

---

# FRAKTALDIMENSION VON GRAUWERTBILDERN

Studienarbeit

von Martin Reuter

am

Institut für Informatik der Universität Hannover  
Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung  
Prof. Dr. Franz-Erich Wolter

Juli 1999

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Fraktaldimension . . . . .	3
2.1.1	Verständnis . . . . .	3
2.1.2	Rauheit . . . . .	4
2.2	Grauwertbilder . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Verfahren zur Dimensionsberechnung</b>	<b>8</b>
3.1	Kapazitätsdimension . . . . .	8
3.2	Informationsdimension . . . . .	12
3.3	Korrelationsdimension . . . . .	14
3.4	Punktdimension . . . . .	15
3.5	Wahrscheinlichkeitsdimension . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Verfahren in der Praxis</b>	<b>18</b>
4.1	Programm FDim . . . . .	18
4.2	Laufzeitverhalten der Verfahren . . . . .	18
4.3	Güte der Verfahren . . . . .	19
4.4	Zusammenhang einiger Verfahren . . . . .	22
4.5	Monotonie der Verfahren . . . . .	23
4.6	Schlussbemerkungen . . . . .	25

# 1 Einleitung

In der Natur gibt es viele rauhe, unregelmäßige Gebilde wie z.B. Bäume, Wolken, Blitze oder Küstenlinien. Sie sind keinesfalls als einfache geometrische Figuren zu beschreiben, sondern stellen ein völlig anderes Niveau der Geometrie dar. Mandelbrot [7] hat als erster eine neue Geometrie der Natur entwickelt. Mit Hilfe einer Familie von skaleninvarianten Figuren, die er Fraktale nennt, lassen sich die unregelmäßigen und zersplitterten Formen der Natur beschreiben.

Fraktale besitzen unabhängig von ihrer Vergrößerung denselben Grad an Irregularität. Dieser läßt sich messen und ermöglicht es, von einer Fraktaldimension zu sprechen. Die Fraktaldimension stellt ein gutes Maß für die Zersplitterung bzw. Rauheit von Objekten und Texturen dar. Man kann diese Eigenschaft auf Grauwertbilder übertragen und erhält so ein grobes Maß für die Rauheit der abgebildeten Textur.

Diese Arbeit stellt verschiedene Verfahren zur Berechnung der Fraktaldimension vor. Außerdem wird versucht, einige Verfahren zu vergleichen, um Grauwertbilder bezüglich ihrer Rauheit möglichst gut zu klassifizieren.

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Begriffe erklärt. Außerdem soll die Möglichkeit aufgezeigt werden, Aussagen über die Geometrie eines Objektes nur mit Hilfe eines Grauwertbildes zu treffen.

### 2.1 Fraktaldimension

#### 2.1.1 Verständnis

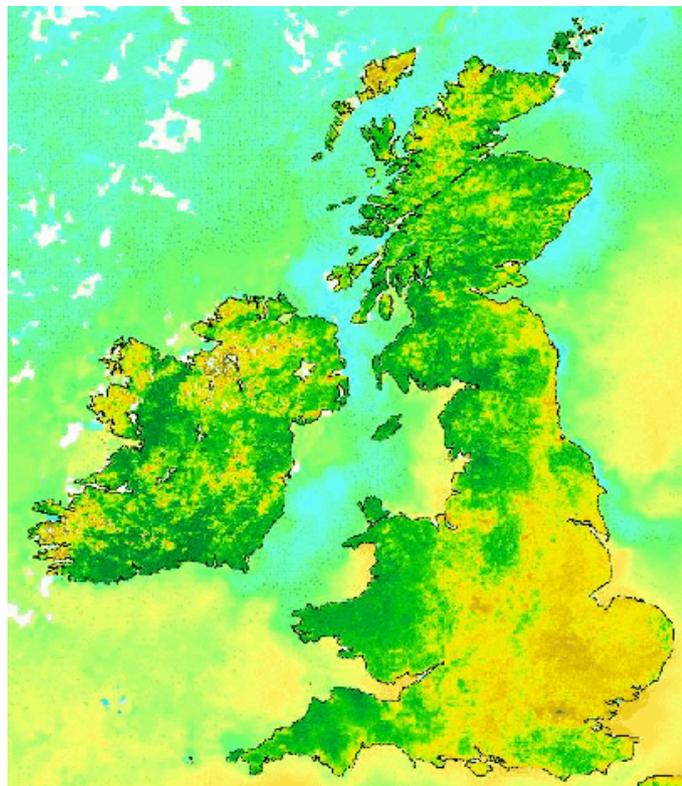


Abbildung 1: Die Küstenlinie von Großbritannien und Irland

Das wohl bekannteste Beispiel für natürlich auftretende Fraktale ist eine Küstenlinie. Sie besteht aus vielen Buchten und Landzungen. Diese Charakteristik der Kurve bleibt auf verschiedenen Skalierungsstufen bestehen. Es wird dadurch unmöglich, die Länge der Küste zu bestimmen. Die gemessene Länge hängt von der Länge  $\lambda$  des Maßstabes ab, da sämtliche kleineren Unregelmäßigkeiten bei der Längenmessung unberücksichtigt bleiben. Um die Länge der eindimensionalen Küstenlinie zu bestimmen, müßte die Maßstablänge  $\lambda$  gegen Null laufen. Dies ist in der Realität sicherlich nicht möglich.

Ähnlich wie bei der Küstenlinie verhält es sich mit der Fläche einer Insel. Um diese zu messen, wird sie mit Quadraten des Flächeninhaltes  $\lambda^2$  überdeckt. Die gemessene Fläche hängt von der Seitenlänge  $\lambda$  ab. Es ist also nicht möglich, für verschiedene Auflösungsstufen konsistente Ergebnisse zu bekommen. Nimmt man aber in diesen Beispielen für den Maßstab  $\lambda$  den Exponenten 1.2 anstelle von 1 bzw. 2.1 anstelle von 2, so wird die gemessene Länge oder Fläche unabhängig von der Länge des Maßstabes konstant bleiben. Diesen Exponenten bezeichnet man als die **Fraktaldimension** eines Objektes. In Kapitel 3 werden verschiedene Verfahren zur Berechnung der Fraktaldimension vorgestellt.

Moon [8] veranschaulicht die Fraktaldimension auf eine andere Weise: Die Fraktaldimension ist eine quantitative Eigenschaft einer Menge von Punkten in einem  $n$ -dimensionalen Raum, die angibt, in welchem Ausmaß diese Punkte einen Unterraum füllen, wenn ihre Anzahl sehr groß wird. Die Fraktaldimension gibt z.B. an, wie 2-dimensional eine 1-dimensionale Küstenlinie ist. Es ist leicht ersichtlich, daß eine Fläche mit einer hohen Fraktaldimension sehr zerklüftet sein muß. Sie muß viele Spitzen und Täler besitzen, um den 3-dimensionalen Raum möglichst gut zu füllen. Ein Papierknäuel z.B. erscheint dreidimensional, da es nahe genug an das Volumen einer Kugel herankommt.

### 2.1.2 Rauheit

Es lohnt sich, noch etwas genauer auf den Zusammenhang zwischen der Fraktaldimension und dem menschlichen Gefühl für Rauheit einzugehen. Eine Fläche mit einer hohen Fraktaldimension hat viele Spitzen und Täler. Eine niedrige Fraktaldimension bedeutet hingegen, daß die Fläche eher einer Ebene gleicht.

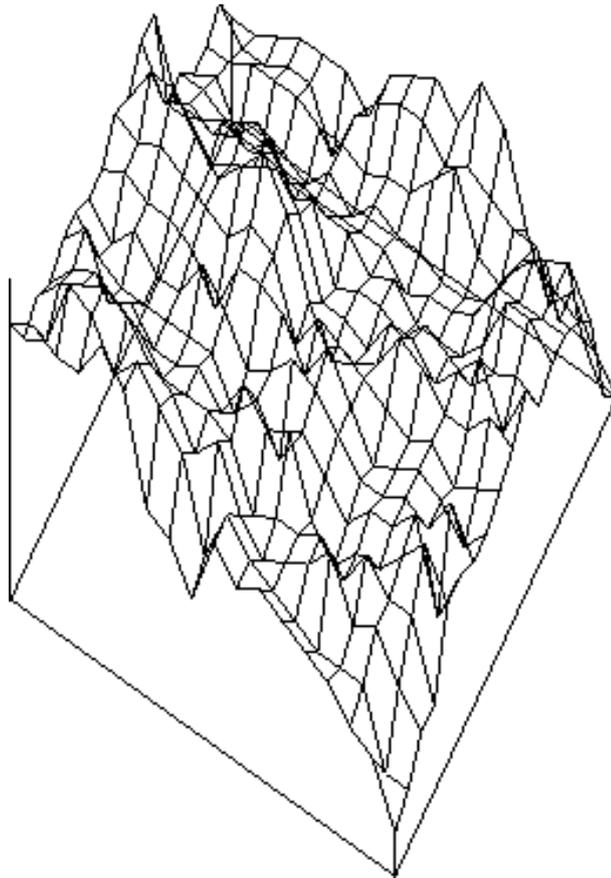


Abbildung 2: Fläche mit mittlerer Fraktaldimension

Pentland [9] ließ bei einer Befragung fraktale Flächen visuell nach ihrer Rauheit bewerten. Die Ergebnisse hatten einen nahezu perfekten Zusammenhang (Korrelation von 0.98) mit der Fraktaldimension der Flächen. Die Fraktaldimension ist also ein hervorragendes Maß für die menschliche Auffassung von Rauheit bei Flächen.

