Fortsetzung zu Binswanger2

Überlegungen zu Geld, Kredit und Wirtschaftswachstum

Peter Fleissner (Version 05.02.2008)

Bisher wurde die Rechung nur mit zirkulierendem konstantem Kapital durchgeführt. Die Erweiterung um fixes Kapital ist relativ einfach. Nehmen wir an, dass die Kapitalmatrix auf Einsniveau mit K bezeichnet wird. Die Elemente kij der quadratischen Matrix K geben den fixen Kapitaleinsatz je Outputeinheit in der j-ten Branche an, der in der i-ten Branche produziert wurde.

Daraus lassen sich die beiden Eigenvektorgleichungen über die Hilfsgleichungen

$$(A+C)x + g(K+A+C)x = x$$

und

$$p(A+C)+rp(K+A+C) = p$$

ableiten. Aus

$$[E-(A+C)]x = g(K+A+C)x$$

und

$$p[E-(A+C)]= rp(K+A+C)$$

folgen die beiden Eigenvektorgleichungen

$$[E-(A+C)]^{-1}(K+A+C)x = 1/g\ x$$

und

$$p(K+A+C)\ [E-(A+C)]^{-1} = 1/r\ \ p$$

Überlegungen zu Preissystemen, die mit einem konstanten System der materiellen Produktion verträglich sind

1. Gegeben sind A und C als Matrizen (A … technische Koeffizienten, C … Konsumkoeffizienten) und
   l … Arbeitskoeffizienten (als Zeilen-Vektor - direkte Arbeit pro Outputeinheit).
2. Mengenebene: S sei die Matrix, die später das Mehrprodukt pro Outputeinheit angibt. Im folgenden soll die spätere Bedeutung der Matrix S gezeigt werden: Die Outputmengen x (Spaltenvektor) ergeben sich bis auf einen Faktor aus

   $$(A + C + S)x = x$$

   X ist also der Rechts-Eigenvektor von (A + C + S), Eigenwert = 1
3. Preisebene: Die Unit-Preise ergeben sich als Links-Eigenvektor der Matrix (A + C + S) aus

   $$p(A + C + S) = p$$

4. Mehrprodukt: Da die technischen Koeffizienten und der Unit-Konsum als konstant angenommen wurden, ist das Mehrprodukt s (Spaltenvektor)

   $$s = x – x(A + C)$$

5. Profit: Der Profit π pro Outputeinheit (Zeilenvektor) ergibt sich aus

   $$\pi = p - p (A + C)$$

6. Konstruktion der Surplus-Matrix S: Prinzip: Die S-Matrix gibt die Verteilung des Mehrprodukts auf Grund der Gewinnlage an und kann wie folgt konstruiert werden. Der Mehrproduktvektor s wird auf die einzelnen Branchen je nach vorhandenem Gewinn aufgeteilt, sodass eine Matrix S entsteht, die angibt, aus welcher Branche i (Zeilenindex) in welcher Branche j (Spaltenindex) das Mehrprodukt investiert und gleichzeitig aus dem Profit finanziert werden kann. Für alle S soll daher gelten

   $$Sx = s \text{ und } pS = \pi$$

d.h. das physische Mehrprodukt ist konstant (unter den gegeben technischen, institutionellen und politischen Bedingungen). Die Profitmasse (der Gesamtprofit) berechnet sich zu

$$\pi x = p s$$

Eine einfache Möglichkeit (es gibt unendlich viele Möglichkeiten), das Mehrprodukt aufzuteilen, wäre, es den Profiten entsprechend proportional auf alle Branchen aufzuteilen. Mathematisch bedeutet diese Aufteilung eine Matrixmultiplikation des Spaltenvektors s (!) mit dem Zeilenvektor π, wodurch aus der Multiplikation von zwei Vektoren eine Matrix (!) entsteht, die durch die Profitmasse normiert werden muss, damit die Dimension korrekt ist, d.h. sie entspricht den technischen Koeffizienten der Matrix A .

