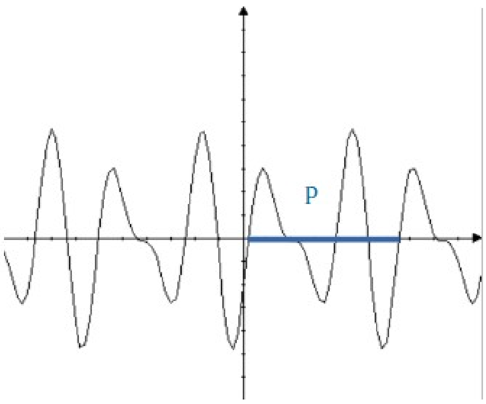
Fouriertransformation und QM

Manfred Hörz

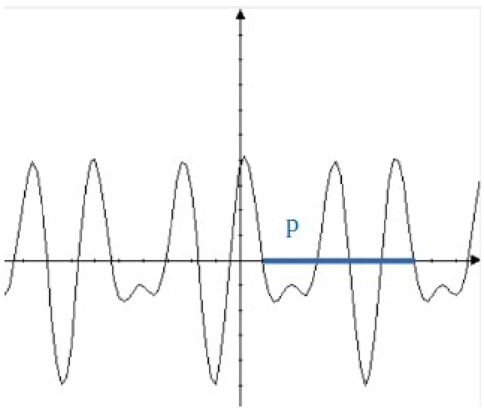
Der abendländische Geist seit spätestens Leukipp und Demokrit (in der Nachfolge von Parmenides) versucht, Komplexes auf Einfachstes, auf sozusagen Atomares zu reduzieren. So versucht man Funktionen durch einfache Monome zu approximieren, wie man auch durchgehend Gekrümmtes auf Lineares zu reduzieren versucht.
Die Taylorpolynome sind ein erfolgreiches Beispiel. So werden die transzendenten Funktionen, wie die Sinusfunktion oder die Exponentialfunktion durch algebraische Polynomfunktionen

genähert: $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}$ (hier um die Entwicklungsstelle 0) bzw. in unendliche Reihen dargestellt: $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, falls sie konvergieren (was hier in diesem Fall zutrifft).

Für periodische Funktionen entwickelte später Joseph Fourier die naheliegende Idee, diese Funktionen durch einfache periodische Funktionen wie die Sinus- oder Kosinusfunktionen zu approximieren. So ist beispielsweise die periodische Funktion f mit der Periode p:



durch $f(x)=2\sin(3x)+3\sin(2x-1)$ darstellbar. Die gleiche Methode mit Kosinus:

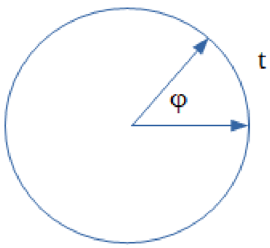


$f(x)=2\cos(3x)+3\cos(2x-1)$
In der Physik sind vorallem periodische Vorgänge interessant, also Funktionen, die von der Zeit abhängen.

Sei also die Funktion $f(t)=f(t+T)$ mit der zeitlichen Periode T, der Umlaufzeit, die ein Zyklus bedarf.

Analog zur üblichen Geschwindigkeit $v=\frac{s}{t}$ gemessen in Meter pro Sekunde, wird die **Winkelgeschwindigkeit** $\omega=\frac{\varphi}{t}$ gemessen in Winkelmaß (in Bogenmaß) pro Sekunde. Die Zeit für einen kompletten Umlauf $\varphi=2\pi$, die Umlaufzeit wird mit T bezeichnet. Also ist $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