Weiterhin ist interessant, daß sich diese Eigenschaft auf Grauwertbilder übertragen läßt. Pentland [9] hat bewiesen, daß ein enger Zusammenhang zwischen der Fraktaldimension eines Grauwertbildes und der Geometrie des abgebildeten Objektes besteht („Fractal Imaging Theorem“). Die Rauheit der Oberfläche spiegelt sich im Grauwert des Bildes wieder. Es lassen sich also anhand der Fraktaldimension eines Bildes näherungsweise Aussagen darüber treffen, wie glatt oder rau die Geometrie des abgebildeten Objektes ist.

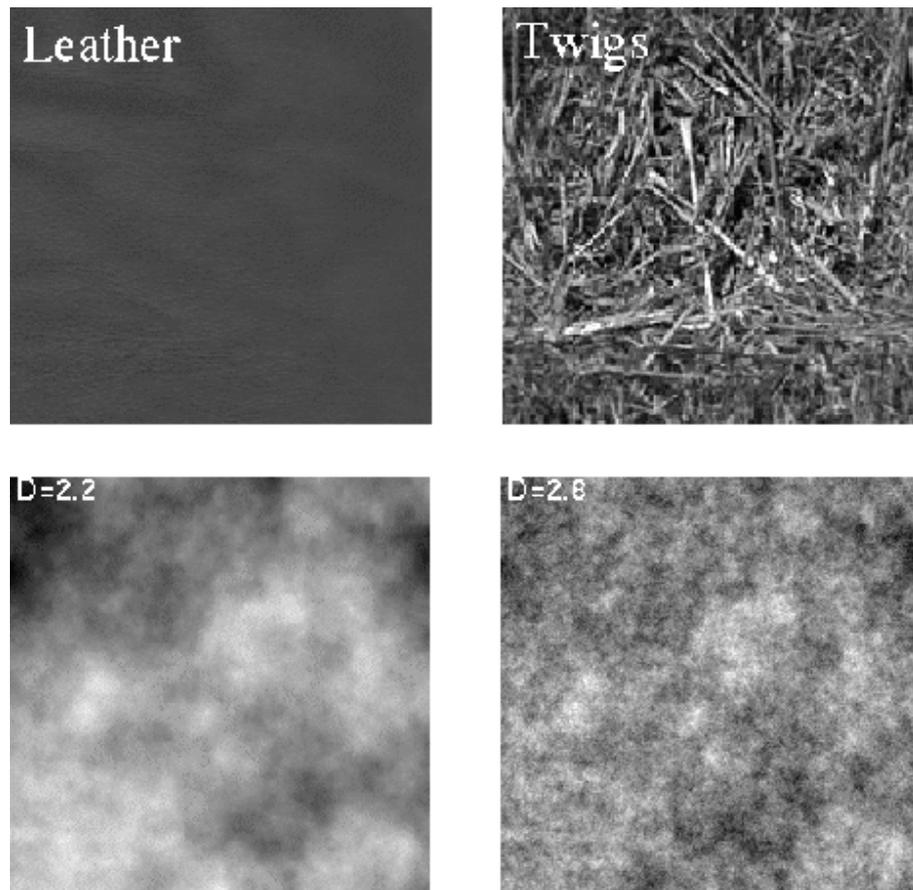


Abbildung 3: Texturen und künstliche Grauwertbilder

Im Gegensatz zu den oben erwähnten abstrakten Flächen hat Pentland [9] in einer weiteren Befragung Grauwertbilder von Texturen bezüglich ihrer Rauheit einstufen lassen. Außerdem wurde die Fraktaldimension der Bilder berechnet (hierzu werden im nächsten Kapitel verschiedene Verfahren vorgestellt). Es ergab sich ein enger Zusammenhang (Korrelation von 0.91) zwischen den geschätzten Werten und der berechneten Fraktaldimension. Diese Befragung untermauert also das „Fractal Imaging Theorem“, das die Bestimmung der Rauheit einer Textur anhand ihres Grauwertbildes erst möglich macht.

## 2.2 Grauwertbilder

Da sämtliche Verfahren zur Berechnung der Fraktaldimension auf Grauwertbilder angewendet werden, soll im Folgenden die nötige Grundlage auf einer mathematischen Basis eingeführt werden.

Es seien  $I, J, P \subset \mathbb{N}$  halboffene Intervalle zwischen 0 und einem Maximalwert  $I_{max}, J_{max}$  und  $P_{max}$  (bei den behandelten Grauwertbildern ist  $P_{max} = 256$ ).

**Definition 2.2.1**

Ein **Grauwertbild** ist eine Funktion  $f$ , die auf einer Menge von Bildpunkten definiert ist und einem **Bildpunkt**  $(x, y)$  einen **Bildwert (oder Grauwert)**  $f(x, y)$  zuordnet:

$$f_{Bild} : \begin{cases} I \times J & \rightarrow P \\ (x, y) & \mapsto p \end{cases}$$

$x$  und  $y$  werden als **Koordinaten** eines Bildpunktes bezeichnet. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der oberen linken Ecke des Bildes. Die Koordinatenwerte wachsen entlang der Bildkanten.

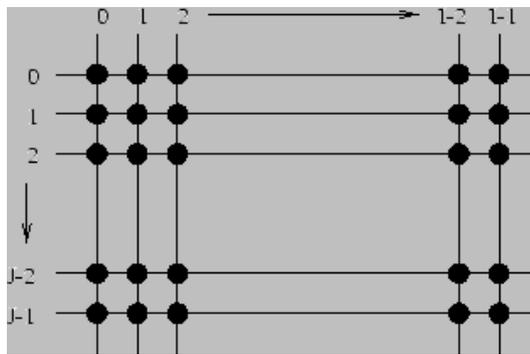


Abbildung 4: Koordinaten in einem Bild

**Definition 2.2.2**

Das Tripel  $(x, y, f_{Bild}(x, y))$  wird als **Pixel** (Kurzform von „picture element“) bezeichnet. Weiterhin sei  $S := \{(x, y, f_{Bild}(x, y)) : x \in I, y \in J\}$  die Menge aller Pixel des Bildes. Somit ergibt sich  $\|S\| = \|I\| \cdot \|J\|$  als Anzahl der Pixel im Bild.

## 3 Verfahren zur Dimensionsberechnung

In diesem Kapitel sollen verschiedene Verfahren zur Berechnung der Fraktaldimension von Grauwertbildern vorgestellt werden. Grauwertbilder sind eigentlich keine echten Fraktale. Sie sind endliche Mengen, und haben daher nur eine endliche Auflösung. Sämtliche Verfahren berechnen die Fraktaldimension nur näherungsweise. Sie haben alle gemeinsam, daß sie auf verschiedenen Skalierungsstufen Messungen durchführen und über eine Ausgleichsrechnung den Wert für die Fraktaldimension konstruieren.

### 3.1 Kapazitätsdimension

Angenommen, eine Strecke soll mit Quadraten einer bestimmten Seitenlänge überdeckt werden. Sei  $N$  die Anzahl der benötigten Quadrate. Es ist leicht zu sehen, daß bei einer Halbierung der Seitenlänge genau doppelt so viele Quadrate benötigt werden. Also ist bei eindimensionalen Objekten die Anzahl der benötigten Quadrate umgekehrt proportional zu ihrer Seitenlänge:

$$N(\lambda) = \frac{k}{\lambda}$$

wobei  $\lambda$  die Seitenlänge des Quadrates,  $N(\lambda)$  die Anzahl der Quadrate, die zur Überdeckung benötigt werden, und  $k$  eine Konstante ist. Die Konstante  $k$  hängt von der Länge der Linie ab. Skaliert man die Linie auf die Einheitslänge, so ist  $k = 1$  und verschwindet aus der Gleichung.

