VII.5 Aufgaben

Es bezeichne H stets einen komplexen Hilbertraum und X einen komplexen Banachraum.

Aufgabe VII.5.1 Sei $T \in L(X)$. Für $\lambda \in \rho(T)$ gilt

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}.$$

Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert, gilt sogar Gleichheit.

Aufgabe VII.5.2 Zeige mittels eines Beispiels, daß der numerische Wertebereich eines Operators nicht abgeschlossen zu sein braucht.

Aufgabe VII.5.3 Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert.

(a) Zeige, daß die Abbildung $\widehat{\Phi}$ aus Satz VII.1.6 involutiv ist.

(b) Für $f \in B(\sigma(T))$ ist $f(T)(x) = f(\lambda)x$, falls $Tx = \lambda x$.

(c) Gilt $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$ für $f \in B(\sigma(T))$?

Aufgabe VII.5.4 (Analytischer Funktionalkalkül)
Es sei $T \in L(X)$ ein Operator auf einem Banachraum, und es definiere $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r(T)$.

(a) Dann konvergiert die Reihe $f(T) := \sum_{n=0}^\infty a_n T^n$ in $L(X)$.

(b) Ist $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r(T)$, so gilt $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

(c) Es gilt der Spektralabbildungssatz $\sigma\bigl(f(T)\bigr) = f\bigl(\sigma(T)\bigr)$.

(d) Ist T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum, so stimmt der soeben definierte Operator $f(T)$ mit dem aus Satz VII.1.3 überein.

Aufgabe VII.5.5 Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert und gilt $\sigma(T) = \{0, 1\}$, so ist T eine Orthogonalprojektion.

Aufgabe VII.5.6 Für zwei Orthogonalprojektionen E_1 und E_2 sind äquivalent:

(i) $\operatorname{ran}(E_1) \subset \operatorname{ran}(E_2)$,

(ii) $\ker(E_2) \subset \ker(E_1)$,

(iii) $E_1E_2 = E_2E_1 = E_1$,

(iv) $E_2 - E_1 \geq 0$.

Aufgabe VII.5.7 $A \mapsto E_A$ sei ein Spektralmaß. Zeige $E_AE_B = E_BE_A = E_{A\cap B}$ für A, $B \in \Sigma$ sowie $E_A \leq E_B$ (d.h. $E_B - E_A \geq 0$), falls zusätzlich $A \subset B$. (Verwende Aufgabe VII.5.6.)

Aufgabe VII.5.8

(a) Sei $h \in C_0(\mathbb{R})$ und M_h der Multiplikationsoperator $\varphi \mapsto h\varphi$ auf $L^2(\mathbb{R})$. Bestimme das Spektrum von M_h. Gib notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Spektralwert ein Eigenwert ist.

(b) Behandle dasselbe Problem für $h \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe VII.5.9 Sei $T \in L(H)$ ein normaler Operator und $\lambda \in \sigma(T)$. Dann existiert eine Folge (x_n) in H mit $\|x_n\| = 1$, so daß $Tx_n - \lambda x_n \to 0$. (Man sagt, λ sei ein *approximativer Eigenwert* von T.)

Aufgabe VII.5.10

(a) Seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Faltung $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, und es gilt
$$\mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2}\, \mathscr{F}f\, \mathscr{F}g.$$

(b) Beweise diese Formel für $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe VII.5.11 Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ dicht definiert. Zeige, daß T symmetrisch ist, wenn $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathrm{dom}(T)$ ist.
(Hinweis: Betrachte $\langle T(x+y), x+y\rangle$.)

Aufgabe VII.5.12

(a) Sei $T_1 = d/dt$ auf dem Definitionsbereich
$$\mathrm{dom}(T_1) = \Bigl\{ f \in L^2[0,1]\colon \frac{df}{dt} \text{ existiert f.ü. und gehört zu } L^2[0,1] \Bigr\}.$$
Dann ist $\mathrm{dom}(T_1^*) = \{0\}$.
(Tip: Approximiere durch stückweise konstante Funktionen.)

