

Fraktale und Lindenmayer-Systeme

ZUSAMMENFASSUNG DES VORTRAGES

Richard Wilhelm

Wintersemester 2007

1 Fraktale

Vorgestellt wurden drei klassische Fraktale und anhand derer die Begriffe Selbstähnlichkeit und Dimension erörtert.

1.1 Die Cantor-Menge

Die Cantor-Menge wurde 1883 von Georg Cantor veröffentlicht, Ausgangspunkt ist das reelle Intervall $[0, 1]$. Die Cantor-Menge wird nun folgendermaßen konstruiert: Man nehme das mittlere Drittel, genauer das offene Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ aus $[0, 1]$ raus und man erhält zwei Unterintervalle $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$. Man iteriere diesen Schritt jew. mit allen Unterintervallen, d.h. entferne die jew. mittleren Drittel und lasse die Eckpunkte drin, siehe Abb.

Die Cantor-Menge ist nun die Menge aller Punkte aus $[0, 1]$, die verbleibt, wenn man den Vorgang unendlich oft wiederholt. Was läßt sich über diese Menge sagen?

Zuerst betrachten wir die Länge der verbleibenden Unterintervalle. Welche Gesamtlänge haben diese? Dabei summieren wir die Längen der entnommenen Unterintervalle. Pro Iteration entstehen zweimal soviel neue Unterintervalle wie im Schritt zuvor, nach der k . Iteration haben wir entsprechend $n = 2^k$ viele Unterintervalle. Außerdem skalieren wir diese pro Schritt um den Faktor $\frac{1}{3}$, folglich ist die Länge eines solchen Unterintervalls $l = (\frac{1}{3})^k$. Als Gesamtlänge der verbleibenden Unterintervalle müssen wir für die Cantor-Menge nun den Grenzwert von $(\frac{2}{3})^n$ ausrechnen, wobei n gegen unendlich läuft:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Das heißt, daß sich in der Cantor-Menge kein Intervall, das nicht Länge von 0 hat, mehr befindet. Die Cantor-Menge ist also sowas wie eine Wolke von Punkten, weswegen sie auch Cantor-Staub genannt wird.

Welche Punkte sind das und was ist die Kardinalität dieser Menge?

Man sieht leicht, daß die Cantor Menge nicht leer ist, denn bei jedem Konstruktionsschritt verbleiben die Eckpunkte der offenen Intervalle drin. Sind das alle Punkte?

Wenn ja, so wäre die Cantor-Menge abzählbar unendlich, denn man könnte diese Punkte leicht durchnummerieren.

Es stellt sich jedoch heraus, daß die Cantor-Menge überabzählbar unendlich viele Elemente hat.

Um das zu sehen, bedarf es der Darstellung der Elemente in triadischer Darstellung, d.h. zur Basis 3. So werden beispielsweise in dieser Schreibweise $\frac{1}{3}$ als 0.1_3 und $\frac{2}{3}$ als 0.2_3 dargestellt. Das mittlere Drittel, das im ersten Schritt entnommen wird, enthält die Zahlen in ternärer bzw. triadischer

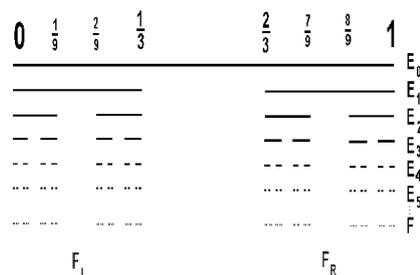


Abbildung 1: Konstruktion der Cantor-Menge

Darstellung der Form $0.1xxxxx\dots_3$, wobei $xxxxx\dots_3$ von durchgehend $00000\dots_3$ bis durchgehend $22222\dots_3$ rangiert, folglich bleiben nach dem ersten Schritt diese Zahlen aus $[0, 1]$ übrig:

- Zahlen der Form $0.0xxxxx\dots_3$
- $\frac{1}{3} = 0.1_3 = 0.0\bar{2}_3$ (diese alternative Schreibweise über Periode von $n - 1$, erfolgt in jedem Zahlensystem zur Basis n)
- $\frac{2}{3} = 0.1\bar{2}_3 = 0.2_3$
- Zahlen der Form $0.2xxxxx\dots_3$

