

Gekoppelte Pendel

Inhalt:

- Grundlagen/Durchführung
- Bestimmung Grundfrequenz
 - Bestimmung der 1. Fundamentalschwingung
 - Bestimmung der 2. Fundamentalschwingung
 - Bestimmung der Schwebung
- Auswertung der Schwingungen der Schwebung
- Fehlerdiskussion

Grundlagen

Ein Pendel führt bei kleiner Auslenkung harmonische Schwingen mit der Frequenz f_0 aus.

Werden zwei gleichartige Pendel miteinander gekoppelt, beeinflussen sie sich gegenseitig in ihrem Schwingungsverhalten. Eine Kopplung bei der Kraft proportional zur Differenz der Beiden Auslenkungen ist, läßt sich durch eine Schraubfeder oder näherungsweise durch eine kleine Masse in der Mitte eines Verbindungsfadens zwischen den Pendeln realisieren.

Besitzen die beiden Pendel die gleiche Grundfrequenz f_0 , dann lassen sich drei verschiedenen Schwingungsmuster (davon sind zwei die Grenzfälle des Schwingungsverhaltens) unterscheiden.

Die 1. Fundamentalschwingung (beide Pendel in die selbe Richtung ausgelenkt) und die 2. Fundamentalschwingung (beide Pendel in die entgegengesetzte Richtung

1. Fundamentalschwingung

Die Pendel werden mit gleicher Phase in Schwingung gebracht. Sie schwingen parallel zueinander – es wird also keine Energie übertragen und die Ausdehnung der Feder bleibt unverändert, unabhängig davon, wie stark die Kopplung ist. Damit ist die Frequenz der 1. Fundamentalschwingung gleich der Grundfrequenz: $f_1=f_0$

2. Fundamentalschwingung

Die Pendel werden im Gegentakt, also mit einer Phasendifferenz von 180° zum Schwingen gebracht. Sie schwingen synchron, aber mit höherer Frequenz und verkürzter Periodendauer $f_2 < f_1$. Somit findet eine gegenseitige Kraftübertragung statt, deren Maß von der Kopplungsstärke abhängt, die auch die Frequenz f_2 beeinflusst.

Schwebung

Es wird nur ein Pendel ausgelenkt, das andere wird in Ruhelage festgehalten- Nach gleichzeitigem Loslassen beider Pendel beginnt das anfangs ruhende Pendel immer stärker zu schwingen, während das andere allmählich ruhiger wird und kurz stehen bleibt. Anschließend beginnt der gleiche Prozess im umgekehrter Richtung, das erste Pendel kommt wieder in Bewegung, während das zweite ruhiger wird usw. Bei diesem ständigen Wechselspiel wird die gesamte Bewegungsenergie von einem auf das andere Pendel übertragen. Dieser Vorgang aus dem eine Schwingungskurve mit regelmäßig schwankender Amplitude resultiert, wird als Schwebung bezeichnet. Er entsteht immer dann, wenn zwei Schwingungen mit nur ein wenig unterschiedlicher Frequenz überlagert (=addiert) werden – in diesem Fall handelt es sich um die beiden Fundamentalschwingungen.

Schwebungsfrequenz f_s ist der Kehrwert der Schwebungsdauer T_s , das ist die Zeit zwischen zwei Schwebungsminima. Um so schwächer die Kopplung ist, um so länger dauert die Übertragung der Energie und um so kleiner wird die Schwebungsfrequenz.

Der Kopplungsgrad κ (kappa) kann aus den Periodendauern der zwei Fundamentalschwingungen berechnet werden, die Formel ist unter dem Punkt „Arbeitsformeln“ angegeben.

Die einzelnen Schwingungen aus der eine Schwebung zusammengesetzt ist können über ein aufwendiges Rechenverfahren, der sogenannten Fourier-Transformation, ermittelt werden.