$$S = s\,\pi \;/\; \pi\,x \text{ oder } S = s\,\pi \;/\; ps$$

7. Nun können wir einzelne Preissysteme testen und sehen, welche Gestalten die S-Matrix annehmen kann, wenn A, C und s gegeben sind.
8. Besipiel 1: Arbeitswerte. Mit den Arbeitskoeffizienten l lassen sich die klassischen Arbeitswerte w (unit labour values, Zeilenvektor) berechnen. Sie ergeben sich aus $wA + l = w$ und Rechts-Multiplikation mit der Leontief-Inversen zu

$$w = l\,(E - A)^{-1}$$

9. Der hier als Mehrwert auftretende (unit) Profit ergibt sich zu $\pi = w - w(A + C)$, das Mehrprodukt s bleibt wie oben $s = x - (A + C)x$ konstant. Die Surplus-Matrix S wird zu $S = (E - A - C)x\, w(E - A - C) / [w(E - A - C)\,(E - A - C)x]$. Setzen wir w ein, erhalten wir S als Funktion der Arbeits- und technischen Koeffizienten $S = (E - A - C)x\; l\,(E - A)^{-1}\,(E - A - C) / [l\,(E - A)^{-1}\,(E - A - C)\,(E - A - C)x]$
10. Probe: Es muss gelten $pS = \pi$. Ist $\pi = w\,[E - (A + C)] = l\,(E - A)^{-1}\,[E - (A + C)]$ und $p = w$, so wird $w\,S = w\,s\,\pi \;/\; w\,s = \pi$, oder umständlich eingesetzt $w\,S = [l\,(E - A)^{-1}\,(E - A - C)x\; l\,(E - A)^{-1}\,[E - (A + C)] / l\,(E - A)^{-1}\,[E - (A + C)x] =$ $= l\,(E - A)^{-1}\,[E - (A + C)] = \pi$. q.e.d.
11. Beispiel 2: Produktionspreise. Die Produktionspreise pp können, seitdem sie Marx definiert und in erster Näherung berechnet hat, in Übereinstimmung mit von

Bortkiewicz als Links-Eigenvektoren der Matrix (A + C) aufgefasst werden.

$$pp\ (A + C)\ (1 + r) = pp.$$

Der dazugehörige Eigenwert hat den Wert 1/(1+r). Seine Existenz ist genauso wie die gleichen Vorzeichen von pp durch das Perron-Frobenius-Theorem bei nichtnegativen Koeffizienten der Matrix (A + C) gesichert. (noch genauer zu belegen). Der (unit) Profit-Vektor ergibt sich aus: $\pi = pp - pp\ (A + C)$ unter Verwendung der Eigenvektorgleichung von oben als Vektor proportional zu den Produktionspreisen pp mit

$$\pi = r/(1+r)\ pp$$

Die Matrix S wird zu

$$S = r/(1+r)\ (E - A - C)x\ pp\ \ /\ [\ r/(1+r)\ pp\ x] =$$

$$= (E - A - C)\ x\ pp\ /\ (pp\ x) = s\ pp\ /\ (pp\ x)$$

Probe: $p\ S = \pi$? Mit $p = pp$ und $\pi = r/(1+r)\ pp$ wird
$p\ S = pp\ s\ pp\ /\ (pp\ x) = \pi$, da pp s die Profitmasse unter Produktionspreisen und pp x die gesamte Preissumme ist. Der Quotient der beiden ergibt bei einer Profitrate r, die sich auf die Produktionskosten bezieht, genau r/(1+r). Multipliziert mit pp sind das genau die branchenspezifischen Profite pro Outputeinheit, die untereinander gleich sind.

12. Beispiel 3: Emprische I-O Tabelle. Die Matrix A wird üblicherweise durch Division der einzelnen Spalten der Verflechtungsmatrix durch den jeweiligen Brutto-Produktionswert der Branche angenähert. Der Fehler, der dabei begangen wird, stammt aus der praktischen Unkenntnis, die Mengen und Preise der einzelnen Waren zu kennen, sondern nur die mehr oder weniger detaillierte Aggregate in Geldeinheiten (z.B. Millionen Euro). Das Prinzip des Fehlers lässt sich leicht aufweisen. Ist Z die empirische Verflechtungsmatrix, könnte sie im Idealfall durch

$$Z = \mathrm{diag}(p)\ A\ \mathrm{diag}(x)$$

beschrieben werden. Die tatsächlich errechnete Matrix $\bar{A}$, die A annähern soll, ist von A wie folgt verschieden:

$$\bar{A} = Z\ \mathrm{diag}(p)^{-1}\mathrm{diag}(x)^{-1} = \mathrm{diag}(p)\ A\ \mathrm{diag}(p)^{-1}$$

Dies bedeutet, dass die empirisch gewonnenen technischen Koeffizienten genau genommen vom Verhältnis der „wahren" relativen Preisen abhängen, also

$$\bar{a}_{ij} = p_i/p_j\ a_{ij}.$$

Für die Matrizen C und S gilt analoges.