All diese können in der Form $0.0xxxxx\dots_3$ oder $0.2xxxxx\dots_3$ geschrieben werden. Im zweiten Schritt werden Zahlen der Form $0.01xxxx\dots_3$ und $0.21xxxx\dots_3$ entnommen, wobei die Eckpunkte jeweils wieder alternativ über Periode 2 dargestellt werden. Betrachtet man das weitere Vorgehen, das völlig analog zum bisherigen voranschreitet, dann kann geschlußfolgert werden, daß die verbleibenden Zahlen diejenigen sind, deren triadische Darstellung keine 1 unter den ersten zwei Ziffern hat. Damit eine Zahl nicht im n . Schritt entnommen wird, muß sie eine triadische Darstellung haben, die keine 1 in der n -ten Ziffer enthält. Daraus folgt, daß die Elemente der Cantor-Menge diejenigen Zahlen aus $[0, 1]$ sind, deren ternäre Darstellung nur aus Nullen und Zweien besteht, also keinerlei Eins enthält. Um zu zeigen, daß dies überabzählbar unendlich viele sind, konstruieren wir eine Funktion $f : C \rightarrow [0, 1]$, wobei C die Cantor-Menge sein soll.

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2}\right) 2^{-k}$$

f bildet auf das reelle Intervall $[0, 1]$ ab, wobei Zahlen zur binären Darstellung aus $[0, 1]$ das Bild sind, denn die Koeffizienten a_k werden, immer wenn sie den Wert 2 haben, durch eine 1 ersetzt. f ist eine surjektive Funktion, denn jedes $y = f(x)$ hat ein Urbild in C , da jede Eins einfach durch eine Zwei ersetzt werden muß. f ist jedoch nicht injektiv, denn beispielsweise gilt $\frac{7}{9} = 0.20\bar{2}_3$ und $\frac{8}{9} = 0.22_3$, somit ist $f(\frac{7}{9}) = 0.10\bar{1}_2 = 0.11_2 = f(\frac{8}{9})$. Da f surjektiv zu $[0, 1]$ ist, ist die Cantor Menge überabzählbar unendlich. Sie enthält genauso viele Punkte wie das Intervall, aus dem sie entnommen wurde, dennoch enthält sie kein einziges Intervall.

„Ich sehe es, kann es aber nicht glauben.“ (Georg Cantor)

1.2 Das Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck wurde 1916 von Waclaw Sierpinski veröffentlicht. Ausgangsfigur ist ein „ausgefülltes“ gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenmitten verbunden werden. Dadurch entstehen vier kongruente gleichseitige Unter-Dreiecke, wobei das mittlere entnommen wird. Der gleiche Schritt wird bei den Unterdreiecken wiederholt, das Sierpinski-Dreieck ist dann die Menge aller Punkte der Ausgangsfigur, die in der Ebene verbleiben, wenn der Vorgang unendlich oft iteriert wurde.



1.2.1 Einige interessante Fakten zum Sierpinski-Dreieck

Umfang: pro Iteration entstehen drei neue Unterdreiecke, alle mit der halben Seitenlänge des jew. „Mutterdreiecks“ versehen. Nach k Iterationen haben wir 3^k Unterdreiecke mit Seitenlänge $(\frac{1}{2})^k a_0$, wobei a_0 die Seitenlänge des ursprünglichen Dreiecks darstellt. Folglich berechnet sich der Umfang der Struktur nach der k . Iteration zu $(\frac{3}{2})^k U_0$, wobei $U_0 = 3a_0$ ist. Der Umfang des Sierpinski-Dreiecks ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n U_0 = \infty$$

Fläche: Bei jeder Iteration entfernen wir pro Unterdreieck $\frac{3}{4}$ der Fläche. Nach dem ersten Schritt haben wir $\frac{3}{4}$ der Ausgangsfläche A_0 entfernt, nach dem k. Schritt entsprechend $(\frac{3}{4})^k A_0$. Die Fläche des Sierpinski-Dreiecks ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0 = 0$$