Arbeitsformeln

Kopplungsgrad κ :

$$\kappa = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \quad \text{Einheitsprobe}(\kappa) = \frac{s^2 - s^2}{s^2 + s^2} = \frac{s^2}{s^2} = \text{dimensionslos}$$

T1: Periodendauer der 1. Fundamentalschwingung in Sekunden

T2: Periodendauer der 2. Fundamentalschwingung in Sekunden

Frequenz f:

$$f = 1/T$$

$$\text{Einheitsprobe}(f) = 1/s = \text{Hz}$$

Elongation: Weg-Zeit-Gesetz der harmonischen Schwingung

$$s(t) = s_m \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$\text{Einheitsprobe}(s(t)) = \text{cm} \cdot \sin(1/s \cdot s) = \text{cm}$$

s_m : maximale Auslenkung in cm

f: Frequenz in 1/s

Messgrößen

Periodendauer T in Sekunden

Signalspannung U_{mess} in Volt als Maß für die Auslenkung

Messgeräte

Allgemeine Geräte. Stative, Klemmen, Kabel

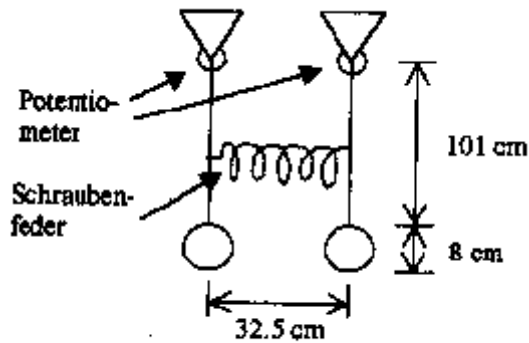
Versuchstypische Messgeräte:

- eine Stoppuhr: hanhart 1/10 sec.
- 2 Pendel mit je einem Potentiometer: PHY WE 02816.00 mit max. 20V und $R_{\text{amin}} 1M\Omega$
- ein PC-gesteuertes Digitalmultimeter: B3220 von Siemens
- Netzgerät: hp 6632A System, DC Power Supply, 0-20V/0-5A; 100W
- Personalcomputer
- IEC-Bus mit Kabel: europ. Norm 625

Messprotokoll

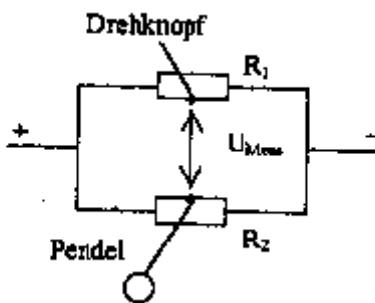
Durchführungserläuterungen:

Versuchsaufbau:
Gekoppelte Pendel



Jedes Pendel besteht aus einer Metallstange, an deren Aufhängung ein Potentiometer angebracht ist. Am unteren Ende sitzt ein Gewinde, auf das eine Holzscheibe aufgeschraubt ist. Das Gewinde ist so lang, dass hiermit die Höhe der Holzscheibe und damit die Länge des Pendels variiert werden kann. Die Pendel werden über eine Schraubenfeder miteinander verbunden.

Messprinzip der Potentiometer: die Brückenschaltung



2 Widerstände sind parallel geschaltet. An R2 ist das Pendel angeschlossen. Je nach Pendelstellung werden an R2 unterschiedliche Spannungen Abgegriffen. Mit dem Drehknopf an R1 wird der Nullpunkt festgelegt.

Durchführung:

Die Pendel wurden mit Klemmen im Abstand von 32,5 cm an 2 Stativen befestigt und zunächst mit Hilfe einer Stoppuhr die Schwingungsdauer der einzelnen Pendel gemessen. Das Pendel mit der kürzeren Schwingungsdauer wurde soweit verlängert, bis die Schwingungsdauer mit dem anderen Pendel übereingestimmt hat. Es wurden einmal pro Pendel jeweils 20 Schwingungen aufgenommen.

Als nächstes wurden die Pendel über eine Schraubenfeder miteinander verbunden. Sie wurden anschließend im gleichen Winkel nach einer Seite ausgelenkt und gleichzeitig losgelassen. Mit einer Stoppuhr wurde einmal die Schwingungsdauer der jetzt parallel schwingenden Pendel gemessen. Hiermit ist die 1. Fundamentalschwingung aufgenommen worden.

