# Übungen zur Theoretischen Physik V

Thermodynamik und Statistik

Wintersemester 2002/2003

H. Fehske / D. Loffhagen

**Blatt 10** Abgabe: 17.12.2002 (vor der Vorlesung)

## Aufgabe 30: Chemisches Potenzial im idealen Gittergas

Berechnen Sie das chemische Potenzial $\mu$ für das ideale Gittergas aus Aufgabe 29

(a) unter der Annahme, dass die Stirling'sche Näherung gültig ist (aber keine weitergehenden Näherungen). Von dieser Beziehung ausgehend, berechnen Sie $\mu$.

(b) für kleine Konzentrationen $n := N/N_0 \ll 1$.

(c) für mittlere Konzentrationen, d.h. solche mit $(N - N_0/2)/N_0 \ll 1$.

(4 Punkte)

## Aufgabe 31: Klassische Ketten mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung

Betrachten Sie $N+1$ Teilchen der Masse $m$ mit Koordinaten $x_0, \ldots, x_N$, die mit ihren jeweils nächsten Nachbarn über ein Potenzial (eine „Feder“ ) $V(r_n)$ wechselwirken, $r_n := x_n - x_{n-1}$, $n = 1, \ldots, N$. Die Hamiltonfunktion des Systems lautet also

$$(*) \qquad H = \sum_{n=0}^{N} \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^{N} V(r_n)\,.$$

Es soll zunächst die klassische kanonische Zustandssumme $Z$ des Systems berechnet werden. Sperrt man das System in einen Kasten fester Länge, so ist dies im Allgemeinen nicht analytisch möglich. Stattdessen empfiehlt sich folgendes Vorgehen: Um eine Volumendivergenz zu vermeiden, die sich aus der Tatsache ergäbe, dass der Schwerpunkt frei beweglich ist, setze man die offene Kette $(*)$ auf einen Ring der Länge $L$ und definiere eine neue Zustandssumme als $Z/L$. Die physikalisch relevante Länge ist nicht $L$, sondern der Abstand $x_N - x_0$ zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kette. Ihn kann man kontrollieren, indem man die Zwangsbedingung $x_N - x_0 - l = 0$ einführt. $H$ geht dann über in $H + p(x_N - x_0 - l)$ mit einem Lagrangeparameter $p$.

(1) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme in ein Produkt $Z_p Z_x$ zerfällt. Der eine Faktor beschreibt den kinetischen Beitrag zur Zustandssumme, der andere den Konfigurations-Beitrag. Wie lautet $Z_p$?

(2) Zeigen Sie durch den Übergang zur Integration über Relativkoordinaten, dass $Z_x$ in ein Produkt aus Beiträgen der einzelnen Federn zerfällt!

(3) Zeigen Sie, dass der Lagrangeparameter $p$ gleich dem Druck ist! Geben Sie die Gleichung an, die $p$ mit $l$ und der Temperatur $T$ verknüpft! Für ein Gas heißt eine solche Gleichung Zustandsgleichung. Welche Bedeutung hat diese Gleichung hier?

(4) Bestimmen Sie die Zustandssumme und Zustandsgleichung der harmonischen Kette,

$$V(r) = \frac{m\omega^2 (r-a)^2}{2} \,.$$

(5) Eine andere Möglichkeit, einen einfachen Ausdruck für die Zustandssumme zu bekommen, besteht in der Verwendung periodischer Randbedingungen. $L$ ist dann die physikalische Länge des Systems, das nun aus $N$ Teilchen der Masse $m$ bestehe. Es sei

$$(**) \qquad H = \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{p_n^2}{2m} + V(r_n) \right)$$

mit $r_n := x_{n+1} - x_n$, $n = 1, \ldots, N$, $x_{N+1} := x_1 + L$. Zeigen Sie, dass sich für den Konfigurations-Anteil der Zustandssumme der folgende Ausdruck ergibt:

$$Z_x = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikL} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dy \, e^{iky} \exp(-\beta V(y)) \right)^N \,.$$

(6) Berechnen Sie die Zustandssumme aus (5) für das Potenzial aus (4)! Wie lauten die Zustandsgleichung und der Ausdruck für die innere Energie $E$?

(8 Punkte)

**Aufgabe 32: Zustandsdichten**

Betrachten Sie ideale Bose- und Fermigase in $d$ Dimensionen. Ist das Volumen, das die Teilchen einschließt, sehr groß, so ersetzt man zweckmäßigerweise Summen über Zustände durch Integrale über Energien. Die Integranden müssen dabei mit der Anzahl der Zustände pro Energieintervall gewichtet werden. Diese Anzahl nennt man Zustandsdichte. Wir wollen sie hier mit $\rho(\varepsilon)$ bezeichnen. Für das großkanonische Potential $\Omega$ ergeben sich mit Hilfe der Zustandsdichte die Ausdrücke

$$\Omega_\pm = \mp kT \int_0^\infty d\varepsilon \, \rho(\varepsilon) \ln\left(1 \pm e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\right) \,.$$

Das Pluszeichen gilt für Fermionen, das Minuszeichen für Bosonen.

(1) Nehmen Sie an, die Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Teilchens sei von der Form $\varepsilon = \varepsilon(p)$, wobei $p$ den Betrag des $d$-dimensionalen Impulses bezeichne. Ferner sei $\varepsilon(p)$ eine monoton wachsende Funktion. Bestimmen Sie $\rho(\varepsilon)$!

(2) Diskutieren Sie den Fall $\varepsilon(p) = p^2/2m$! Skizzieren Sie die Zustandsdichte in einer, in zwei und in drei Dimensionen!

(5 Punkte)