

2.1 Zum Massenmittelpunkt (Schwerpunkt)

Konzept des Massenpunkts: gestattet einfache Formulierung der physikal. Gesetze.

Aber: in Natur: nur ausgedehnte Körper vorhanden. Hat es praktischen Sinn, Gesetze für Massenpunkt zu formulieren? (d.h. Bedeutung der Gesetze, die für den Massenpunkt gelten, bei Beschreibung ausgedehnter Körper?)

Sinnvoll, denn:

Für jeden Körper gibt es einen Punkt, in dem man sich die gesamte Masse des Körpers vereinigt denken kann und der dann die Gesetze der Mechanik für den Massenpunkt befolgt.

d.h.:

$$\vec{F} = 0 : v = \text{const}(\text{oder} = 0)$$

$$F \neq 0 : \vec{a}_{sp} = \frac{\vec{F}}{M_K} \quad \text{dabei auch Rot. des Körpers um Schwerpunkt möglich.}$$

An Körper im Schwerfeld der Erde veranschaulicht: wenn Körper in Schwerpunkt gelagert (d.h. Schwerpunkt=Drehachse), Körper dreht sich nicht, d.h. es wirkt dann kein resultierendes Drehmoment:

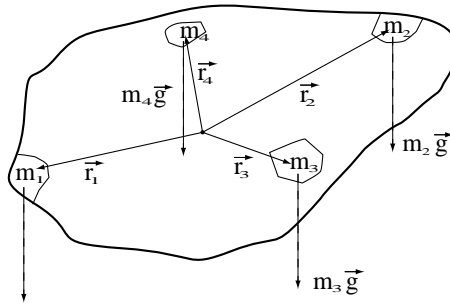
$$r_{sp}^{\vec{}} = 0,$$

$$\vec{M} = r_{sp}^{\vec{}} \times m_k \vec{g}$$

aber: auf einzelne Massenelemente des Körpers wirken sehr wohl Drehmomente: aber offensichtlich heben sich diese Drehmomente alle gegenseitig auf!

Dadurch ist also der Schwerpunkt definiert: $\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = 0$ mit $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$:

$$-g(\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{e}_z = 0$$



Möglichkeiten, diese Bedingung zu erfüllen:

- 1.) $\sum m_i \vec{r}_i = 0$
- 2.) $\sum m_i \vec{r}_i$ ist ein Vektor parallel zu \vec{e}_z , dies ist zwar in jeder Position für alle Punkte auf jeweils einer bestimmten Geraden parallel zu \vec{e}_z erfüllt, aber nur der Schnittpunkt aller dieser Geraden, die zu verschiedenen Positionen gehören, erfüllt die Bedingung für jede Position, und das ist gerade wieder der nach 1.) definierte Punkt, also der Schwerpunkt.

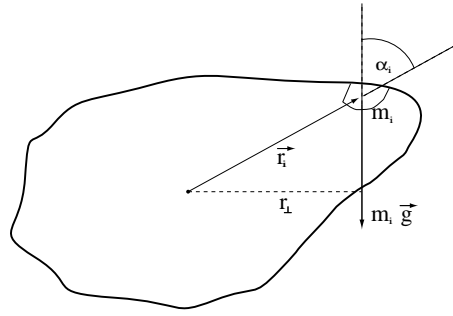
Anschaulich: Da \vec{g} ein konstanter Vektor ist, kann die Gleichung vereinfacht werden:

$$\sum r_i m_i g \sin \alpha_i (r_i, g) = 0$$

$$r_{\perp} = r_i \sin \alpha_i: \quad \text{Komponente von } r_i \perp \text{ zu } \vec{g}$$

$$\implies \sum r_i m_i \sin \alpha_i = 0 \quad \text{Wichtiger Gedanke:}$$

Wenn man den Körper jetzt dreht, bleibt er wieder



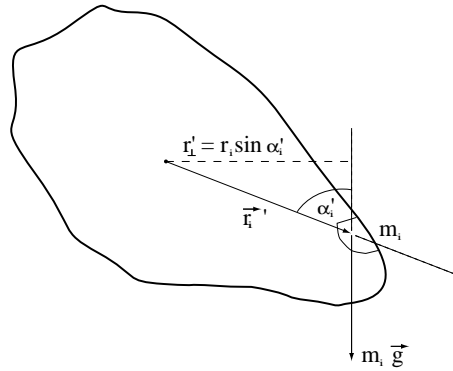
in Ruhe, sonst wäre ja die Bedingung für den Schwerpunkt ja nicht erfüllt.

Offensichtlich gilt:

$$\sum r_i m_i \sin \alpha_i = 0 \text{ für jede Lage, d.h. für alle}$$

Komponenten von $\vec{r}_i \implies$ es muß daher auch für die Vektoren \vec{r}_i gelten:

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0$$



Hier ist \vec{r}_i immer auf Schwerpunkt bezogen.