Es sei nun angenommen, daß ein Blatt Papier mit kleinen Quadraten oder Würfeln überdeckt werden soll. Es werden viermal so viele Quadrate der halben Seitenlänge benötigt, um ein großes Quadrat zu überdecken.  $N(\lambda)$  verhält sich wie folgt:

$$N(\lambda) = \frac{k}{\lambda^2}$$

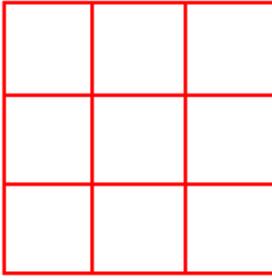
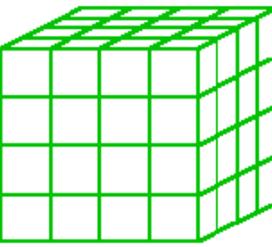
	$\frac{1}{\lambda}$	$N$	$N=\lambda^{-D_c}$
 <b>Linie</b>	5	5	$5^1$
 <b>Quadrat</b>	3	9	$3^2$
 <b>Würfel</b>	4	64	$4^3$

Abbildung 5: Beispiele einer Überdeckung

Diese Überlegungen lassen sich analog bei einem Würfel durchführen. Der Exponent von  $\lambda$  gibt in den drei Fällen die Dimension der Objekte an. Sei nun  $D$  der Exponent von  $\lambda$  so ergibt sich  $N(\lambda)$  zu:

$$N(\lambda) = \frac{k}{\lambda^D}$$

Löst man jetzt nach  $D$  auf, erhält man:

$$D = \frac{\log k - \log N(\lambda)}{\log \lambda}$$

Da diese Gleichung für alle  $\lambda$  erfüllt ist, kann man den Grenzwert für  $\lambda \rightarrow 0$  betrachten und eliminiert auf diese Weise den konstanten Teil. Sei nun die Kapazitätsdimension durch diesen Grenzwert definiert:

**Definition 3.1.1**

Kapazitätsdimension:

$$D_c := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log k - \log N(\lambda)}{\log(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\log N(\lambda)}{\log \lambda}$$

$D_c$  ist nicht immer eine natürliche Zahl, so wie es die ersten drei Beispiele vermuten lassen. Aufgrund der rekursiven Definition der Cantor-Menge und des Sierpinski-Dreiecks läßt sich die Fraktaldimension dieser Mengen direkt hinschreiben.

	$D_T$	$\frac{1}{\lambda}$	$N$	$D_c = \frac{-\log N}{\log \lambda}$
 <b>Cantor Menge</b>	0	3	2	0.63
 <b>Sierpinski Dreieck</b>	1	2	3	1.58

Abbildung 6: Überdeckung bei Cantor und Sierpinski

Das Beispiel einer Überdeckung bei der Cantor-Menge soll veranschaulichen, daß die Fraktaldimension kleiner als 1 sein kann. Die Cantor-Menge entsteht durch wiederholtes Entfernen des mittleren Teils einer dreigeteilten Linie. Die Linienstücke verschwinden in einer Limesbetrachtung und werden durch unendlich viele Punkte repräsentiert. Die Menge hat eine Länge von 0 aber eine Fraktaldimension von  $D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63$  da bei einer Drittelung von  $\lambda$  die doppelte Anzahl Quadrate zur Überdeckung benötigt werden. Der Dimensionswert weist darauf hin, daß diese Menge mehr als einen Punkt (mit der Dimension 0), aber weniger als eine Linie (mit der Dimension 1) darstellt (siehe Kauer [4]).

Beim Sierpinski-Dreieck verläuft diese Überlegung analog. Bei der Halbierung der Seitenlänge wird die dreifache Anzahl an Quadraten (bzw. Dreiecken) benötigt. Es ergibt sich die Fraktaldimension zu  $D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58$ . Man sieht an diesem Beispiel, daß die Wahl der zur Überdeckung benutzten „Formen“ bei der Berechnung unwesentlich ist.

Um  $D_c$  für eine **endliche** Punktmenge  $S$  zu berechnen, muß erst eine weitere Überlegung durchgeführt werden. Aufgrund der Endlichkeit der Menge läßt sich der Grenzwert für  $\lambda \rightarrow 0$  nicht mehr betrachten. Bei hinreichend kleinem  $\lambda$  entspricht  $N(\lambda)$  dem Wert  $\|S\|$ , der Anzahl aller Punkte. Somit ergibt sich obiger Grenzwert zu:

$$D_c = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\log \|S\|}{\log \lambda} = 0$$

Daher lassen sich nur auf einigen Auflösungsstufen Messungen durchführen. Im Idealfall ist das Verhältnis von  $\log N(\lambda)$  zu  $\log \lambda$  skaleninvariant, bei einer beliebigen endlichen Menge kann man davon nicht ausgehen. Der Wert für  $D_c$  läßt sich allerdings über

eine Ausgleichsrechnung konstruieren. Es wird eine Ausgleichsgerade durch die Punkte  $(X, Y) := (\log \frac{1}{\lambda}, \log N(\lambda))$  gelegt. Die negative Steigung dieser Gerade ist eine Näherung für  $D_c$ :

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \frac{k}{\lambda^{D_c}} \\ \Leftrightarrow \log N(\lambda) &= -D_c \log \frac{1}{\lambda} + \log k \\ \Leftrightarrow Y &= -D_c X + \text{const} \end{aligned}$$

Wie man sieht, bewirkt die Konstante  $k$  eine Verschiebung der Geraden. Da  $k$  also die Berechnung von  $D_c$  nicht beeinflusst, ist eine Normierung von  $\lambda$  unnötig.

Im folgenden Beispiel werden auf drei verschiedenen Skalierungsstufen Überdeckungen einer Punktmenge durchgeführt. Da es sehr schwierig ist, eine minimale Überdeckung zu finden, wird häufig (wie auch in diesem Beispiel) ein Gitter aus Quadraten über die Menge gelegt. Es werden die Quadrate gezählt, die wenigstens einen Punkt der Menge enthalten. Schließlich werden die Ergebnisse auf einer logarithmischen Skala eingetragen und die Ausgleichsgerade gezeichnet. Die negative Steigung der Geraden liefert in diesem Beispiel eine Kapazitätsdimension von 1.77. Bei einem Grauwertbild läuft dieses Verfahren analog, da es sich wiederum um eine Punktmenge handelt. Im dreidimensionalen Raum wird man statt der Quadrate zur Überdeckung Würfel benutzen.

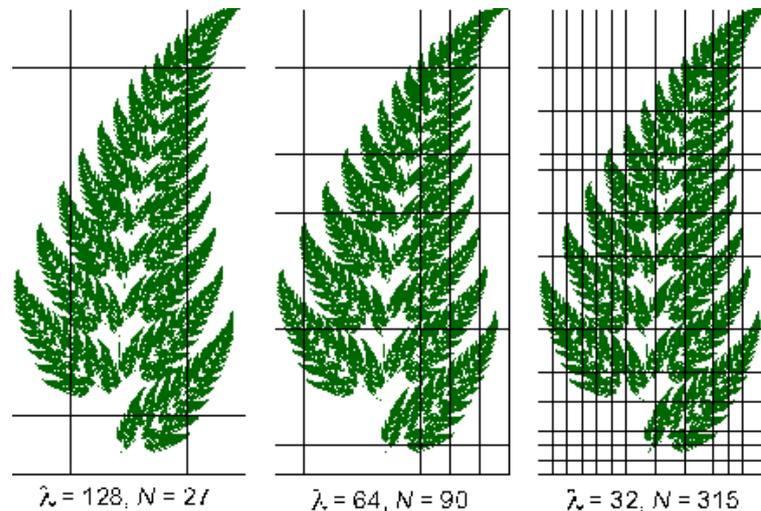


Abbildung 7: Überdeckung auf drei Skalierungsstufen

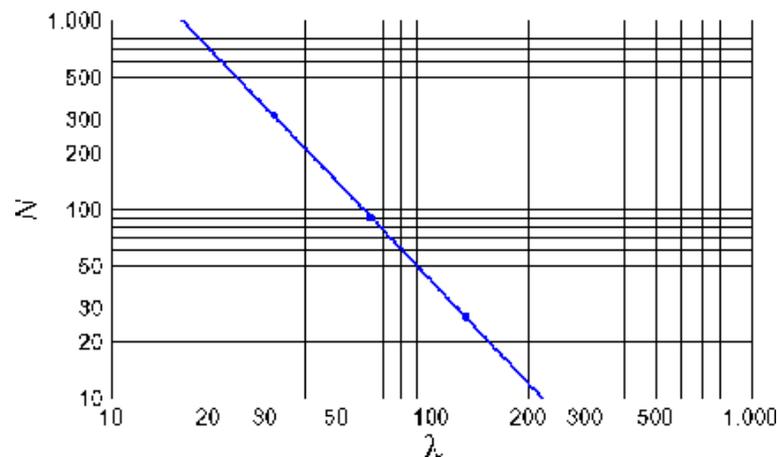


Abbildung 8: Ausgleichsgerade der Ergebnisse

Um herauszufinden, wie genau die Kapazitätsdimension die Menge beschreibt, lässt sich berechnen, wie gut die Ausgleichsgerade die Ergebnisse approximiert. Sei nun  $Y_i$  der  $i$ -te Datenpunkt,  $\hat{Y}_i$  der approximierten Wert und  $\bar{Y}$  das Mittel der approximierten Werte. Die Korrelation  $r$  ist nach Ravishankar Rao [10] wie folgt definiert:

$$r^2 := \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Die Korrelation  $r$  zeigt, wie vertrauenswürdig die berechnete Fraktaldimension ist. Ein Wert für  $r$  nahe 1 bedeutet eine hervorragende lineare Approximation. Die Fraktaldimension liefert dann eine verlässliche Annäherung an die Rauheit der Oberfläche.

### Bemerkung 3.1.1

Das im obigen Beispiel benutzte Bild ist ein künstlich erzeugtes Farn. Astrid Lindenmayer versuchte Ende der Sechziger Jahre Pflanzenformen durch deterministische Methoden zu beschreiben. Sie erzeugte Fraktale, die zu natürlichen Pflanzenformen sehr große Ähnlichkeiten aufweisen und L-Systeme genannt werden. Sie bestehen aus einer Symbolfolge und einer Erzeugungsregel, die durch Ersetzungen die Transformation einer Symbolfolge in eine neue Folge definiert. Die so entstehenden Symbolfolgen werden geometrisch interpretiert und können mit der sogenannten Turtle-Grafik leicht veranschaulicht werden. Es ist bei einigen L-Systemen möglich, die Fraktaldimension schon aus dem Startsymbol und den Erzeugungsregeln zu berechnen (siehe Fernau [1]).

## 3.2 Informationsdimension

Die Informationsdimension basiert auf  $I(E)$ , dem Maß an Information (Überraschung) bezogen auf das Auftreten eines Ereignisses  $E$  mit der Wahrscheinlichkeit  $P(E)$ .

$$I(E) := -\log P(E) = \log \frac{1}{P(E)}$$

Steht  $P(E)$  gegen Null, so läuft  $I(E)$  gegen unendlich und beschreibt somit die unendlich große Überraschung, das beinahe Unmögliche zu beobachten. Ist hingegen  $P(E) = 1$  und somit das Ereignis sicher, so ist die Überraschung  $I(E) = 0$ . Weiterhin gilt, wenn das Ereignis  $E$  das Resultat zweier gleichzeitig und unabhängig voneinander auftretender Ereignisse  $F$  und  $G$  ist, so ist  $I(E) = I(F) + I(G)$ .

Die Berechnung der Informationsdimension eines Grauwertbildes ähnelt stark der Berechnung der Kapazitätsdimension. Die Menge  $S$  wird mit einer minimalen Anzahl  $N(\lambda)$  von Würfeln mit Seitenlänge  $\lambda$  überdeckt. Sei  $\|S\|$  die Anzahl der Elemente in  $S$  und für jeden der  $N(\lambda)$  Würfel sei  $N(\lambda, i)$  die Anzahl der Pixel im Würfel Nummer  $i$ . Weiter sei

$$P(\lambda, i) = \frac{N(\lambda, i)}{\|S\|}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Pixel von  $S$  im  $i$ -ten Würfel befindet.

Der Term  $(-\log P(\lambda, i))$  beschreibt die Information, die man erhält, wenn man weiß, daß sich ein Pixel von  $S$  in dem  $i$ -ten Würfel der Überdeckung befindet. Somit mißt

$$I(\lambda) = \sum_{i=1}^{N(\lambda)} -P(\lambda, i) \log P(\lambda, i)$$

die mittlere Information, zu wissen, in welchem Würfel ein Pixel von  $S$  liegt. Sei nun die Informationsdimension definiert durch

**Definition 3.2.1**

Informationsdimension:

$$D_i := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-I(\lambda)}{\log(\lambda)}$$

Sind alle  $P(\lambda, i) = \frac{1}{N(\lambda)}$  gleich groß, so ist  $I(\lambda) = \log N(\lambda)$ . Dies ist der größtmögliche Wert für  $I(\lambda)$ . In diesem Fall ist  $D_i = D_c$ . Die Informationsdimension ist also eine Verallgemeinerung der Kapazitätsdimension. Die möglichen kleineren Werte bewerten die ungleichmäßige Verteilung der Pixel bzw. korrigieren die Kapazitätsdimension nach unten, indem die Würfel mit relativ wenigen Pixel weniger stark gewichtet werden. Wenn die Verteilung der Pixel bezüglich der Überdeckung ungleichmäßig ist, so ist die Informationsdimension kleiner als die Kapazitätsdimension.

Bei einem Grauwertbild wird zur Berechnung der Informationsdimension das gleiche Verfahren verwendet wie bei der Kapazitätsdimension. Die Limesberechnung wird durch die Berechnung der Steigung einer Ausgleichsgerade ersetzt.

### 3.3 Korrelationsdimension

Die Korrelationsdimension wird mit Hilfe der Entfernungen von je zwei Pixel der Menge  $S$  berechnet. Sei  $x_i, x_j \in S$

$$s(i, j) := \|x_i - x_j\|$$

Mit Hilfe dieser  $\|S\|^2$  Werte läßt sich nun die Korrelationsfunktion  $C(\lambda)$  wie folgt definieren:

$$C(\lambda) := \frac{\|\{(x_i, x_j) | s(i, j) < \lambda, j \neq i\}\|}{\|S\|^2}$$

Moon [8] bemerkte, daß  $C(\lambda)$  folgendes Potenzgesetz erfüllt:

$$C(\lambda) = k \cdot \lambda^{D_k}$$

So läßt sich die Korrelationsdimension  $D_k$  analog der Kapazitäts- und Informationsdimension definieren als

**Definition 3.3.1**

Korrelationsdimension:

$$D_k := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log C(\lambda)}{\log \lambda}$$

Da bei der Berechnung von  $C(\lambda)$  alle Entfernungen zweier Pixel größer als  $\lambda$  unberücksichtigt bleiben, ist es effektiver, die Anzahl der Pixel in einem Würfel (bzw. einer Kugel) um jeden Pixel  $x_i$  zu zählen. Man erhält

$$C(\lambda) = \frac{1}{\|S\|^2} \sum_{i=1}^{\|S\|} \sum_{j=1}^{\|S\|} H(i, j, \lambda)$$

mit  $H(i, j, \lambda) := \begin{cases} 0 & : s(i, j) = 0 \\ 1 & : s(i, j) < \lambda \\ 0 & : s(i, j) \geq \lambda \end{cases}$

Bei einem Grauwertbild wird zur Berechnung der Korrelationsdimension das gleiche Verfahren verwendet wie bei der Kapazitätsdimension. Die Limesberechnung wird durch die Berechnung der Steigung einer Ausgleichsgerade ersetzt.

**Bemerkung 3.3.1**

Es existiert ein von Lee und Moon [6] entwickeltes Gerät zur optischen Bestimmung der Korrelationsdimension bei Punktmengen im zweidimensionalen Raum. Es werden zwei Filme vorbereitet, so daß Licht durch die Abbildungen der Punkte durchstrahlt, aber vom Rest des Filmes blockiert wird. Beide Filme werden hintereinander gehalten und frontal beleuchtet. Die mittlere Intensität des Lichtes hinter dem zweiten Film wird gemessen. Es gelangt nur Licht durch den ersten Film an Stellen, an denen ein Punkt der Menge liegt. Der zweite Film wird nun hinter einem solchen Punkt  $x$  auf der Fläche eines Kreises mit

dem Mittelpunkt  $\hat{x}$  bestrahlt.  $\hat{x}$  sei dabei die Orthogonalprojektion des Punktes  $x$  auf den zweiten Film.