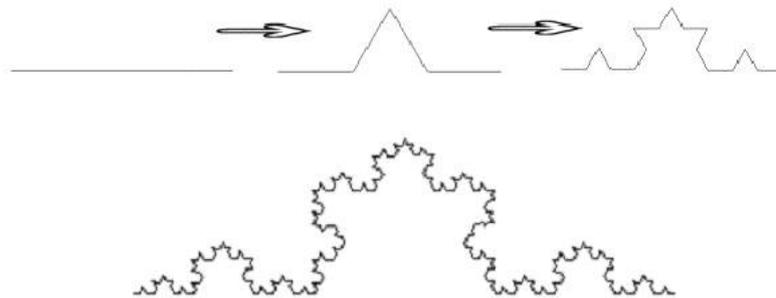
Das Sierpinski-Dreieck hat also unendlich großen Umfang und umgibt eine Fläche von 0.

1.3 Koch-Kurve

Die Koch-Kurve wurde 1904 vom schwedischen Mathematiker Helge von Koch publiziert. Sie sollte als weiteres Beispiel einer an keinem Punkt differenzierbaren Kurve dienen, von deren Sorte zuvor Karl Weierstraß mit seinem sog. „Weierstraß-Monster“ vorlegte.

Wir beginnen mit einer Strecke, dem sog. Initiator-Element. Auf die Strecke wird ein Generator angewandt, der das mittlere Drittel durch ein nach unten geöffnetes gleichseitiges Dreieck ersetzt.

In jedem Folgeschritt werden alle Teilstrecken der Figur als Initiator-Elemente behandelt, auf die der Generator angewandt wird, wobei sich die Teilstreckengröße um den Skalierungsfaktor $\frac{1}{3}$ verändert. Es entstehen pro Schritt Faktor 4 neue Teilstrecken.



Die Kochkurve ist dann die Kurve, die nach unendlich-facher Iteration entsteht.

1.3.1 Eigenschaften der Koch-Kurve:

Die Koch-Kurve ist stetig, man kann sie theoretisch zeichnen ohne je den Stift absetzen zu müssen. Sie ist wie erwähnt an keiner Stelle differenzierbar, da der Konstruktionsprozeß dazu geführt hat, daß die Kurve aus unendlich vielen Knickstellen besteht, an die keine Tangente anlegbar ist. Die Länge der Kochkurve ist unendlich, die Fläche, die von ihr eingeschlossen wird, hingegen hat endlichen Wert. Wenn man mit einem gleichseitigen Dreieck als Ausgangsfigur beginnt, erhält man die Koch'sche Schneeflocke.

1.4 Selbstähnlichkeit und Fraktale Dimension

„Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise.
Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt
sich seinen Weg nicht gerade. [...]
Die Existenz solcher Formen fordert uns zum Studium dessen heraus,
was Euklid als formlos beiseite läßt,
führt uns zur Morphologie des Amorphen.“
(Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur)

Den hier vorgestellten Fraktalen ist der Begriff der Selbstähnlichkeit gemeinsam. Dabei heißt eine Struktur selbstähnlich, wenn sie in beliebig kleine Teile zerlegt werden kann, von denen jedes eine Miniaturreplik der ganzen Struktur darstellt.

Auch Würfel, Strecken und Quadrate können beispielsweise in Miniaturkopien zerteilt werden, die allesamt Selbstähnlichkeit zur übergeordneten Struktur aufweisen. Müssten diese Gebilde folglich nicht auch selbstähnlich heißen ?

Bei diesen Figuren spielt aber der Skalierungsfaktor p , um den die jew. Unterstruktur verkleinert ist, keine Rolle. Bei den Fraktalen hingegen ist dieser jedoch charakteristisch, genauso wie der Faktor N , um den sich die Unterstrukturen pro Zerlegung vervielfachen.