Falls nicht System endlich vieler

Punkte, sondern ausgedehnter, massiver Körper:

d.h. $i \rightarrow \infty$; $\sum \rightarrow \int$

$$\int \vec{r}(m) dm = 0$$

Der Schwerpunkt-Satz ("Körper entspricht Schwerpunkt mit m_k ") muß aber natürlich in jedem Koordinatensystem gelten, sonst bringt er nicht viel. Also:

$$\vec{r}_{sp} \times m_k \vec{g} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{g}$$

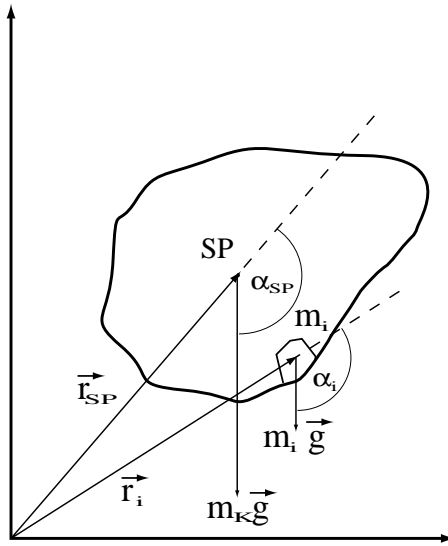
und mit der gleichen Argumentation wie oben:

$$-g(\vec{r}_{sp} m_k \times \vec{e}_z) = -g(\sum \vec{r}_i m_i \times \vec{e}_z)$$

$$\vec{r}_{sp} \cdot m_k = \sum \vec{r}_i m_i \longrightarrow \int r(m) dm$$

\implies

$$\vec{r}_{sp} = \frac{1}{m_k} \sum \vec{r}_i m_i \longrightarrow \frac{1}{m_k} \int \vec{r}(m) dm$$

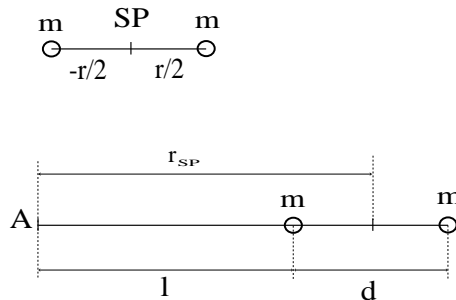


Hierzu ein einfaches Beispiel:
 Schwerpunkt zweier gleicher Massen im Abstand d liegt natürlich bei $d/2$ ($r=d$) von Schwerpunkt aus gesehen

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m_{ges}} \cdot \sum m_i \vec{r}_i = \frac{1}{2m} (m \cdot \frac{\vec{r}}{2} - m \cdot \frac{\vec{r}}{2}) = 0 \text{ wie gewünscht.}$$

In anderem Koordinatensystem:
 (da nur eine Richtung vorhanden, kann mit den Beträgen gearbeitet werden):

$$r_{sp} = \frac{1}{m_{ges}} \sum m_i r_i = \frac{1}{2m} (l \cdot m + (l + d) \cdot m) = \frac{2l+d}{2} = l + \frac{d}{2}, \text{ und da liegt er ja auch.}$$



Und jetzt vielleicht noch ein Übungsbeispiel:
Wo liegt der Schwerpunkt eines Kegels?

$$m_k \cdot z_s = \int_0^H z \cdot dm$$

jedes Scheibchen wird wieder durch seinen Schwerpunkt auf der z -Achse dargestellt.
 dm als Scheibchen gewählt, dann kann leicht integriert werden.

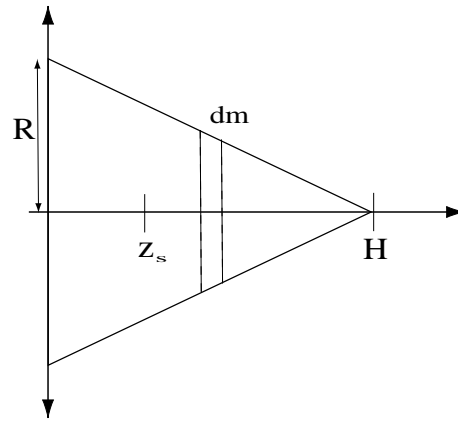
$$dm = r^2 \pi dz \cdot \rho = dV \cdot \rho, \text{ r durch z ausdrücken:}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-z} \rightarrow r^2 =$$

$$m_k z_s = \int \frac{\rho R^2}{H^2} (H-z)^2 \pi z dz$$

$$\frac{R^2 \pi H}{3} z_s = \frac{R^2 \pi}{H^2} \int_0^H (H^2 z - 2H z^2 + z^3) dz$$

$$z_s = \frac{3}{H^3} \left(\frac{H^2 z^2}{2} - \frac{2Hz^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^H = \frac{H}{4}$$



Jetzt nach diesem Muster ein Beispiel selber rechnen: $z_s = ? \left(\frac{3H}{4} \right)$