Für die Messung der 2. Fundamentalschwingung wurden die Pendel wieder um den gleichen Winkel, aber diesmal in entgegengesetzter Richtung (beide nach innen) ausgelenkt und dann gleichzeitig losgelassen – sie schwingen diesmal gegeneinander. Es wurde dreimal die für 20 Schwingungen benötigte Zeit gestoppt.

Als Drittes Schwingungsmuster wurden die Schwebung aufgenommen. Dazu wurde das eine Pendel in der senkrechten (Nulllage) festgehalten, während das andere nach innen ausgelenkt wurde. Es wurde darauf geachtet, dass die Feder nicht durchhängt, damit sofort eine Kraftübertragung stattfindet und eine harmonische Schwingung entsteht.

Diesmal wurde nicht nur die Schwingungsdauer gestoppt, sondern die Schwingung am PC aufgezeichnet. Dazu wurden die Potentiometer der Pendel an ein Netzgerät angeschlossen, das auf eine Spannung von 20 V eingestellt wurde (vset:20 V eintippen, bestätigen mit „enter“-Taste). Der Signalausgang der Potentiometer wurde mit dem Multimeter über einen IEC-Bus (Schnittstelle) an den PC angeschlossen. Dort musste die Adresse eingegeben werden, sie ist auf zwei kleinen Knöpfen an der Frontseite des Messgerätes abzulesen. Die Pfeilspitzen in der Mitte zeigen auf eine Zahl von 0 bis 9 die auf einen Kreis, rund um die Knöpfe herum, angeordnet sind. Das Messgerät der Gruppe hat die Adresse 22. Nach drücken von „reiset“ wurde die Spannung des ruhenden Pendels gemessen und am Drehknopf auf der Rückseite des Potentiometers auf 0 gestellt. Jetzt konnten die Einstellungen für die Messung angegeben werden.

Mode: Takt (Modus)
 Funktion: VDC(Gleichspannung)
 Range: 2V(Messbereich)
 Gluck/s: 0,33(Messungen pro Sekunde)
 Resolution: 41/2(4;Anzahl der Nachkommastellen, 1/2; Nullstele vor dem Komma)

Diese Werte wurden nach einigen kurzen Testmessungen ausgewählt.

Auswertung

- Messwerte und Berechnung

Messung mit der Stoppuhr

| Grundfrequenz der einzelnen Pendel | Rechter Pendel | Linker Pendel |
|------------------------------------|----------------|---------------|
| Anzahl der Schwingungen T: | 20 | 20 |
| Zeit in Sekunden : | 44 | 44 |
| Periodendauer in sec. : | 2,2 | 2,2 |

1. Fundamentalschwingung

| | |
|--------------------------------|--------------------|
| Anzahl der Schwingungen T: | 20 |
| Zeit t in Sekunden: | 44,0 |
| Periodendauer T ₁ : | 2,2 |
| Frequenz f ₁ : | 1/2,075 = 0,455 Hz |

2. Fundamentalschwingung

| | |
|--------------------------------|--------------------|
| Anzahl der Schwingungen T: | 20 |
| Zeit t in Sekunden: | 41,6 |
| Periodendauer T ₂ : | 2,08 |
| Frequenz f ₂ : | 1/1,993 = 0,481 Hz |

Kopplungsfaktor κ

$$\kappa = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}$$

$$\kappa = \frac{2,075^2 - 1,993^2}{2,075^2 + 1,993^2} = 0,056$$

- **Grafische Auswertung der simulierten Schwebung**; siehe beigefügtes Diagramm Es wurden jeweils 500 Messpunkte mit einem Abtastintervall von 0,33 Sekunden aus den folgenden Formeln berechnet:

$$S(t) = 30 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 0,455 \cdot t)$$

$$S(t) = 30 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 0,481 \cdot t)$$