Das Verhältnis beider charakteristischer Größen wird wie folgt ausgedrückt:

$p^D = N$, wobei der Exponent D den Wert der sog. Selbstähnlichkeitsdimension wiedergibt, der nach folgender Beziehung berechnet werden kann:

$$D = \frac{\log N}{\log p}$$

	Skalierungs- faktor p	Anzahl N der selbstähnlichen Strukturen selbstähnlichen Strukturen	Selbstähnlichkeits- dimension D
Kochkurve	$\frac{1}{3}$	4	1,2619
Cantor-Menge	$\frac{1}{3}$	2	0,6309
Sierpinski-Dreieck	$\frac{1}{2}$	3	1,585

Berechnet man D für normale euklidische Figuren wie ein Quadrat, Würfel oder eine Strecke, so erhält man die erwarteten Werte 2, 3 bzw. 1 heraus. Der nichtganzzahlige Wert für D bei Fraktalen ist das charakteristischste Merkmal dieser Strukturen, sie alle haben eine gebrochene „Dimension.“ Dieser Gemeinsamkeit verdanken sie auch ihren Namen Fraktal, abgeleitet vom lat. Wort 'fractus', was soviel wie gebrochen heißt, nach einer Bezeichnung von Mandelbrot.

Es gibt viele verschiedene Begrifflichkeiten für die fraktale Dimension, wobei aus historischer und methodischer Sicht die Zirkel- und Box-Counting-Dimension interessant sind. Am wichtigsten jedoch ist die sog. Hausdorff-Dimension, von der die Selbstähnlichkeitsdimension einen Spezialfall darstellt.

Sie sei hier vereinfacht für Punktmengen endlicher Ausdehnung im dreidimensionalen Raum dargestellt. Man betrachtet dabei die Anzahl N von Kugeln mit Radius r , die benötigt wird, die betreffende Punktmenge, also unser jew. Fraktal, vollständig zu überdecken.

$N(r)$ ist eine Funktion des Radius und es ist leicht ersichtlich, daß N größer wird, je kleiner r gewählt wird. Grob gesagt, wenn $N(r)$ auf die selbe Art und Weise wie $\frac{1}{r^D}$ wächst, wobei r auf 0 zuwandert, dann sagen wir, daß unsere Punktmenge Dimension D hat. D berechnet sich dann wie folgt:

$$D = - \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\log N}{\log r} \right)$$

Für eine gewöhnliche Kurve wächst die Zahl der erforderlichen Kugeln umgekehrt proportional zu $\frac{1}{r}$ und D ist folglich 1.

Für gewöhnliche Flächen wie Rechtecke wächst N proportional zu $\frac{1}{r^2}$, folglich ist $D = 2$.

Bei geometrischen Objekten, die aus n disjunkten Teilobjekten bestehen, die im Maßstab $1 : m$ verkleinerte Kopien des Gesamtobjekts darstellen, ergibt sich für die Hausdorff-Dimension $D = \frac{\log n}{\log m}$, womit wir hier die Selbstähnlichkeitsdimension wieder finden.

Bei gewöhnlichen Figuren der euklidischen Geometrie erhalten wir also Werte für die Hausdorff-Dimension, die sich mit der topologischen decken. Bei Fraktalen hingegen bekommen wir höhere, nichtganzzahlige Werte, was Mandelbrot zu folgender Definition von Fraktalen veranlaßt hat:

„Ein Fraktal ist nach Definition eine Menge, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische übersteigt.“ (Benoit Mandelbrot)

2 Lindenmayer-Systeme

Die Lindenmayer-Systeme, 1968 zum ersten Mal durch Aristid Lindenmayer veröffentlicht, wurden ursprünglich als theoretisches Rahmenwerk konzipiert, um biologische Wachstumsprozesse zu erfassen und zu modellieren. Dabei handelt es sich um sog. String-Ersetzungs-Systeme, die verwandt mit den formalen Grammatiken sind. Man kann nicht nur biologische Prozesse mit ihnen modellieren, sondern auch Strukturen wie Fraktale und Pflanzen visualisieren.

2.1 D0L-Systeme

D0L-Systeme sind deterministische kontextfreie L-Systeme.

