V/\ker s$ induziert.

Aufgabe 2. *[4 Punkte] Orthonormalbasis*

Es sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $x_1, \ldots, x_n$, aus der man durch Anwenden des Gram-Schmidt Verfahrens die Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ erhalte. Man zeige für Konstanten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{K}$ mit $|\varepsilon_i| = 1$, dass das Orthonormalisierungsverfahren die Basis $\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n$ in die Orthonormalbasis $\varepsilon_1 e_1, \ldots, \varepsilon_n x_n$ überführt.

Aufgabe 3. *[4 Punkte] Gramsche Matrix, Gramsche Determinante*

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$. Dann heißt $G := A^t A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Gramsche Matrix und $g := \det G$ heißt Gramsche Determinante. Zeigen Sie, dass stets gilt $g \geq 0$, wobei $g > 0$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{rang} A = m$.

Aufgabe 4. *[4 Punkte] Begriffe zur Orthogonalität und symmetrischen Bilinearformen*

Es sei $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Man zeige:

(i) Durch $\varphi(A,B) = \operatorname{Spur}(A \cdot B)$ wird auf V eine nicht-ausgeartete (siehe Aufgabe 1) symmetrische Bilinearform erklärt.

(ii) *Sei* $U_+ = \{U \in V : {}^tU = U\}$ *der Untervektorraum aller symmetrischen und* $U_- = \{U \in V : {}^tU = -U\}$ *der Untervektorraum aller schiefsymmetrischen Matrizen. Es gilt*

$$V = U_+ \oplus U_-, \qquad U_+^\perp = U_-, \qquad U_-^\perp = U_+.$$

(iii) *Es ist* φ *positiv definit auf* U_+ *und negativ definit auf* U_-*, d.h. es gilt* $\varphi(A, A) > 0$ *für alle* $A \in V_+ \setminus \{0\}$ *und* $\varphi(A, A) < 0$ *für alle* $A \in V_- \setminus \{0\}$.