(b) Sei $T_2 = d/dt$ auf dem Definitionsbereich $\mathrm{dom}(T_2) = \mathrm{dom}(T_1) \cap C[0,1]$. Auch dann ist $\mathrm{dom}(T_2^*) = \{0\}$.
(Hinweis: Es ist hilfreich zu wissen, daß nicht konstante stetige monotone Funktionen f mit $f' = 0$ f.ü. existieren, siehe Rudin [1986], S. 144.)

Aufgabe VII.5.13 Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ dicht definiert.

(a) Aus $T \subset S$ folgt $S^* \subset T^*$.

(b) Wenn T wesentlich selbstadjungiert ist, besitzt T genau eine selbstadjungierte Erweiterung.

(c) Wenn T selbstadjungiert ist, besitzt T keine echte symmetrische Erweiterung.

Aufgabe VII.5.14 Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ dicht definiert und symmetrisch. Dann ist T^* genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn T^* symmetrisch ist.

Aufgabe VII.5.15 Seien $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ und $S\colon H \supset \mathrm{dom}(S) \to H$ dicht definiert. Setze $\mathrm{dom}(ST) = \{x \in \mathrm{dom}(T)\colon Tx \in \mathrm{dom}(S)\}$, und nimm an, daß auch $ST\colon H \supset \mathrm{dom}(ST) \to H$, $x \mapsto S(Tx)$, dicht definiert ist. Dann gilt $T^*S^* \subset (ST)^*$, wo $\mathrm{dom}(T^*S^*)$ analog erklärt ist. Ist $S \in L(H)$, so gilt sogar $T^*S^* = (ST)^*$.

Aufgabe VII.5.16 Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ dicht definiert und abgeschlossen, und sei $V\colon H \times H \to H \times H$ durch $(x,y) \mapsto (-y,x)$ definiert.

(a) V ist unitär bzgl. des kanonischen Skalarprodukts von $H \times H$.

(b) $\mathrm{gr}(T) = \bigl[V(\mathrm{gr}(T^*))\bigr]^{\perp}$.

(c) Ist $z \in \mathrm{dom}(T^*)^{\perp}$, so gilt $(z,0) \in \mathrm{gr}(T^*)^{\perp}$ sowie $(0,z) \in \mathrm{gr}(T)$.

(d) T^* ist dicht definiert.

(e) $T = T^{**}$.

Aufgabe VII.5.17 Bestimme die Objekte $[.,.]$, J, K, J^* und S aus dem Beweis von Satz VII.2.11 explizit, falls T der Operator $\mathrm{Id} - \Delta$ auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist.
(Hinweis: Satz V.2.14.)

Aufgabe VII.5.18 Zeige, daß die im Beweis von Satz VII.2.11 konstruierte Friedrichs-Erweiterung S

$$\mathrm{dom}(S) = \mathrm{dom}(T^*) \cap J(K), \quad S = T^*|_{\mathrm{dom}(T^*)\cap J(K)}$$

erfüllt.

Aufgabe VII.5.19 (Satz vom abgeschlossenen Bild)
In dieser Aufgabe soll der Satz vom abgeschlossenen Bild (Theorem IV.5.1) für unbeschränkte Operatoren diskutiert werden. Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ dicht definiert und abgeschlossen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathrm{ran}(T)$ ist abgeschlossen.
(ii) $\mathrm{ran}(T) = \ker(T^*)^\perp$.
(iii) $\mathrm{ran}(T^*)$ ist abgeschlossen.
(iv) $\mathrm{ran}(T^*) = \ker(T)^\perp$.

Anleitung: (ii) $\Rightarrow$ (i) und (iv) $\Rightarrow$ (iii) sind trivial. Für die Umkehrung dieser Implikationen zeige zuerst, daß für einen abgeschlossenen dicht definierten Operator stets $\mathrm{ran}(T)$ dicht in $\ker(T^*)^\perp$ und $\mathrm{ran}(T^*)$ dicht in $\ker(T)^\perp$ ist; beachte dafür die Aufgaben IV.8.13 und VII.5.16. Die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) wird auf die entsprechende Äquivalenz in Theorem IV.5.1 zurückgeführt. Dazu betrachte den Hilbertraum $H \times H$ und dessen abgeschlossenen Unterraum $G = \mathrm{gr}(T)$. Definiere $S\colon G \to H$ durch $S\colon (x, Tx) \mapsto Tx$. Offensichtlich ist $\mathrm{ran}(T) = \mathrm{ran}(S)$, und S ist stetig. Daher reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{ran}(T^*)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\mathrm{ran}(S^*)$ $(\subset H \times H)$ es ist. Das erzielt man durch folgende Überlegungen.