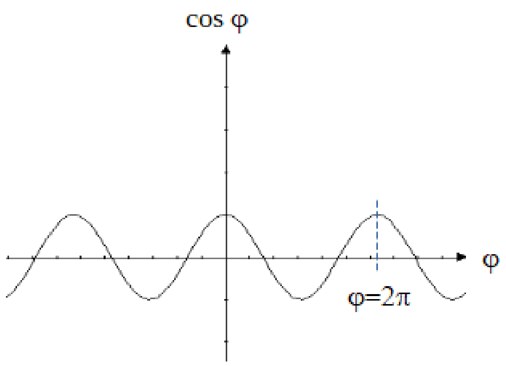
,

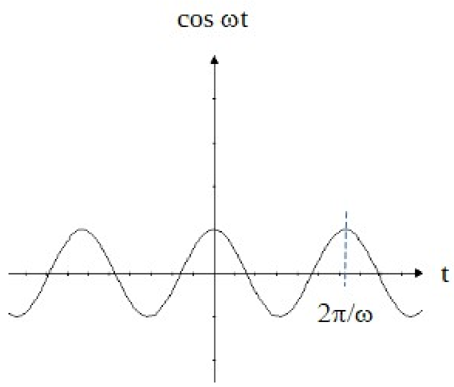


Die **Frequenz** ν dagegen gibt an, *wie viele* komplette Umläufe (Zyklen) pro Sekunde stattfinden, wie der Name ((zeitliche) Häufigkeit) bereits sagt.
Ihr Maß ist also Anzahl pro Sekunde, gemessen in Hertz (Hz).
Finden bspw. drei Zyklen pro Sekunde statt, ist die Frequenz also $\nu=3\,sec^{-1}=3\,Hz$, so ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega=3\cdot 2\pi\,sec^{-1}=2\pi\cdot 3\,sec^{-1}=2\pi\nu$. Es gilt also $\omega=2\pi\nu$.

Üblicherweise wird der Winkel des Kosinus in Bogenmaß φ gemessen. Also ist

$$\cos\varphi=\cos\omega t=\cos(2\pi\frac{t}{T}) \ .$$





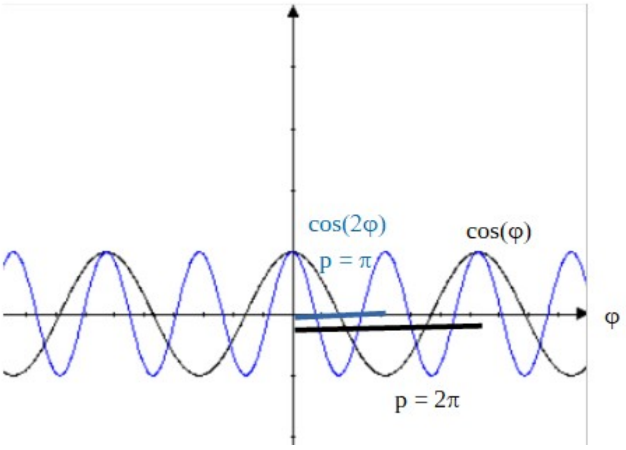
$\cos(\omega t)=\cos(\varphi)=\cos(\varphi+2\pi)=\cos(\omega(t+T))$ mit der Periode 2π bzw. T .

Geht man über zu $f(\varphi)=\cos(n\varphi)$, dann ist die Periode p mit $p=min\{a>0/f(\varphi+a)=f(\varphi)\}$

$$f(\varphi+p)=\cos(n(\varphi+p))=\cos(n\varphi+np)=f(\varphi) \quad \text{mit} \quad np=2\pi\Rightarrow p=\frac{2\pi}{n} \ .$$

Die Funktionen $\cos(n\varphi), n>1$ nennt man auch die **Oberschwingungen** zur Grundschwingung $\cos(\varphi)$: $\cos(2\varphi)$ die erste Oberschwingung, $\cos(3\varphi)$ die zweite Oberschwingung etc..

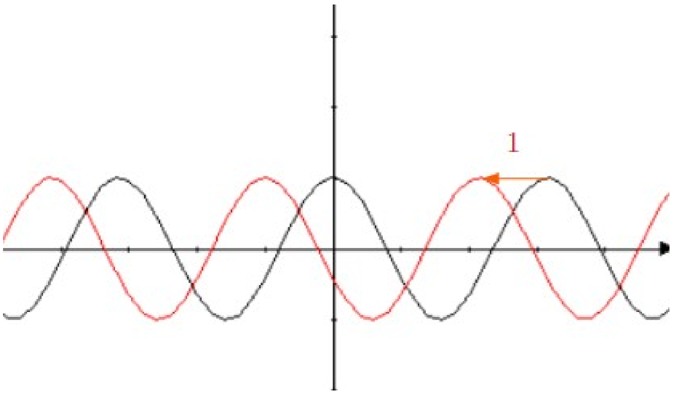
Oder in t formuliert, ist die Schwingungsdauer und Periode $T=\frac{2\pi}{n\omega}$ für $\cos(n\omega t)$, also auch ein n-tel.