Der Radius  $\lambda$  des Lichtkreises wird durch die Entfernung der beiden Filme voneinander bestimmt. Alle Punkte auf dem zweiten Film, deren Entfernung zu  $\hat{x}$  kleiner als  $\lambda$  ist, lassen etwas von dem Licht durch und tragen somit zur Gesamtintensität hinter dem zweiten Film bei. Somit ist die Gesamtintensität proportional zu  $C(\lambda)$ , der Anzahl der Punktpaare mit einem Abstand kleiner als  $\lambda$ . Mit einem solchen Gerät läßt sich nun extrem schnell  $k \cdot C(\lambda)$  für verschiedene  $\lambda$  messen. Lee und Moon [6] haben mit diesem Verfahren hervorragende Ergebnisse erzielt. Es ist noch offen, ob sich ein ähnliches Verfahren auch für Grauwertbilder finden läßt.

### 3.4 Punktdimension

Die Punktdimension bestimmt die Fraktaldimension in der Nähe eines bestimmten Pixels. Um diesen Pixel wird ein Würfel gelegt. Sei nun  $N(\lambda, x_i)$  die Anzahl aller Pixel im Würfel der Seitenlänge  $\lambda$  um den Pixel  $(x_i)$ . Die Wahrscheinlichkeit, einen Pixel des Bildes in diesem Würfel zu finden, erhält man, indem man diese Anzahl durch die Anzahl  $\| S \|$  aller Pixel im Bild teilt:

$$P(\lambda, x_i) = \frac{N(\lambda, x_i)}{\| S \|}$$

Ist nun ein solches Bild zweidimensional (also alle Grauwerte identisch), so ist  $P(\lambda, x_i) \approx c\lambda^2$ . Man kann also den allgemeinen Ansatz aufstellen:

$$P(\lambda, x_i) = c\lambda^{D_p}$$

**Definition 3.4.1**

Punktdimension:

$$D_p := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log P(\lambda, x_i)}{\log \lambda}$$

Auch hier läßt sich  $D_p$  mit Hilfe einer Ausgleichsgeraden berechnen.

Für einige Bilder ist  $D_p$  unabhängig vom gewählten Pixel  $x_i$ , doch für die meisten nicht. In solchen Fällen kann man eine Durchschnitts-Dimension berechnen. Hierzu kann man  $D_p(x_i)$  für eine Menge von  $M < \| S \|$  zufällig gewählten Pixel berechnen. Die durchschnittliche Dimension ist nun gegeben durch:

$$\hat{D}_p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D_p(x_i)$$

Eine andere Methode zur Berechnung von  $\hat{D}_p$  ist, einen Durchschnitt über die Wahrscheinlichkeiten  $P(\lambda, x_i)$  zu bilden. Bei dieser Methode wird wieder eine beliebige Menge von  $M$  Pixeln gewählt. Nach Moon [8] ist dann

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(\lambda, x_i) = c \lambda^{\hat{D}_p}$$

$$\text{bzw. } \hat{D}_p = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log \frac{1}{M} \sum P(\lambda, x_i)}{\log \lambda}$$

### 3.5 Wahrscheinlichkeitsdimension

Die Wahrscheinlichkeitsdimension von Voss [11] lehnt sich eng an die zuvor beschriebene Punktdimension an. Man kann sie aber auch als Variante der Kapazitätsdimension auffassen. Keller, Chen und Crownover [3] benutzen diese Methode mit Erfolg zur Bildunterteilung.

Sei  $P(m, \lambda)$  die Wahrscheinlichkeit, daß  $m$  Pixel in einem Würfel der Seitenlänge  $\lambda$  liegen. Der Würfel sei über einem beliebigen Pixel zentriert. Für jeden Wert  $\lambda$  gilt:

$$\sum_{m=1}^{\lambda^2} P(m, \lambda) = 1.$$

$\lambda^2$  ist dabei die Anzahl der maximal möglichen Pixel in einem Würfel. Sei nun  $\|S\|$  die Anzahl aller Pixel im Bild. Überdeckt man nun das Bild mit Würfeln der Seitenlänge  $\lambda$  so ist die Anzahl der Würfel mit  $m$  Pixel Inhalt ungefähr  $\frac{\|S\|}{m} P(m, \lambda)$ , die Anzahl aller Würfel wird dabei mit  $\frac{\|S\|}{m}$  angenähert. Daher ist die voraussichtlich benötigte Anzahl von Würfeln, um das gesamte Bild zu überdecken

$$N(\lambda) = \sum_{m=1}^{\lambda^2} \frac{\|S\|}{m} P(m, \lambda) = \|S\| \sum_{m=1}^{\lambda^2} \frac{P(m, \lambda)}{m}$$

Es ist von der Kapazitätsdimension bekannt, daß für  $N(\lambda)$  folgendes gilt:

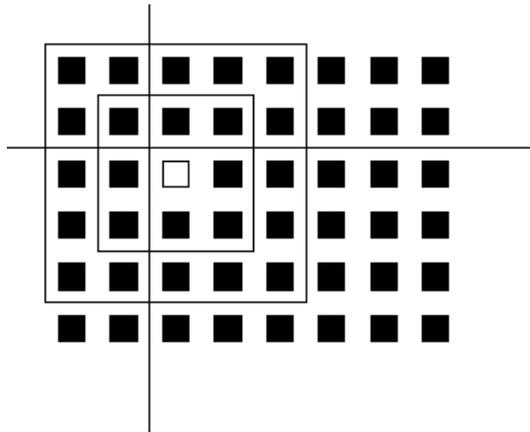
$$N(\lambda) = \text{const } \lambda^{-D_w}$$

**Definition 3.5.1**

Wahrscheinlichkeitsdimension:

$$D_w := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\log N(\lambda)}{\log \lambda}$$

In der Praxis wird für jede Seitenlänge  $\lambda$  bis  $\lambda_{max}$  ein Rand von  $\frac{\lambda_{max}-1}{2}$  gelassen. Außerdem werden für  $\lambda$  nur ungerade Längen zugelassen. Es fällt dann einfacher, den Würfel um den aktuellen Pixel zu zentrieren.

Abbildung 9: Erster Pixel bei  $\lambda_{max} = 5$  und  $Rand = 2$ 

Für jede Seitenlänge  $\lambda$  werden nun die verbliebenen Pixel innerhalb des Rahmens durchlaufen und jeweils die Pixel innerhalb der Würfel gezählt. Wird nun ein Würfel mit der Seitenlänge  $\lambda$  gefunden, die  $m$  Pixel enthält, so wird ein Zähler (Häufigkeit  $H(m, \lambda)$ ) um 1 erhöht. Um die Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, müssen diese Häufigkeiten nur noch durch die Gesamtzahl der durchlaufenen Pixel  $M < \| S \|$  (Anzahl der Würfel) dividiert werden:

$$P(m, \lambda) := \frac{H(m, \lambda)}{M} \text{ und daher ist}$$

$$N(\lambda) = \sum_{m=1}^{\lambda^2} \frac{H(m, \lambda)}{m}$$

Um große Zahlen zu vermeiden, ist es auch möglich, beim Finden eines Würfels mit  $m$  Pixeln Inhalt  $H(m, \lambda)$  um  $\frac{1}{m}$  anstelle von 1 zu erhöhen. Somit ist es nicht mehr nötig,  $H(m, \lambda)$  für alle  $m$  zu durchlaufen, um durch  $m$  zu dividieren.

## 4 Verfahren in der Praxis

### 4.1 Programm FDim

Das Programm FDim ist ein Bildanalyse-Programm, das einige der oben aufgezählten Verfahren implementiert hat. Hierzu lassen sich Grauwertbilder in verschiedenen Formaten einlesen. Diese Bilder werden auf dem Bildschirm angezeigt. So kann der Benutzer die berechneten Werte mit seiner visuellen Wahrnehmung in Verbindung bringen. Die Bilder können mit Hilfe einiger der oben beschriebenen Verfahren analysiert werden. Hierzu werden für einen Bereich an Würfelgrößen Messungen vorgenommen. Die Würfelgrößen laufen bei allen Verfahren von 2 bis ca. 128 Pixel. Die Würfelgröße 1 ist nicht sinnvoll, da in diesen Würfeln jeweils nur ein Pixel liegt. Es wird also nichts über die Umgebung ausgesagt. Bei einigen Verfahren werden nur ungerade Größen untersucht, da es einfacher ist, die Würfel um das aktuelle Pixel zu zentrieren.