- Aus dem Amplitudenspektrum ermittelte Frequenzen Fundamentalschwingungen
Es wurden mit dem Multimeter 500 Messwerte aufgenommen, für die Fourier-Transformation werden aber 512 Werte benötigt, weshalb am Anfang und Ende dem Datensatz jeweils sechs Nullen hinzugeführt wurden (siehe Amplitudenspektrum). Das Signal wurde an den Ränder abgeschwächt (siehe gefensteretes Amplitudenspektrum). Nach dieser sogenannten „Fensterung“ wurde das Frequenzspektrum mit 256 Spektrallinien und dem Offset (0. Spektrallinie) berechnet. Daraus wurden die Frequenzen ermittelt (siehe frequenzspektrum der 2. Fundamentalschwingung)

Abtastwerte: 512

Abtastintervall: 0,33s

Abtastfrequenz: 3,0 Hz

Spektrallinien: 25, sie erreichen Abtastfrequenz

Abstand zweier Spektrallinien, 1,5 Hz/256 = 0.00586 Hz

Maximale Elongation (Amplitude) der 1. Fundamentalschwinhung: die 76ste Linie

$$f_1 = 0,00586 \text{ Hz} \cdot 76 = 0,445 \text{ Hz}$$

Maximale Elongation (Amplitude) der 2. Fundamentalschwinhung: die 81ste Linie

$$f_2 = 0,00586 \text{ Hz} \cdot 81 = 0,475 \text{ Hz}$$

Zusammenfassung der Werte

| Ermittlungsmethode | Messung mit Stoppuhr | Frequenzspektrum |
|-------------------------------|----------------------|------------------|
| Frequenz f ₁ in Hz | 0,455 | 0,445 |
| Frequenz f ₂ in Hz | 0,481 | 0,475 |

Fehlerdiskussion

Ermittlung des Fehlers jeder Größe der Arbeitsformel

Die Gerätegenauigkeit der Stoppuhr beträgt 0,1 Sekunden, die Schwankung der Reaktionszeit zum Stoppen wird ebenfalls auf 0,1 Sekunden geschätzt, so dass die Reproduzierbarkeit der Werte für die Periodendauer sich jeweils auf 0,2 Sekunden addiert.

Über die Genauigkeit der Bestimmung von Periodendauer bzw. Frequenz mittels Fourieranalyse einer Schwebung kann keine Aussage gemacht werden, da hierzu mehrere Messungen erforderlich wären, in diesem Fall aber nur eine vorliegt. Deshalb ist auch kein sinnvoller Vergleich der Ergebnisse möglich.

Fehlerfortpflanzung

$$\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \frac{2 * \left(\frac{\Delta T}{T_1}\right) * \Delta T + 2 * \left(\frac{\Delta T}{T_2}\right) * \Delta T}{T_1^2 - T_2^2} + \frac{2 * \left(\frac{\Delta T}{T_1}\right) * \Delta T + 2 * \left(\frac{\Delta T}{T_2}\right) * \Delta T}{T_1^2 - T_2^2}$$

Fehlerdiskussion

Beim Schwingen wird ein Teil der kinetischen Energie des Pendels durch Reibungskräfte (z.B. Luftwiderstand oder Reibung an der Aufhängung) permanent in Wärme umgewandelt und geht damit als Schwingungsenergie verloren. Als Folge sinkt ständig die Amplitude und die Schwingung ist nicht wirklich harmonisch, sondern gedämpft. Eine größere Fehlerquelle ist, das Pendel zu weit auszulenken – eine reine Sinus-Schwingung kommt nur bei relativ kleinen Winkeln zustande. Bei gekoppelten Pendeln stellt die Schraubenfeder selbst eine Störung dar; sie erwärmt sich mit der Zeit durch Spannen und Entspannen (außer bei der 1. Fundamentalschwingung – konstante Kraft) und ändert damit ihre Federkonstante, wobei die Effekte schätzungsweise nur sehr gering sein dürften. Zusätzlich darf sie nicht durchhängen und generell nicht zu „lasch“ sein – die dadurch verursachten Fehler wären sehr groß, sind aber vermeidbar, ebenso wie die zu große Auslenkung. Reibungskräfte sind dagegen nicht zu umgehen, die Aufhängung sollte optimiert sein, um zumindest diesen Widerstand möglichst gering zu halten. Die größten Fehler werden also durch den „User“ verursacht und können somit auch von ihm selbst durch Sorgfalt und mehrere Messungen minimiert werden.