Mit zusätzlicher Phasenverschiebung um $\frac{\varphi_n}{n}$ nach links der Funktion $\cos(n\varphi)$:

$$f(\varphi)=\cos(n\varphi) \overset{\varphi\Rightarrow\varphi+\frac{\varphi_n}{n}}{\Rightarrow} f(\varphi+\frac{\varphi_n}{n})=\cos(n(\varphi+\frac{\varphi_n}{n}))=\cos(n\varphi+\varphi_n)$$

Bsp: $f(\varphi)=\cos(2\varphi)\overset{\varphi\Rightarrow\varphi+1}{\Rightarrow}\cos(2\varphi+2)=\cos(2(\varphi+1))=f(\varphi+1)$



Die Funktionen $A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)$ haben eine Periode von $T_k=\frac{2\pi}{k\omega}=\frac{2\pi}{\omega_k}$ mit: $\omega_k:=k\omega$

$$A_k\cos(k\omega(t+\frac{2\pi}{k\omega})+\varphi_k)=A_k\cos(k\omega t+2\pi+\varphi_k)=A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)=A_k\cos(\omega_k t+\varphi_k)\quad .$$

und eine Frequenz von: $T=\frac{2\pi}{k\omega}\Rightarrow\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega_k}{2\pi}$

Eine Funktion mit $\varphi_0=0$

$$f_n(t)=A_0+A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(2\omega t+\varphi_2)+\ldots+A_n\cos(n\omega t+\varphi_n)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)$$ hat

eine gemeinsame Periode von $T=\frac{2\pi}{\omega}$:

$$f_n\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cos\left(k\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi_k\right)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cos(k\omega t+2\pi k+\varphi_k)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)=f_n(t)$$

$$\boxed{f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)}$$

Nach dem Additionstheorem $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$ kann der Kosinus zerlegt und die Phasenanteile isoliert werden:

$A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)=A_k\cos(k\omega t)\cos(\varphi_k)-A_k\sin(k\omega t)\sin(\varphi_k)$, demnach ist

$$f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{A_k\cos(\varphi_k)}_{a_k}\cos(k\omega t)-\underbrace{A_k\sin(\varphi_k)}_{b_k}\sin(k\omega t)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos(k\omega t)-b_k\sin(k\omega t)\quad .$$

Es gilt: $\cos(x)=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$ und $\sin(x)=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$ und daraus folgt für die Funktion f_n:

$$f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}\right)-\frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t}-e^{-ik\omega t}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2}(a_k+ib_k)e^{ik\omega t}+\frac{1}{2}(a_k-ib_k)e^{-ik\omega t}\right]\quad .$$

Wählt man folgende Abkürzungen: $c_k:=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)$ für $k\geq 0$ und $c_{-k}:=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$ für $k>0$, so vereinfacht sich der Funktionsterm zu:

$$\boxed{f_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\omega t}}$$

wobei $\frac{k\omega}{2\pi}=\frac{\omega_k}{2\pi}=\nu_k$ die verschiedenen Frequenzen der Exponentialschwingungen sind $e^{ik\omega t}$.
Die Amplituden c_k zu den Frequenzen ν_k nennt man das **Frequenzspektrum** von f_n.

Man kann hier nochmals die Periode $T=\frac{2\pi}{\omega}$ der Funktion f_n verifizieren:

$$f_n\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sum_k c_k e^{ik\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)}=\sum_k c_k e^{ik\omega t}\Big(\underbrace{e^{2\pi i}}_{1}\Big)^k=\sum_k c_k e^{ik\omega t}=f_n(t)$$

Fourier meinte, dass jede abschnittsweise stetige Funktion f der Periode $T=\frac{2\pi}{\omega}$ durch die sogenannte **Fourierreihe** $\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$ mit geeigneten Koeffizienten c_k, den sogenannten Fourier-Koeffizienten, darstellen lasse: $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ mit $c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$. Die Entwicklung der Funktion f in die Fourierreihe kann man verstehen als Zerlegung von f in die harmonischen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $k\omega=\omega_k$ der elementaren Sinus- bzw. Kosinusfunktionen oder auch der zusammenfassenden komplexen Exponentialfunktionen. Man nennt diese Zerlegung auch **Fourieranalyse**.