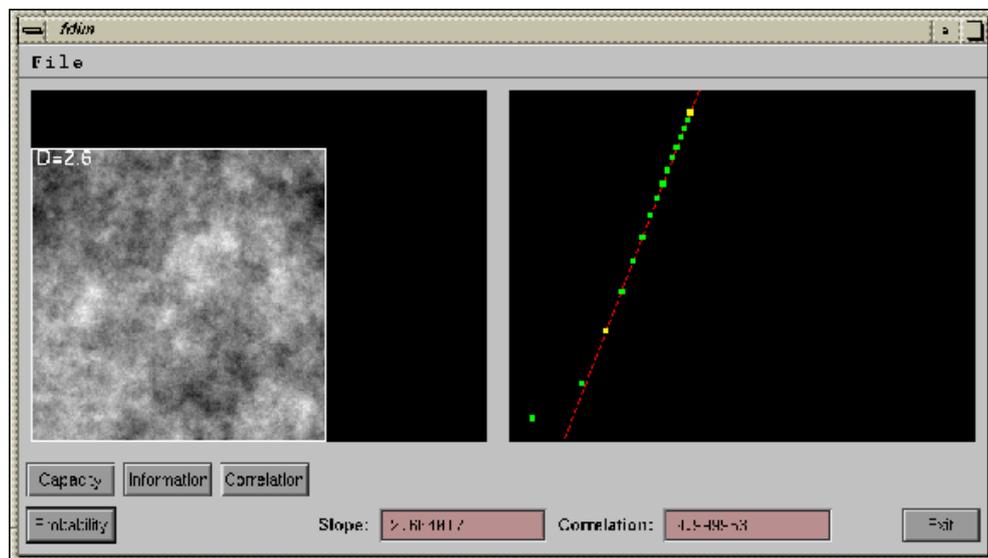


Abbildung 10: Die grafische Oberfläche von FDim

Durch die für unterschiedlichen Größen gesammelten Werte wird, wie oben erklärt, eine Ausgleichsgerade gelegt. Außerdem werden die Steigung und die Abweichung der Gerade berechnet und ausgegeben (siehe Kapitel 3.1). Es ist möglich das Intervall von Würfelgrößen, die zur Berechnung der Ausgleichsgerade herangezogen werden, zu verkleinern. Somit lassen sich die kleinsten oder größten Würfelgrößen aus der Berechnung ausblenden.

### 4.2 Laufzeitverhalten der Verfahren

Die implementierten Verfahren lassen sich bezüglich ihres Laufzeitverhaltens in zwei Klassen aufteilen. Verfahren, die Überdeckungen suchen (wie z.B. die Kapazitäts-, Informations- und Correlationsdimension), laufen über ein Gitter aus Quadraten. Hierbei wird die Fläche

der Bildpunkte  $(x, y)$  in kleine Quadrate unterteilt und für jedes Quadrat wird die Anzahl der zur Überdeckung benötigten Würfel mit Hilfe des minimalen und maximalen Bildwertes ermittelt. Es muß also für jede Seitenlänge  $\lambda$  jeder Pixel genau einmal untersucht werden. Sei  $n$  die Anzahl der untersuchten Würfelgrößen und  $S$  die Menge der Pixel des Grauwertbildes, so ist

$$\sum_{\lambda=1}^n \| S \| = n \cdot \| S \|$$

die Anzahl der benötigten Vergleiche. Da bei diesen Verfahren die Zentrierung eines Würfels über einem bestimmten Pixel nicht nötig ist, kann man für alle Würfelgrößen bis zu  $\lambda_{max}$  Messungen durchführen. Eine solche Vorgehensweise hat aber zur Folge, daß für verschiedene Würfelgrößen verschieden große Bildbereiche untersucht werden, da jeweils ein anderer Rand übrigbleibt. Um dies zu vermeiden, kann man für  $\lambda_{max}$  eine Zweierpotenz (z.B. 128 oder 64) wählen und die Würfelgröße über alle Zweierpotenzen bis zu  $\lambda_{max}$  laufen lassen. Somit läßt sich für jede Würfelgröße der gleiche Bildbereich untersuchen.  $n$  läßt sich bei diesen Verfahren mit  $\log \lambda_{max}$  gleichsetzen.

Bei der anderen Klasse von Verfahren (z.B. Wahrscheinlichkeitsdimension) wird für jede Seitenlänge  $\lambda$  ein Würfel um jeden Pixel der Menge zentriert. Deshalb werden bei diesen Verfahren nur ungerade Seitenlängen benutzt. Somit ergibt sich die Anzahl der untersuchten Würfelgrößen zu  $n = \lfloor \frac{\lambda_{max}}{2} \rfloor$ . Da für jede Seitenlänge um jede Position ein Quadrat gelegt wird, und jede Position innerhalb, dieses Quadrates untersucht wird, ergibt sich folgende Anzahl von Vergleichen:

$$\sum_{\lambda}^n \| S \| (2\lambda + 1)^2 = \| S \| \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n}{3}$$

Es bleibt zu bemerken, daß beide Berechnungen nur Näherungen ergeben. Bei den Verfahren der ersten Klasse bleibt eventuell ein kleiner Rand, da sich die Ebene der Positionen nicht immer komplett mit Quadraten überdecken läßt. Bei der zweiten Berechnung wird vernachlässigt, daß um das gesamte Bild herum ein Rand von  $\frac{\lambda_{max}-1}{2}$  Positionen gelassen wird, damit auch die größten Würfel nicht über den Bildrand hinausragen.

### 4.3 Güte der Verfahren

Um die Güte der Verfahren zu evaluieren, wurden mit Hilfe eines Bildverarbeitungssystems (KHOROS 1992 University of New Mexico) Grauwertbilder mit vorgegebener Fraktaldimension erstellt. Hierzu wurde eine quadratbasierte zufällige Mittelpunktverschiebungsmethode benutzt (Kauer [4]), bei der zu gegebenen Eckpunkten der Intensitätswert des Mittelpunktes um einen zufälligen Betrag verschoben wird. Abhängig von der Größe der Verschiebung entstehen rauhe beziehungsweise glatte Oberflächen. Es wurde die Fraktaldimension dieser Bilder mit den verschiedenen Verfahren berechnet und mit der vorgegebenen Dimension verglichen. Außerdem wurden die Verfahren an Texturen ausprobiert, die sich leicht visuell bezüglich ihrer Rauheit einstufen lassen. In den folgenden Abbildungen sind einige Beispiele zu sehen.