Sei V ein Alphabet und V^* die Menge aller Wörter sowie V^+ die Menge aller nichtleeren Wörter über diesem Alphabet. Dann ist ein D0L-System ein 3-Tupel $G = (V, \omega, P)$, mit dem Axiom (Startwort) ω aus V^+ (ist also nichtleer) und $P \subset V \times V^*$, der endlichen Menge an Produktionsregeln, die jedem Buchstaben a aus V ein Wort χ aus V^* zuordnet.

Wenn $(a, \chi) \in P$, dann schreibt man $a \rightarrow \chi$ und sagt a erzeugt χ . Sollte für einen Buchstaben a keine Produktionsregel angegeben sein, so nimmt man die Identität als Abbildungsvorschrift an, mit $a \rightarrow a$. Ein 0L-System ist jetzt genau dann deterministisch, wenn es für alle Buchstaben a aus V genau ein Wort χ aus V^* gibt mit $a \rightarrow \chi$.

Sei nun $\mu = a_1 a_2 \dots a_m$ ein beliebiges Wort über V und $\nu = \chi_1 \chi_2 \dots \chi_m$ ebenfalls aus V^* . ν gilt als direkt von μ abgeleitet, genau dann wenn $a_i \rightarrow \chi_i$, für alle i aus $1, 2, \dots, m$ und man schreibt $\mu \Rightarrow \nu$. Ein Wort ν wird in G in Ableitungslänge n erzeugt, wenn es eine Entwicklungsfolge von Wörtern $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ gibt, so daß $\mu_0 = \omega$, $\mu_n = \nu$ und $\mu_0 \Rightarrow \mu_1 \Rightarrow \mu_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \mu_n$.

Man sieht, daß es deutliche Unterschiede zu den formalen Chomsky-Grammatiken gibt. Zum einen unterscheiden wir hier nicht zwischen einer Variablenmenge und einer Menge aus Terminalsymbolen, zum anderen erfolgt die Produktionsapplikation nicht sequentiell sondern simultan auf alle Buchstaben eines Strings pro Ableitung.

Diese Eigenschaft führt auch letztendlich dazu, daß es Sprachen gibt, die durch kontextfreie L-Systeme erzeugbar sind, nicht aber durch kontextfreie Grammatiken.

2.2 Turtle Graphics

Um Strings visuell zu interpretieren, bedarf es einer Erweiterung namens Turtle Graphics, das aus der Programiersprache LOGO stammt. Dabei stelle man sich eine Schildkröte vor, die einen Stift auf dem Rücken hat und die festgelegte Buchstaben als Befehle interpretiert.

Man formalisiert den Zustand der Schildkröte als $T = (x, y, \alpha)$, wobei x und y die kartesischen Koordinaten darstellen und somit die Position der Schildkröte in der Ebene, α beschreibt die Blickrichtung. Voreingestellt sind die Schrittlänge d und der Winkel δ , dann interpretiert die Schildkröte die folgenden Symbole so:

F : Die Schildkröte bewegt sich um einen Schritt der Länge d in Blickrichtung α und zieht dabei einen Strich. Der Zustand ändert sich zu $T(F) = (x', y', \alpha)$ mit $x' = d * \cos \alpha$ und $y' = d * \sin \alpha$

f : Die Schildkröte bewegt sich um einen Schritt der Länge d in Blickrichtung α , zieht dabei aber keinen Strich. Der sich ergebende Zustand $T(f)$ entspricht $T(F)$

$-$: Die Blickrichtung der Schildkröte, ändert sich um δ nach rechts, also im Uhrzeigersinn, mit $T(-) = (x, y, \alpha - \delta)$.

$+$: Die Blickrichtung der Schildkröte, ändert sich um δ nach links, also entgegen dem Uhrzeigersinn, mit $T(+) = (x, y, \alpha + \delta)$.