Du Bois-Reymond konnte allerdings (1876) eine stetige Funktion angeben, die sich so nicht darstellen lässt (er hatte die übliche trigonometrische äquivalente Darstellung gewählt).
In den meisten Fällen, aber liegt Konvergenz vor. Es konnten wichtige Sätze zur Konvergenz bewiesen werden (Dirichlet, Carleson, Fejér).

Beweis: Sei $V=\{\ f:\mathbb{R}/T\to\mathbb{C}, f(t+T)=f(t), T=\frac{2\pi}{\omega}\text{Periode}\ \}$ der Vektorraum

der T-periodischen Funktionen mit der hermiteschen Sesquilinearform (Skalarprodukt)

$$\langle f|g\rangle:=\frac{1}{T}\int_0^T f^*(t)g(t)dt \quad , \quad f,g\in V \quad \text{und} \quad \int_0^T |f(t)|^2 dt<\infty \quad .$$

Die Funktionen $e_k\in V$ mit $e_k(t)=e^{ik\omega t}$, $k\in\mathbb{Z}$ sind orthonormal.

$$\langle e_k|e_k\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T e^{-ik\omega t}e^{ik\omega t}dt=\frac{1}{T}[t]_0^T=1$$

$$k\neq l:\langle e_k|e_l\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T e^{-ik\omega t}e^{il\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega t(l-k)}dt=\frac{1}{i\omega(l-k)}\left[e^{i\omega t(l-k)}\right]_0^T=\frac{1}{i\omega(l-k)}\left(e^{i\omega(l-k)2\frac{\pi}{\omega}}-1\right)=$$
$$\frac{1}{i\omega(l-k)}\left(\left(\underbrace{e^{2\pi i}}_{1}\right)^{(l-k)}-1\right)=0$$

Die lineare Hülle H der l.u. Vektoren $|e_k\rangle$ bilden einen Untervektorraum von V.
Jede Funktion f aus H lässt sich also als LK darstellen: $f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}$.

Die Koeffizienten erhält man über das Skalarprodukt von f mit den Basisvektoren:

einerseits: $\langle e_k|f\rangle=\left\langle e_k\middle|\sum_l c_l e_l\right\rangle \overset{\text{linear im zweiten Glied}}{=} \sum_l c_l\langle e_k|e_l\rangle=c_k$

andrerseits: $\langle e_k|f\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$, also $c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$.

Das Bisherige betraf den diskreten Fall. Interessant für die QM sind aber auch nicht-periodische Funktionen. Das gelingt dadurch, dass man die Periode T gegen Unendlich streben lässt. Ungefähre Argumentation:

Mit $\omega=\frac{2\pi}{T}$ ist $f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\frac{2\pi k}{T} it}$. $e^{\frac{2\pi k}{T} it}$ $\frac{2\pi k}{T}=k\omega=:\omega_k$.

Für festes k gilt: $\lim_{T\to\infty} \omega_k=0$.

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\omega_k it}dt \overset{\text{partielle Integration}}{=} \frac{1}{2\pi ik}\int_0^T f'(t)e^{-\omega_k it}dt \underset{T\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\omega)d\omega \quad ,$$

wenn man die Frequenz ω im Grenzwert als kontinuierliche Variable für die diskreten Frequenzen ω_k setzt.

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\omega_k it}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F(\omega)d\omega e^{\omega it}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F(\omega)e^{\omega it}d\omega \quad .$$

Weiter ergibt sich $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\omega it}dt$, die **Fouriertransformierte F von f**.

Man nennt dann $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F(\omega)e^{\omega it}d\omega$ die (umgekehrte) Fouriertransformierte f von F.