C kann entweder auf den Konsumvektor, der den Konsum der Nicht-Lohnabhängigen mit einbezieht, oder nur auf den Konsum der Lohnabhängigen bezogen werden, indem nur der Anteil des Konsums, der von den Löhnen gekauft werden kann, berücksichtigt wird. Der Konsum der Nicht-Lohnabhängigen fällt dann auf der Verteilungsseite unter die Kategorie Nicht-Lohneinkommen. Da wir auf der empirischen Ebene einer wirklichen Volkswirtschaft die Mengen nicht kennen, können wir – um im Leontief-Schema zu bleiben - die „Stück"-Preise p mit 1 festlegen und die „Mengen" hypothetisch mit den Brutto-Produktionswerten identifizieren. Haben wir so die A und C Matrizen und auch noch die Arbeitskoeffizienten (Arbeitszeit bzw. Beschäftigte pro Brutto-Produktionswerteinheit) bestimmt, lässt sich unter Vernachlässigung des Außenhandels, der eine komplexere Behandlung benötigt, die S-Matrix berechnen.

$S(\text{empirisch}) = [\mathrm{diag}(p)\ s]\ [\pi\ \mathrm{diag}(x)]\ [\mathrm{diag}(x)^{-1}\ \mathrm{diag}(p)^{-1}]\ /\ [p\ s] \neq S = s\ \pi\ /\ p\ s$

S(empirisch) stimmt genauso wenig wie die empirisch gefundene Matrix A mit der theoretischen Matrix S überein. Der Unterschied liegt wie bei A in den Quotienten der relativen Preise

$$S(\text{empirisch}) = [\mathrm{diag}(p)\ s]\ [\pi\ \mathrm{diag}(x)]\ [\mathrm{diag}(x)^{-1}\ \mathrm{diag}(p)^{-1}]\ /\ [p\ s]$$
$$= \mathrm{diag}(p)\ S\ \mathrm{diag}(p)^{-1} \neq S$$

13. Weitere Überlegungen: Die hier angeführten Bespiele für S Matrizen stellen nur einige wenige von unendlich vielen Möglichkeiten dar. Eine weiterer Sonderfall wäre eine S-Matrix, die bei konstantem technischen Niveau ein gleichgewichtiges Wachstum g (in in diesem Fall gleich der Profitrate r) erlauben würde. Dieses Wachstum benötigt aber ein spezielles Preis- und Mengensystem, das den Links- bzw. Rechts-Eigenvektoren der Matrix (A+C) entsprechen würde, die einen Eigenwert in der Höhe von 1/(1+r) besitzt. Die Matrix S hätte dann die einfache Gestalt g(A + C). An einem Beispiel mit 5 Sektoren der österreichischen I-O Matrix ergäben sich folgende Veränderungen für die Brutto-Produtkionswerte bzw. Preisvektoren:

	Brutto-Produktion		relativer Preis	
	BPW 2003	x=(A+C+S)x	p = 1	p=p(A+C+S)
Land- u. Forstwirtschaft	7066	11660	1	0,830
Energieintensive Industrie	28561	50047	1	1,208
sonstige Industrie	85276	79840	1	1,166
Energieversorgung	14548	27069	1	1,470
Dienstleistungen	265281	225329	1	0,877

Die gleichgewichtige Wachstumsrate läge dann bei der (stolzen) Höhe von 36,7 Prozent. Natürlich sind grobe Vernachlässigungen und Vereinfachungen dafür verantwortlich, z.B. wird von der Existenz eines fixen Kapitalanteils abgesehen. Das ganze Mehrprodukt wird investiert. Die Kapitalisten konsumieren nichts etc.