(a) $\langle S(x, Tx), y\rangle_H = \langle (x, Tx), (0, y)\rangle_{H\times H} \quad \forall x \in \mathrm{dom}(T),\, y \in H$.
(b) $S^*y - (0, y) \in G^\perp \quad \forall y \in H$.
(c) $(\xi, \eta) \in G^\perp \;\Leftrightarrow\; \eta \in \mathrm{dom}(T^*),\, \xi = -T^*\eta$.
(d) $\forall y \in H\ \exists \eta \in \mathrm{dom}(T^*) \quad S^*(y) = (-T^*\eta, y + \eta)$.
(e) $\mathrm{ran}(S^*) = \mathrm{ran}(T^*) \times H$.

Aufgabe VII.5.20 Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ abgeschlossen, dicht definiert und symmetrisch. Dann ist T genau dann selbstadjungiert, wenn $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe VII.5.21 Sei $T\colon H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ selbstadjungiert. Es existiere $\lambda \in \rho(T)$, so daß $(\lambda - T)^{-1}$ kompakt ist. (Man sagt, T habe eine *kompakte Resolvente*.)

(a) Dann ist für *alle* $\lambda \in \rho(T)$ die Resolvente $(\lambda - T)^{-1}$ kompakt.
(b) $\sigma(T)$ besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die keinen Häufungspunkt besitzen.

Aufgabe VII.5.22 Der Operator $i\frac{d}{dt}$ ist auf $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ wesentlich selbstadjungiert, und seine Abschließung ist $i\frac{d}{dt}$ auf $\{x \in L^2(\mathbb{R})\colon x|_I \in \mathrm{AC}(I)$ für alle kompakten Teilintervalle $I \subset \mathbb{R}$ und $dx/dt \in L^2(\mathbb{R})\}$.

Aufgabe VII.5.23 Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$, und gelte $f(t) = \overline{f(-t)}$ fast überall. Dann ist der Faltungsoperator $T\colon \varphi \mapsto f * \varphi$ auf $\operatorname{dom}(T) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R})\colon f * \varphi \in L^2(\mathbb{R})\}$ selbstadjungiert. Diskutiere die Spektralzerlegung von T.

Aufgabe VII.5.24 Sei $T\colon H \supset \operatorname{dom}(T) \to H$ dicht definiert. Der *numerische Wertebereich* von T ist

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle\colon x \in \operatorname{dom}(T), \|x\| = 1\}.$$

(a) Ist $\lambda \notin \overline{W(T)}$, so gilt

$$0 < \operatorname{dist}(\lambda, W(T)) \leq \|(\lambda - T)x\| \qquad \forall x \in \operatorname{dom}(T), \|x\| = 1.$$

(b) Ist $\lambda \notin \overline{W(T)}$ und $\lambda \in \rho(T)$, so gilt

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, W(T))}.$$

(c) Ist T selbstadjungiert, so gilt $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$ sowie $\inf \sigma(T) = \inf W(T)$, $\sup \sigma(T) = \sup W(T)$.
(Tip: Ist $\inf \sigma(T) = 0$, zeige $\langle(\lambda - T)^{-1}y, y\rangle \leq 0$ für $\lambda < 0$; setze dann $y = (\lambda - T)x$ und lasse $\lambda \to 0$ streben.)

Aufgabe VII.5.25 Sei (T_t) eine Familie stetiger linearer Operatoren auf einem Banachraum, die (2) bzw. (2) und (3) aus Definition VII.4.1 erfüllt. Gilt dann auch (1)?

Aufgabe VII.5.26 Zeige, daß die Wärmeleitungshalbgruppe (siehe (VII.20)) eine C_0-Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R}^d)$ ist.

