Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung – Physik
Prof. Dr. L. Santen (Email: santen@lusi.uni-sb.de)
Dr. R. Shaebani (Email: shaebani@lusi.uni-sb.de)
Dr. C. Chevalier (Email: carole@lusi.uni-sb.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de

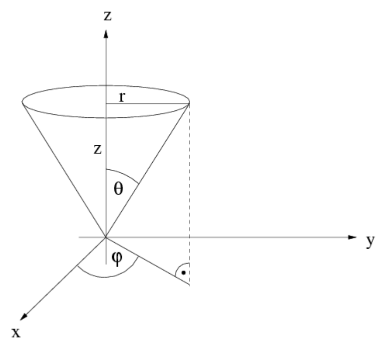
Saarbrücken, den 11.05.2023

Blatt 5 zur Theoretischen Physik Ib, Sommersemester ’23

(Abgabe bis 18.05.2023, 12:00 Uhr)

Übung 1: Teilchen auf Kegelmantel

Wir betrachten einen Massenpunkt auf einem Kegelmantel mit halben Öffnungswinkel θ im homogenen Schwerefeld der Erde.



(a) Welchen Zwangsbedingungen unterliegt der Massepunkt? Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.

(b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion.

(c) Welche räumliche Symmetrie hat die Lagrangefunktion?

(d) Welche Erhaltungsgröße folgt aus der Symmetrie? Was nutzt Ihnen die Erhaltungsgröße ?

(e) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Nutzen Sie die aus der räumlichen Symmetrie der Lagrangefunktion gefolgerte Erhaltungsgröße um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen.

[1+1+2+2+4=10 Punkte]

Übung 2: Hamilton-Funktion

Für einen Massenpunkt gelte

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \quad V = V(x, y, z). \tag{1}$$

Geben Sie die Hamilton-Funktion H

(a) in Zylinderkoordinaten $\{\rho, \phi, z\}$

(b) und in Kugelkoordinaten $\{r, \theta, \phi\}$ an.

(c) Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für den Fall mit Zylinderkoordinaten und dem Potential $V = V_0 \ln(\rho/\rho_0)$.

[4 + 4 + 3 = 11 Punkte]

Übung 3: Eigenschaften der Poissonklammern

Betrachten Sie zwei beliebige stetige Funktionen der generalisierten Koordinaten und Impulse $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $h(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Die Poissonklammern sind definiert als:

$$[g, h] = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right).$$

(a) Rechnen Sie die folgenden Eigenschaften der Poissonklammer nach:

(i) Antisymmetrie: $[f, g] = -[g, f]$

(ii) Bilinearität: $[f, g + \lambda h] = [f, g] + \lambda[f, h]$ und $[f + \lambda g, h] = [f, h] + \lambda[g, h]$

(iii) Produktregel: $[f, gh] = g[f, h] + h[f, g]$

(b) Zeigen Sie die fundamentalen Poissonklammern: $[q_i, q_j] = 0$, $[p_i, p_j] = 0$, $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$.

(c) Zeigen Sie die Produktform der zeitlichen Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f, g] = \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, g\right] + \left[f, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right]$$

Hinweis: Es gilt die Jacobiidentität $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$.

[1+1+1+2.5+2.5=8 Punkte]

Übung 4: Poissonklammer mit dem Drehimpuls

(a) Rechnen Sie nach, dass $[x_i, L_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}\, x_k$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Hinweis: Mit dem Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} ist der Drehimpuls durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, x_j\, p_k\, \mathbf{e}_i$ gegeben.

(b) Rechnen Sie nach, dass $[p_i, L_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}\, p_k$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Poissonklammer der Drehimpulskomponenten $[L_i, L_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}\, L_k$ ist.

Hinweis: Weiterhin ist $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kij}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ und $a_i b_j - a_j b_i = \sum_{klm} \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} a_l b_m$ hilfreich.

(d) Betrachten Sie einen Massepunkt, auf den ein beliebiges Zentralkraftpotential

$$V(x, y, z) = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = V(r)$$

wirkt. Geben sie die Hamiltonfunktion an und berechnen Sie $[L_i, H]$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(f) Was haben Sie durch die Berechnung der Poissonklammern $[L_i, H]$ gezeigt?

[2+2+4+2+1=11 Punkte]