Das Rechnen mit dem Summenzeichen ∑

Definition:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_{N-1} + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

gelesen: Summer aller X_i für i von 1 bis N.

i = Summationsindex

N = Summationsgrenze (Indexnummer des letzten Elemente) = Anzahl der Elemente

Rechenregeln:

Multiplikative Konstante:

$$\sum_{i=1}^{N} c \cdot X_i = c. \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Bildung von Teilsummen:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

nicht möglich bei Multiplikation der Summanden, also

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} X_i \cdot f_i = X_1 f_1 + \ldots + X_N f_N$$

Sonderfall: Summe über eine Konstante::

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} a_i = N \cdot a$$

Ist nur ein Summationsindex vorhanden, dann kann der Summationsindex weggelassen werden.

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} X_i = \sum X_i$$

Achtung: $\sum X_i^2 \neq \left(\sum X_i\right)^2$ und $\sum (a_i - k) \neq \sum a_i - k$

Vereinfachen vom Summentermen

Vorgriff: Die Summenform des arithmetischen Mittels (landläufig auch „Durchschnitt“ genannt) lautet:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Aufgabe 1j

Zu zeigen ist, daß $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{X}$

Lösungsweg:

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - 2x_i\overline{X} + \overline{X}^2) \qquad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2x_i\overline{X} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{X}^2 \qquad | \text{ Teilsummen bilden}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2x_i\overline{X} + \overline{X}^2 \qquad | \text{ da } \overline{\mathrm{X}} \text{ konstant ist } \sum_{i=1}^{N}\overline{X}^2 \text{ gleich } \mathrm{N}\cdot\overline{\mathrm{X}}^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\overline{X}\cdot\overline{X} + \overline{X}^2 \qquad | \text{ da } \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{N} X_i = \overline{X}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{X}^2$$

<u>Sinn der Umformung</u>: Der vereinfachte Ausdruck erspart Rechenaufwand, da das Quadrat des arithmetischen Mittels jetzt **außerhalb** der Summe steht und daher nur noch die Quadrate der einzelnen Werte von x summiert werden müssen.

Vereinfachen von Summentermen II

Aufgabe 1j II

Zu zeigen ist: $COV = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X}).(y_i - \overline{Y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i - \overline{X}\overline{Y}$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i - x_i\overline{Y} - y_i\overline{X} + \overline{X}\overline{Y})$$

$$= \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \frac{1}{N}\sum x_i\overline{Y} - \frac{1}{N}\sum y_i\overline{X} + \frac{1}{N}\sum \overline{X}\overline{Y}$$

$$= \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \overline{X}\overline{Y} - \overline{Y}\overline{X} + \overline{X}\overline{Y}$$

$$= \frac{1}{N}\sum x_i y_i - \overline{X}\overline{Y}$$