Jetzt können die im 1. Teil besprochenen Fraktale über L-Systeme graphisch erzeugt werden. Ich verzichte hier größtenteils auf die Abbildungen und gebe im folgenden nur die entsprechenden L-Systeme an:

2.2.1 Cantor Menge

Axiom $\omega : F$

Produktionsregeln:

$F \rightarrow FfF$

$f \rightarrow fff$

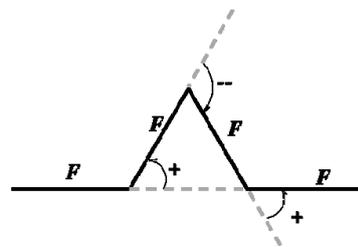
die Produktionsregel für f ergibt sich aus der Tatsache, daß die pro Schritt entnommenen Intervalle dreifache Länge zu den folgenden Unterintervallen der nächsten Iteration haben

2.2.2 Koch Kurve

$\omega : F$

$\delta = 60^\circ$

$F \rightarrow F + F - -F + F$



Die Interpretation von ' - -' liefert eine notwendige Ausrichtung um 120° nach rechts, wie in der Abbildung.

2.2.3 Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck wird über den sog. Sierpinski-Pfeilkopf erzeugt, eine sich nicht-schneidende Kurve, die im Grenzwert alle Punkte des Sierpinski-Dreiecks durchläuft.

$$\omega : L$$

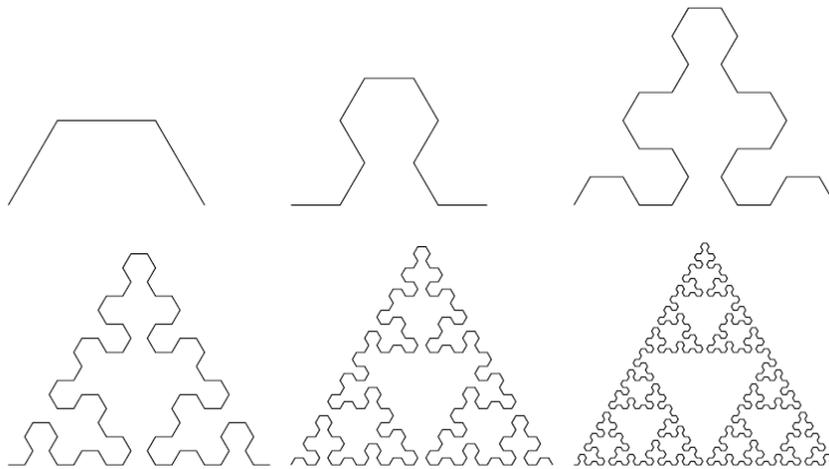
$$\delta = 60^\circ$$

Produktionsregeln:

$$L \rightarrow +RLR+$$

$$R \rightarrow ? -L + R + L-$$

mit $L = +FFF+$ und $R = -F + F + F-$



Anzumerken sei noch, daß bei allen drei Fraktalen die Schrittlänge d pro Iteration um den charakteristischen Skalierungsfaktor verkleinert wird.

Das Gebiet der Lindenmayer-Systeme bietet noch viele Erweiterungen. Die Ausstattung des Turtle-Systems mit einer Stack-artigen Struktur ermöglicht die Visualisierung von verzweigten baumähnlichen Objekten (gekammerte L-Systeme). Mit stochastischen L-Systeme hingegen kann man den Variationsreichtum der Natur besser modellieren, indem Buchstaben aus dem Alphabet mehrere Produktionsregeln zugewiesen werden, welche dann nach einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit appliziert werden. Die spezifische Erweiterung des Befehlssatzes der Schildkröte ermöglicht auch die visuelle Interpretation von Strings im dreidimensionalen Raum und auch sog. parametrische, kontextsensitive und zeitabhängige L-Systeme spielen in diesem Gebiet eine gewichtige Rolle.

Für die Vertiefung rund um das Gebiet der L-Systeme sei im folgenden auf [2.] in den Quellenangaben verwiesen, was das Gebiet der Fraktale angeht auf [1.].

Literatur

1. Peitgen, Jürgens, Saupe: Chaos and Fractals - New Frontiers of Science -2nd edition 2004, Springer Verlag
2. Prusinkiewicz / Lindenmayer: The Algorithmic Beauty of Plants, 1990, Springer Verlag, erhältlich hier: <http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.pdf>
3. Flake, Gary William: The Computational Beauty of Nature, 2000, MIT-Press