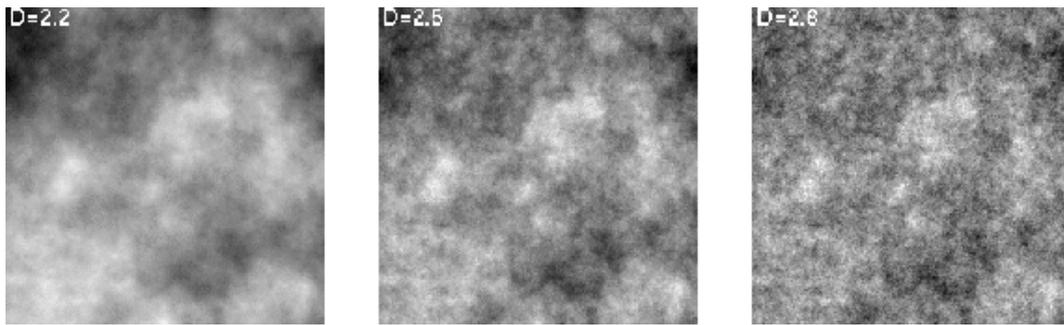


Abbildung 11: Untersuchte Bilder mit vorgegebener Dimension

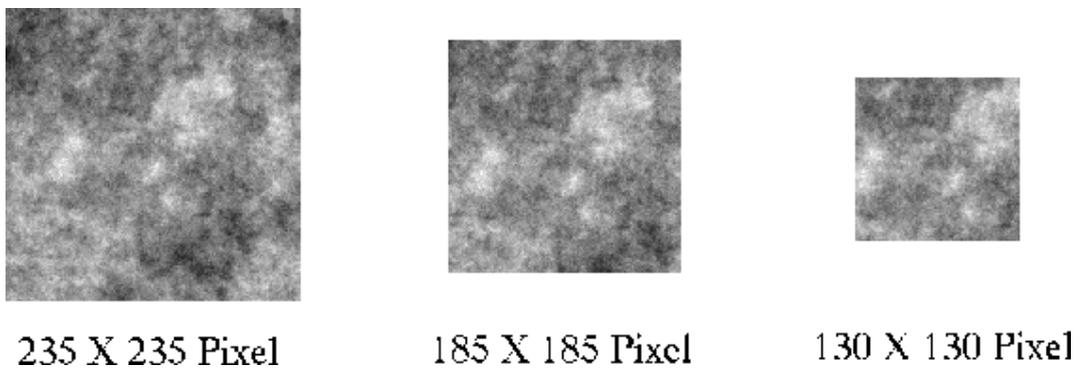


Abbildung 12: untersuchte Bilder (D=2.7) mit unterschiedlicher Auflösung

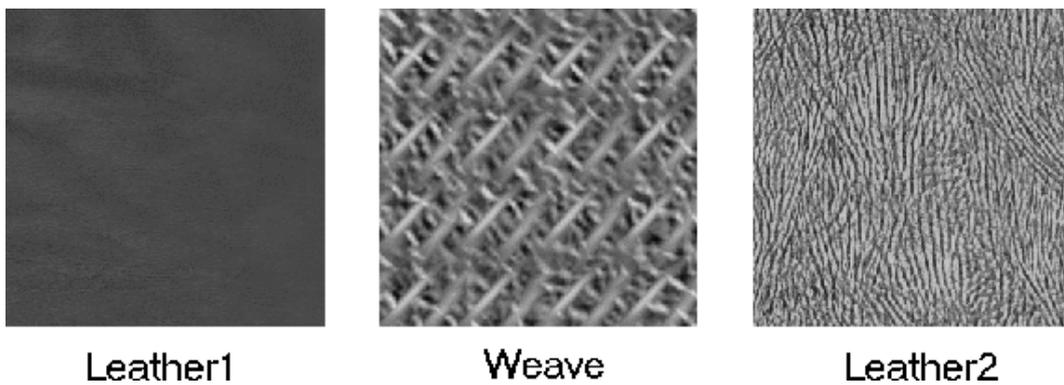


Abbildung 13: Untersuchte Texturen mit unterschiedlicher Rauheit

	$D_c$	$D_i$	$D_k$	$D_w$
dim22	2.22	2.21	2.20	2.20
dim25	2.36	2.36	2.36	2.51
dim28	2.44	2.44	2.44	2.78
dim27-130	2.39	2.38	2.37	2.68
dim27-185	2.42	2.42	2.43	2.68
dim27-234	2.42	2.42	2.43	2.69
leather1	2.18	2.16	2.14	2.13
weave	2.40	2.36	2.32	2.42
leather2	2.65	2.65	2.64	2.84

Diese Daten deuten darauf hin, daß bei einer kleinen Dimension sämtliche Verfahren ähnliche Werte liefern. Das einzige Verfahren aber, das überhaupt erst größeren Dimensionen gerecht wird ist die Wahrscheinlichkeitsdimension. Sie liegt auch als einzige relativ dicht an den vorgegebenen Dimensionen.

Die Wahrscheinlichkeitsdimension hat von den hier beschriebenen Verfahren die beste Güte, da sie

- die vorgegebenen Dimensionen am besten approximiert,
- den größten Bereich an Werten abdeckt,
- bei den meisten Testbildern die gleiche Monotonie wie die anderen Verfahren ermittelt (siehe Kapitel 4.5).

#### **Bemerkung 4.3.1**

Die sehr rauhen Bilder werden häufig unterschätzt. Bei ihnen spielt sich in einer kleinen Umgebung eines Pixels wenig ab, daher sind die Meßwerte der großen Würfel für die Berechnung der Fraktaldimension sehr wichtig. Um bessere Werte zu erhalten, ist es sinnvoll, den Meßbereich um 2 bis 4 Meßwerte nach oben zu verschieben. Auf diese Weise kann verhindert werden, daß die Meßwerte der kleinen Würfel das Ergebnis nach unten verfälschen.

Bei sehr flachen Bildern, spielt sich hingegen in einer kleinen Umgebung eines Pixels sehr viel ab. Diese Bilder werden eher überschätzt. Hier ist eine leichte Übergewichtung der kleinen Würfel sinnvoll, um das Ergebnis zu korrigieren.

Weiterhin ist zu bemerken, daß bei den fraktalen Bildern (mit vorgegebener Dimension) die Meßwerte kaum von der Ausgleichsgeraden abweichen. Bei beliebigen Texturen sind allerdings leichte Abweichungen möglich. Das liegt daran, daß die Fraktaldimension bei Objekten aus der Natur oft nur auf einigen Vergrößerungsstufen invariant bleibt, somit natürlich auch bei deren Abbildungen als Grauwertbild.

Die Tatsache, daß die verschiedenen Verfahren bei einer unterschiedlichen Auflösung ungefähr die gleichen Ergebnisse berechnen, deutet darauf hin, daß sie bezüglich der Auflösung bis zu einem gewissen Grad invariant sind. Daher läßt sich ausschließen, daß die niedrigen Ergebnisse der ersten drei Verfahren bei den Bildern mit vorgegebener Dimension an einer zu geringen Auflösung liegen.

#### 4.4 Zusammenhang einiger Verfahren

Es ist klar, daß sämtliche hier beschriebene Verfahren unterschiedliche Ergebnisse liefern. Einige Verfahren sind aber durch Verfeinerungen oder Gewichtungen aus anderen entstanden und hängen daher eng zusammen. Die drei zuerst besprochenen Dimensionen (Korrelations-, Informations- und Kapazitätsdimension) z.B. liefern ganz ähnliche Werte und haben noch eine weitere wichtige Eigenschaft.

Grassberger und Proccacia [2] haben gezeigt, daß diese drei Dimensionen folgende Ungleichung erfüllen:

$$D_k \leq D_i \leq D_c$$

Sie haben auch bemerkt, daß zwischen den Dimensionen eine Verbindung besteht. Man kann die „order- $q$  information“ (ein Maß der Entropie) wie folgt definieren:

$$I(q, \lambda) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^{N(\lambda)} P(i, \lambda)^q$$

hierbei sei  $P(i, \lambda)$  die Wahrscheinlichkeit, daß ein Pixel von  $S$  in dem  $i$ -ten Würfel einer minimalen Überdeckung mit Würfelgröße  $\lambda$  liegt.  $N(\lambda)$  sei die Anzahl der Würfel einer solchen Überdeckung.

Mit folgender Definition

$$D(q) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-I(q, \lambda)}{\log \lambda}$$

erhält man für  $q = 0, 1, 2$  die Kapazitäts-, Informations- und Korrelationsdimension. Für  $q=1$  muß der Limes für  $q \rightarrow 1$  aus  $I(q, \lambda)$  genommen werden (vgl. Moon [8], S. 219).

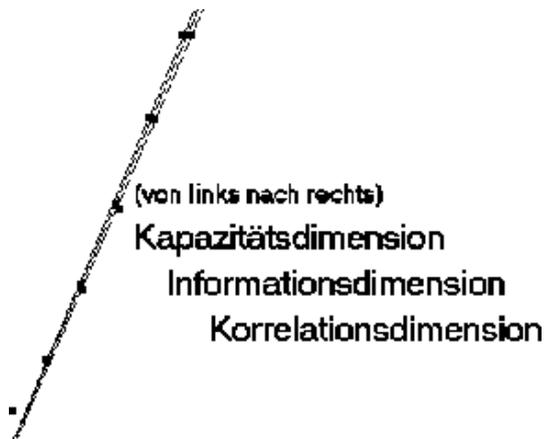


Abbildung 14: Drei Ausgleichsgeraden bei der Textur: Weave

Bei der Textur Weave lassen sich die unterschiedlichen Steigungen erkennen. Es gibt aber auch Beispiele (z.B. dim27-235) bei denen die Ungleichung nicht erfüllt ist. Dies liegt allerdings nur am Meßbereich. Es reicht häufig schon aus die Boxgröße 2 Pixel mit in die Steigungsberechnung aufzunehmen, um die Ergebnisse zu korrigieren.

## 4.5 Monotonie der Verfahren

Um herauszufinden, ob die verschiedenen Verfahren bezüglich ihrer Rauheits-Einstufung monotone Ergebnisse liefern, wurden eine Reihe von Texturen bewertet und die Ergebnisse verglichen.