In der Quantenmechanik gibt es einen eleganten Weg (natürlich wieder im Wesentlichen Dirac geschuldet) die beiden Fouriertransformierten der Wellenfunktion in der Ortsbasis bzw. der Impulsbasis herzuleiten.

Die Wellenfunktion $\psi(x)$ in der Ortsdarstellung lautet knapp: $\psi(x)=\langle x|\Psi\rangle$, wobei $|\Psi\rangle$ der Zustandsvektor ist.

Die Wellenfunktion $\tilde{\psi}(p)$ in der Impulsdarstellung ist: $\tilde{\psi}(p)=\langle p|\Psi\rangle$.

Da der Ortsoperator $\hat{X}$ und der Impulsoperator $\hat{P}$ beide hermitesch sind, bilden

$\{|x\rangle\}$ bzw. $\{|p\rangle\}$ eine ONBasis des entsprechenden Hilbertraums, sodass der Identitätsoperator

I sich darstellen lässt als $I=\int_{\mathbb{R}} |x\rangle\langle x|dx$ bzw. $I=\int_{\mathbb{R}} |p\rangle\langle p|dp$.

Die Eigenwertgleichung des Impulsoperators ist $\hat{P}\psi_p(x)=p\psi_p(x)$ oder da

$\hat{P}\psi_p(x)=-i\hbar\frac{d}{dx}\psi_p(x)$ ergibt sich die DG $-i\hbar\frac{d}{dx}\psi_p(x)=p\psi_p(x)$, deren normierte Lösung

$\psi_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{ip}{\hbar}x}=\langle x|p\rangle$ ist.

Setzt man nun den Identitätsoperator $I=\int_{\mathbb{R}} |x\rangle\langle x|dx$ in den rechten Term von $\tilde{\psi}(p)=\langle p|\Psi\rangle$ ein,

erhält man $\tilde{\psi}(p)=\langle p|I\,\Psi\rangle=\langle p|\int_{\mathbb{R}} |x\rangle\langle x|dx|\Psi\rangle=\int_{\mathbb{R}}\langle p|x\rangle\langle x|\Psi\rangle dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-ip}{\hbar}x}\psi(x)dx$, da

$\langle p|x\rangle = \langle x|p\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-ip}{\hbar}x}$ und $\langle x|\Psi\rangle = \psi(x)$, also $\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-ip}{\hbar}x} \psi(x) dx$.

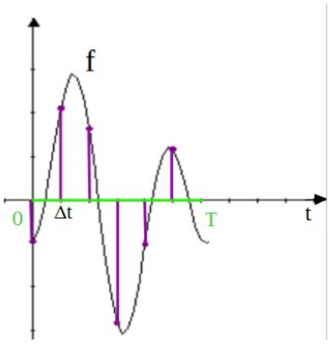
Analog erhält man $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{ip}{\hbar}x} \tilde{\psi}(p) dp$, die beiden Fouriertransformierten.

Vergleicht man das mit der oben angegebenen Transformierten $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ und setzt man $\hbar = 1$, so lautet $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(p) e^{ipx} dp$, und beide stimmen bis auf

Bezeichnungen $(\psi = f, \tilde{\psi} = F, \omega = p)$ überein.

Noch kurz zur diskreten Fourier-Transformation (DFT), die in der QFT (Quantenfeldtheorie) von Bedeutung ist.

Gegeben ist eine endliche Folge von Zahlen (bspw. Messwerten) $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.
Beispielweise soll ein Signal oder ein Ton[1], d.h. eine Funktion $f: [0, T] \to \mathbb{C}$ durch eine Folge x von Messwerten abgetastet werden, um das Frequenzspektrum von f zu bestimmen.



Das Intervall $[0, T]$ wird in n gleichgroße Zeitintervalle $\Delta t = \frac{T}{n}$ zerlegt und zu den Zeiten $t = 0, \frac{T}{n}, 2\frac{T}{n}, \ldots, (n-1)\frac{T}{n}$ werden Messungen gemacht, die die Messwerte $f(0) = x_0, f(\frac{T}{n}) = x_1, \ldots, f((n-1)\frac{T}{n}) = x_{n-1}$ ergeben. Die Abtastfrequenz ist also $\nu_a = \frac{n}{T}$.