Aufgabe VII.5.27 Sei $q\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte stetige Funktion. Betrachte die Operatoren $(T_t f)(x) = e^{tq(x)} f(x)$ auf $C_0(\mathbb{R}^d)$ oder $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$. Zeige, daß (T_t) eine C_0-Halbgruppe ist. Was ist ihr Erzeuger? Wann erhält man auch für $p = \infty$ eine C_0-Halbgruppe?

Aufgabe VII.5.28 Sei $X = \{f \in C[0,1]\colon f(1) = 0\}$, und die Operatoren $T_t\colon X \to X$ seien durch $(T_t f)(x) = f(x+t)$ für $0 \leq x + t \leq 1$ und $(T_t f)(x) = 0$ sonst erklärt. Zeige, daß $(T_t)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X ist, und bestimme ihren Erzeuger sowie ihre Wachstumsschranke.

Aufgabe VII.5.29 Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der Summennorm, $A(x_1, x_2) = (x_2, 0)$ und $T_t = e^{tA}$. Bestimme die Wachstumsschranke von (T_t). Wird das Infimum in (VII.25) angenommen?

Aufgabe VII.5.30 Seien $S, T \in L(X)$ kommutierende Operatoren. Dann gilt $e^{S+T} = e^S e^T$.

Aufgabe VII.5.31 Betrachte die Operatoren $Af = f'''$ und $Bf = f''' - f''$ jeweils mit dem Definitionsbereich $W^3(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe, B jedoch nicht.
(Tip: Fouriertransformation!)

Aufgabe VII.5.32 Sei A: $X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ein dicht definierter Operator mit $\rho(A) \neq \emptyset$. Dann ist A abgeschlossen.

Aufgabe VII.5.33 Sei A: $X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ein dicht definierter dissipativer Operator mit $(0, \infty) \cap \rho(A) \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\forall x \in \mathrm{dom}(A)\ \forall x' \in J(x) \quad \operatorname{Re} x'(Ax) \leq 0.$$

Aufgabe VII.5.34 Ein Operator A: $X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ heißt *abschließbar*, falls A eine abgeschlossene Erweiterung besitzt.

(a) A ist genau dann abschließbar, wenn aus $x_n \to 0$, (Ax_n) Cauchyfolge auch $Ax_n \to 0$ folgt.

(b) Ist A abschließbar, so ist der Abschluß des Graphen $\mathrm{gr}(A) \subset X \oplus X$ der Graph eines abgeschlossenen Operators $\overline{A}$. $\overline{A}$ heißt die *Abschließung* von A und ist offenbar die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A.

(c) Gib ein Beispiel eines nicht abschließbaren Operators.

Aufgabe VII.5.35 Ein *determinierender* oder *wesentlicher Bereich* (engl. *core*) eines dicht definierten abgeschlossenen Operators A: $X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ist ein Untervektorraum $D \subset \mathrm{dom}(A)$, der bzgl. der Graphennorm $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ dicht in $\mathrm{dom}(A)$ liegt. Zeige, daß D genau dann ein determinierender Bereich für A ist, wenn A die Abschließung von $A|_D$ ist. Ist $\lambda \in \rho(A)$, trifft das genau dann zu, wenn $(\lambda - A)(D)$ dicht in X liegt.

Aufgabe VII.5.36 Sei A: $X \supset \mathrm{dom}(A) \to X$ ein dicht definierter dissipativer Operator.

(a) Dann ist A abschließbar, und $\overline{A}$ ist ebenfalls dissipativ.

(b) Hat für ein $\lambda_0 > 0$ der Operator $\lambda_0 - A$ dichtes Bild, so ist $\lambda_0 - \overline{A}$ surjektiv, und $\overline{A}$ ist der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe.

Aufgabe VII.5.37 Hat ein Banachraum einen strikt konvexen Dualraum (siehe Aufgabe I.4.13), so ist die Dualitätsabbildung stets einelementig.

Aufgabe VII.5.38 Sei $X = C[0,1]$ und $Af = f''$ mit dem Definitionsbereich $\mathrm{dom}(A) = \{f \in C^2[0,1]\colon f'(0) = f'(1) = 0\}$. Dann erzeugt A eine Kontraktionshalbgruppe auf X.