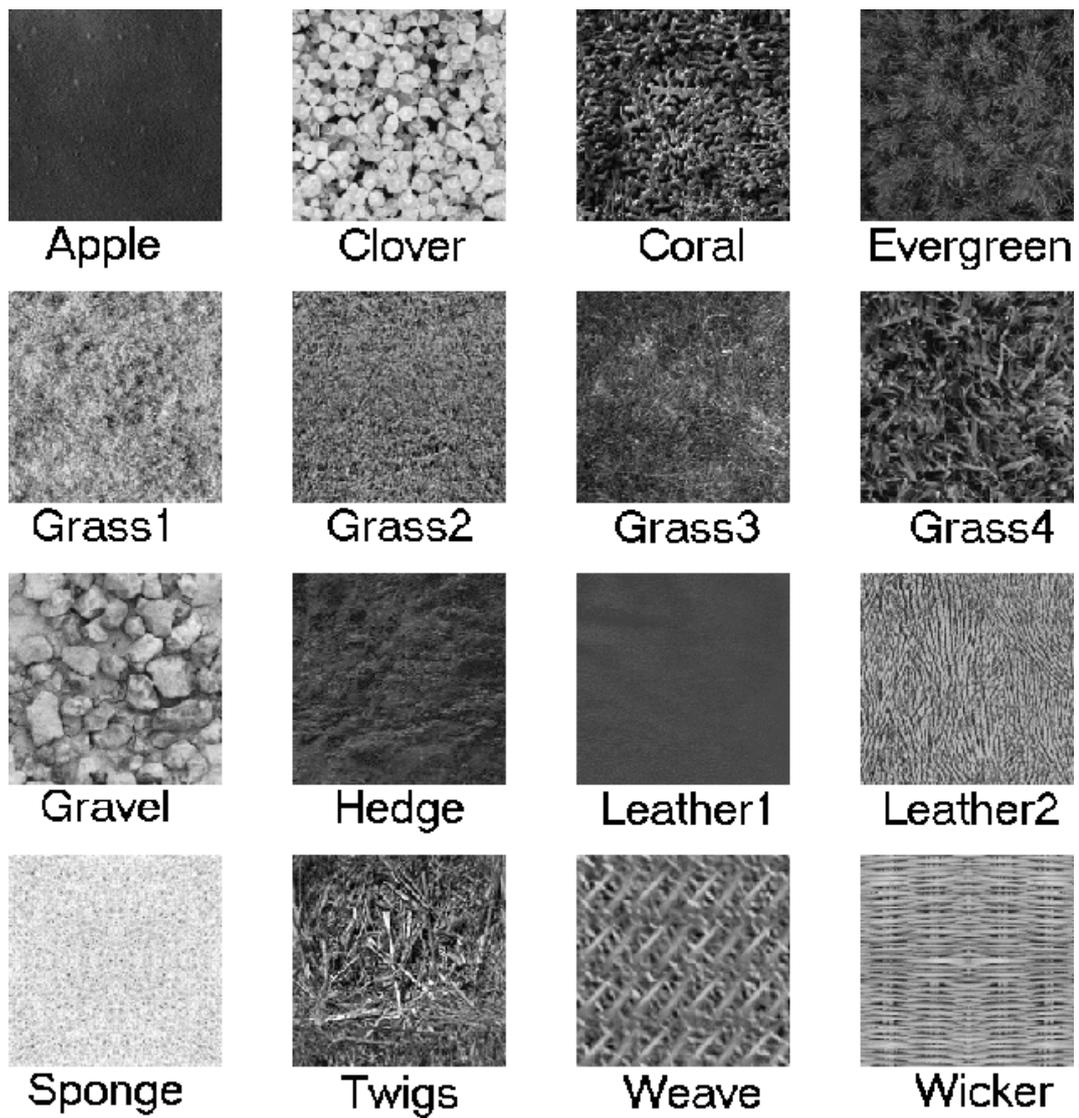


Abbildung 15: Eingestufte Texturen

Rauheit	$D_c$	$D_i$	$D_k$	$D_w$
1	leather1	leather1	leather1	leather1
2	cork	cork	gravel	cork
3	gravel	gravel	cork	clover
4	weave	weave	weave	weave
5	apple	apple	clover	gravel
6	grass3	clover	apple	apple
7	clover	grass3	grass4	grass4
8	hedge	grass4	grass3	coral
9	grass4	hedge	hedge	grass3
10	wicker	wicker	wicker	hedge
11	grass1	grass1	grass1	sponge
12	grass2	grass2	grass2	wicker
13	sponge	evergreen	evergreen	twigs
14	evergreen	sponge	coral	evergreen
15	coral	coral	sponge	grass1
16	leather2	leather2	twigs	leather2
17	twigs	twigs	leather2	grass2

Bei einer Plazierung von glatt (1) bis sehr rauh (17) liefern sämtliche Verfahren bis auf einige Vertauschungen ähnliche Ergebnisse. Es fällt auf, daß die sich Wahrscheinlichkeitsdimension am stärksten von den anderen Ergebnissen unterscheidet (z.B. bei grass2), da sie auf einem völlig anderen Algorithmus basiert.

## 4.6 Schlussbemerkungen

Die hier vorgestellten Verfahren liefern bezüglich einer visuellen Rauheitseinschätzung sehr gute Werte. Allerdings mag z.B. Leder aufgrund seiner Falten sehr rauh aussehen (siehe leather2). In der Realität ist es jedoch ein relativ weiches und nachgiebiges Material. Die für diese Art von Materialien berechneten Werte werden daher der Realität kaum gerecht.

Außerdem beeinflußt natürlich die Farbgebung des Materials die Ergebnisse. Ein glattes Material, das z.B. mit schwarzen Streifen bemalt ist, hat eine größere Fraktaldimension als dasselbe Material ohne die Streifen. Aus diesen Gründen sind alle Verfahren zur Berechnung der Fraktaldimension nur begrenzt für die Rauheitsanalyse einsetzbar. Es ist trotzdem erstaunlich, wie sehr sie der visuellen Wahrnehmung von Rauheit entsprechen.

## Abbildungsverzeichnis

1	Die Küstenlinie von Großbritannien und Irland . . . . .	3
2	Fläche mit mittlerer Fraktaldimension . . . . .	5
3	Texturen und künstliche Grauwertbilder . . . . .	6
4	Koordinaten in einem Bild . . . . .	7
5	Beispiele einer Überdeckung . . . . .	9
6	Überdeckung bei Cantor und Sierpinski . . . . .	10
7	Überdeckung auf drei Skalierungsstufen . . . . .	11
8	Ausgleichsgerade der Ergebnisse . . . . .	12
9	Erster Pixel bei $\lambda_{max} = 5$ und $Rand = 2$ . . . . .	17
10	Die grafische Oberfläche von FDim . . . . .	18
11	Untersuchte Bilder mit vorgegebener Dimension . . . . .	20
12	Untersuchte Bilder (D=2.7) mit unterschiedlicher Auflösung . . . . .	20
13	Untersuchte Texturen mit unterschiedlicher Rauheit . . . . .	20
14	Drei Ausgleichsgeraden bei der Textur: Weave . . . . .	23
15	Eingestufte Texturen . . . . .	24

## Literatur

- [1] Fernau, H.:  
*Iterierte Funktionen, Sprachen und Fraktale*,  
Wissenschaftsverlag, Mannheim, (1994).
- [2] Grassberger, P.; Proccacia, I.:  
*Characterization of Strange Attractors*,  
Physics Rev. Letter 50, 346-349, (1983).
- [3] Keller, J. M.; Chen, S.; Crownover, R. M. :  
*Texture Description and Segmentation through Fractal Geometry*,  
Computer Vision, Graphics and Image Processing 45, 150-166, (1989).
- [4] Kauer, J.:  
*Dimensionsanalysen als Mittel zur texturalen Klassifikation digitaler Bilder*,  
Technische Universität München, Freising, (1996).
- [5] Kraft, R.; Kauer, J.:  
*Estimating the Fractal Dimension from Digitized Images*,  
Munich University of Technology, Freising, (1995).
- [6] Lee, C.-K.; Moon, F. C.:  
*An Optical Technique for Measuring Fractal Dimensions of Planar Poincare Maps*,  
Physics Letter A 114(5), pp. 222-226, (1986).
- [7] Mandelbrot, B. B.:  
*The fractal geometry of nature*,  
San Francisco, California: Freeman, (1983).
- [8] Moon, F. C.:  
*Chaotic Vibrations*,  
New York: Wiley, (1987).
- [9] Pentland, A.:  
*Fractal-based description of natural scenes*,  
IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 6, pp. 661-674, November (1984).
- [10] Ravishankar Rao, A.:  
*A taxonomy for texture description and identification*,  
New York: Springer-Verlag, (1990).
- [11] Voss, R.:  
*Random fractals: Characterization and measurement, in Scaling Phenomena in Disordered Systems*,  
(R. Pynn and A. Skjeltorp, Eds.), Plenum, New York, (1986).