Um das Frequenzspektrum zu bestimmen, unterstellt man, dass das Signal sich mit der Periode T nach $\mathbb{R}$ fortsetzt, um so die Fourierreihe $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ mit den Koeffizienten, den

Amplituden $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$ anwenden zu können.

Das Integral ist aber nicht berechenbar, da die Funktion f nicht gegeben ist, denn nur endlich viele Messwerte stehen zur Verfügung. Man muss das Integral also „verendlichen“, indem man es durch die entsprechende Riemann-Summe approximiert. Dazu werden folgende Ersetzungen vorgenommen:

1 Das kann von Interesse sein, wenn man ein Musikinstrument bzgl. seines typischen Frequenzspektrums synthetisieren will.

$dt \to \Delta t = \frac{T}{n}$ $\quad t \to \frac{j\cdot T}{n}$ $\quad \int\limits_0^T \to \sum_{j=0}^{n-1}$. Das ergibt $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt \to \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j\cdot T}{n}\right)e^{-ik\omega\frac{j\cdot T}{n}}\frac{T}{n}$

Weiter ist $f\left(\frac{j\cdot T}{n}\right)=x_j$ und $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Damit wird die Summe zu $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{\frac{-2\pi i}{n}kj}=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j z_n^{kj}=:\tilde{x}_k$ (*), der Amplitude des

Frequenzspektrums mit der n-ten Einheitswurzel $z_n:=z:=e^{\frac{-2\pi i}{n}}$

Die diskrete Fouriertransformierte des Vektors $x=(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$ ist $\tilde{x}=(\tilde{x}_0,\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{n-1})$.

Die Amplituden $\tilde{x}_k$ für k> n-1 sind periodisch: $\tilde{x}_{k+n}=\tilde{x}_k$, da $e^{\frac{-2\pi i}{n}(k+n)j}=e^{\frac{-2\pi i}{n}kj}\cdot\underbrace{e^{-2\pi ij}}_{1}$.

Die Gleichung $\tilde{x}_k=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z^{kj}x_j$ ist eine Multiplikation der Matrix $Z=(z^{kj})$ mit dem Vektor x :

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} z^{0\cdot 0} & \dots & z^{0\cdot k} & \dots & z^{0\cdot l} & \dots & z^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{k\cdot 0} & \dots & z^{k\cdot k} & \dots & z^{k\cdot l} & \dots & z^{k\cdot(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{l\cdot 0} & \dots & z^{l\cdot k} & \dots & z^{l\cdot l} & \dots & z^{l\cdot(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{(n-1)\cdot 0} & \dots & z^{(n-1)\cdot k} & \dots & z^{(n-1)\cdot l} & \dots & z^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_l \\ \vdots \\ x_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \vdots \\ \tilde{x}_k \\ \vdots \\ \tilde{x}_l \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1}\end{pmatrix}$$

, wobei die erste Zeile und die erste Spalte der Matrix aus lauter Einsen besteht (Exponent 0). Wenn die Matrix (die sogenannte Fourier-Matrix) invertierbar ist, kann man nach dem Vektor x auflösen und hat damit die inverse DFT.

In der Tat ist sie invertierbar und es gilt $Z^{-1}=\frac{1}{n}Z^*$:

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} (z^{0\cdot 0})^* & \dots & (z^{0\cdot k})^* & \dots & (z^{0\cdot l})^* & \dots & (z^{0\cdot(n-1)})^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^{k\cdot 0})^* & \dots & (z^{k\cdot k})^* & \dots & (z^{k\cdot l})^* & \dots & (z^{k\cdot(n-1)})^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^{l\cdot 0})^* & \dots & (z^{l\cdot k})^* & \dots & (z^{l\cdot l})^* & \dots & (z^{l\cdot(n-1)})^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^{(n-1)\cdot 0})^* & \dots & (z^{(n-1)\cdot k})^* & \dots & (z^{(n-1)\cdot l})^* & \dots & (z^{(n-1)\cdot(n-1)})^* \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z^{0\cdot 0} & \dots & z^{0\cdot k} & \dots & z^{0\cdot l} & \dots & z^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{k\cdot 0} & \dots & z^{k\cdot k} & \dots & z^{k\cdot l} & \dots & z^{k\cdot(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{l\cdot 0} & \dots & z^{l\cdot k} & \dots & z^{l\cdot l} & \dots & z^{l\cdot(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{(n-1)\cdot 0} & \dots & z^{(n-1)\cdot k} & \dots & z^{(n-1)\cdot l} & \dots & z^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}\overset{(**)}{=}$$