Aufgabe VII.5.39 (Operatorgruppen)

(a) Sei A: $H \supset \mathrm{dom}(A) \to H$ selbstadjungiert. Sei $T_t := e^{itA}$ gemäß (VII.16) definiert. Dann ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe von unitären Operatoren, d.h. es ist $T_{s+t} = T_s T_t$ für $s, t \in \mathbb{R}$, für die

$$\lim_{t \to 0} T_t x = x \qquad \forall x \in H$$

gilt. (Wegen dieser Eigenschaft nennt man (T_t) wieder *stark stetig*.) Ferner ist

$$\lim_{t \to 0} \frac{T_t x - x}{t} = iAx \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(A).$$

(Tip: Analysiere zuerst den Fall $A = M_f$.)

(b) Ist A ein stetiger selbstadjungierter Operator, so gilt sogar

$$\lim_{t\to 0} \|T_t - \mathrm{Id}\| = 0.$$

(c) Sei A die selbstadjungierte Erweiterung von $i\frac{d}{dt}$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (siehe Aufgabe VII.5.22). Was sind in diesem Fall die T_t?

(d) (Satz von Stone)
Jede stark stetige Gruppe unitärer Operatoren kann als $\{e^{itA}\colon t \in \mathbb{R}\}$ mit einem selbstadjungierten Operator A geschrieben werden; man nennt häufig A – statt iA – den Erzeuger der Operatorgruppe. Zeige diesen Satz mit Hilfe des Satzes von Lumer-Phillips.

VII.6 Bemerkungen und Ausblicke

Das Kernstück der in den vorangegangenen Kapiteln bereits erwähnten 4. Mitteilung von Hilbert aus dem Jahre 1906 ist sein Beweis des Spektralsatzes für beschränkte selbstadjungierte Operatoren (bzw. in seiner Sprache für beschränkte symmetrische Bilinearformen). Die Tatsache, daß im Fall beschränkter Operatoren außer einer Reihendarstellung noch ein Integral auftaucht, war ein vollkommen unvorhergesehenes Phänomen. Hilberts Darstellung sieht freilich von der heutigen verschieden aus; statt eines Spektralmaßes erscheint bei ihm ein Stieltjes-Integral, wobei man sich in Erinnerung rufen muß, daß Stieltjes sein Integral erst 1894 im Rahmen seiner Untersuchung von Kettenbrüchen einführte. In der Zeit nach Hilbert wurden Beweise des Spektralsatzes für beschränkte und unbeschränkte Operatoren von Riesz (*Acta. Sci. Math. Szeged* 5 (1930–1932) 23–54), Lengyel und Stone (*Ann. Math.* 37 (1936) 853–864) und anderen gegeben; eine erschöpfende Liste von Literaturverweisen findet man in Dunford/Schwartz [1963], S. 927. Darüber hinaus erwähnen wir den Beweis von Leinfelder (*Math. Ann.* 242 (1979) 85–96) im unbeschränkten Fall. Der im Text gegebene Beweis des Spektralsatzes orientiert sich stark an Reed/Simon [1980]. Ein wesentlicher Teil dieses Beweises war der Entwicklung des Funktionalkalküls gewidmet. Die Essenz des Satzes VII.1.3 ist, daß die Algebra $C(\sigma(T))$ in allen Strukturen zur von Id und dem selbstadjungierten Operator $T \in L(H)$ erzeugten abgeschlossenen Unteralgebra von $L(H)$ isomorph ist. Eine sehr elegante Methode, dieses Resultat sogar gleich für normale Operatoren zu zeigen, stellt die Theorie der Banachalgebren bereit; siehe Korollar IX.3.8.

Die Theorie der unbeschränkten Operatoren ist das Werk J. von Neumanns (*Math. Ann.* 102 (1929) 49–131) sowie, kurz darauf und weitgehend unabhängig von diesem, M. H. Stones (Stone [1932]). (Es sei daran erinnert, daß erst in diesen Arbeiten Hilberträume abstrakt definiert wurden.) Als Vorarbeiten hierzu sind Weyls Untersuchungen über Eigenfunktionen von Randwertproblemen (1910) und Carlemans Studien singulärer Integraloperatoren (1923) zu nennen. Von Neumann ist es, der als erster die Notwen-