$$=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}=I$$

zu (**): zu zeigen bleibt, dass die Diagonaleinträge n ergeben und die anderen 0: ich multipliziere dazu die k-te Zeile der ersten Matrix mit der l-ten Spalte der zweiten (blau markiert):

$$\left(z^{k\cdot 0}\right)^*\cdot z^{0\cdot l}+\ldots+\left(z^{k\cdot k}\right)^*\cdot z^{k\cdot l}+\ldots+\left(z^{k\cdot l}\right)^*\cdot z^{l\cdot l}+\ldots+\left(z^{k\cdot(n-1)}\right)^*\cdot z^{(n-1)\cdot l}=$$

$$e^{\frac{2\pi i}{n}k\cdot 0}\cdot e^{\frac{-2\pi i}{n}0\cdot l}+\ldots+e^{\frac{2\pi i}{n}k\cdot k}\cdot e^{\frac{-2\pi i}{n}k\cdot l}+\ldots+e^{\frac{2\pi i}{n}k\cdot l}\cdot e^{\frac{-2\pi i}{n}l\cdot l}+\ldots+e^{\frac{2\pi i}{n}k\cdot(n-1)}\cdot e^{\frac{-2\pi i}{n}(n-1)\cdot l}\overset{\zeta:=e^{\frac{2\pi i}{n}}}{=}$$

$$\zeta^{(k-l)\cdot 0}+\ldots+\zeta^{(k-l)\cdot k}+\ldots+\zeta^{(k-l)\cdot l}+\ldots+\zeta^{(k-l)\cdot(n-1)}=\begin{cases}n & \text{für } k=l\\ 0 & \text{für } k\neq l\end{cases}$$. Der untere Teil ergibt sich über:

$$q:=\zeta^{k-l}\quad,\quad q^0+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}n(k-l)}-1}{\zeta^{k-l}-1}=\frac{e^{2\pi i(k-l)}-1}{\zeta^{k-l}-1}=\frac{1-1}{\zeta^{k-l}-1}=0$$, der Nenner ist nicht Null, da $\zeta^{k-l}=1\Leftrightarrow k-l=0$.

Demnach ist wegen $\tilde{x}_k=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}z^{kj}x_j$ oder $\tilde{x}=\frac{1}{n}Zx$: $x=nZ^{-1}\tilde{x}=n=\frac{n\cdot 1}{n}Z^*\tilde{x}$ oder

$x=Z^*\tilde{x}$ oder

$$\begin{pmatrix}\left(z^{0\cdot 0}\right)^* & \ldots & \left(z^{0\cdot k}\right)^* & \ldots & \left(z^{0\cdot l}\right)^* & \ldots & \left(z^{0\cdot(n-1)}\right)^*\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(z^{k\cdot 0}\right)^* & \ldots & \left(z^{k\cdot k}\right)^* & \ldots & \left(z^{k\cdot l}\right)^* & \ldots & \left(z^{k\cdot(n-1)}\right)^*\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(z^{j\cdot 0}\right)^* & \ldots & \left(z^{j\cdot k}\right)^* & \ldots & \left(z^{j\cdot l}\right)^* & \ldots & \left(z^{j\cdot(n-1)}\right)^*\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(z^{(n-1)\cdot 0}\right)^* & \ldots & \left(z^{(n-1)\cdot k}\right)^* & \ldots & \left(z^{(n-1)\cdot l}\right)^* & \ldots & \left(z^{(n-1)\cdot(n-1)}\right)^*\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{x}_0\\ \vdots\\ \tilde{x}_k\\ \vdots\\ \tilde{x}_j\\ \vdots\\ \tilde{x}_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_{n-1}\end{pmatrix}$$ bzw.

$$x_j=\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{x}_k e^{\frac{2\pi i}{n}jk}$$