Analysis I

für Studenten der Physik und der Lehrämter

Vorlesungsskriptum

von

L. Tobiska

Institut für Analysis und Numerik

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Wintersemester 2003/2004

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Abbildungen, Mengenfamilien

1.1 Mengenbegriff und Grundoperationen

Eine Menge ist eine Gesamtheit von Objekten, die sich durch eine oder auch mehrere Eigenschaften von anderen Objekten unterscheiden. Es ist stets entscheidbar, ob ein konkretes Objekt zur Menge dazugehört oder nicht.

Mengen lassen sich charakterisieren durch

(a) Angabe der (endlich vielen) Elemente,

(b) Angabe einer (oder mehrerer) die Gesamtheit charakterisierenden Eigenschaft.

Beispiele, Bezeichnungen und Sprechweisen:

$x \in M$	x ist Element der Menge M, x gehört zu M
$x \notin M$	x ist kein Element der Menge M, x gehört nicht zu M
$M = \{a, b, c, f\}$	M besteht aus den vier Elementen a, b, c und f
$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$	Menge aller natürlicher Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	Menge aller positiven reellen Zahlen

Es hat sich als günstig erwiesen, auch Mengen mit nur einem bzw. keinem Element zu betrachten. Letztere heißt leere Menge und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

$$\begin{aligned} M &= \{x : x \text{ gerade Primzahl } \} = \{2\} \\ P &= \{x : x \text{ ist reelle Lösung der quadratischen Gleichung } x^2 + 2x + 3 = 0\} \end{aligned}$$

Da aus $x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 3}$ folgt, ist $P = \emptyset$.

DEFINITION 1.1 *Die Menge $M := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ heißt Vereinigung der Mengen M_1 und M_2, in Zeichen $M = M_1 \cup M_2$.*

DEFINITION 1.2 *Die Menge $M := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ heißt Durchschnitt der Mengen M_1 und M_2, in Zeichen $M = M_1 \cap M_2$.*

DEFINITION 1.3 *Die Menge $M := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ heißt Differenz der Mengen M_1 und M_2, in Zeichen $M = M_1 \backslash M_2$.*

DEFINITION 1.4 *Die Menge M_1 heißt Teilmenge der Menge M_2, in Zeichen $M_1 \subset M_2$, wenn für jedes $x \in M_1$ auch $x \in M_2$ gilt.*

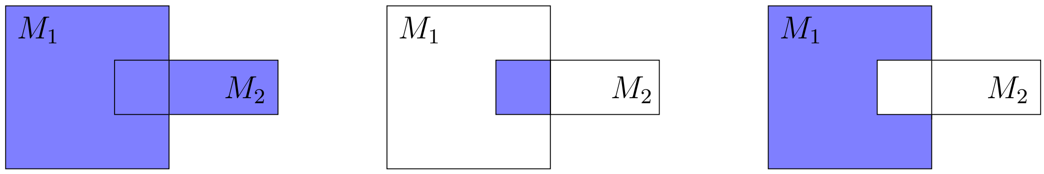

Abbildung 1: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz der Mengen M_1 und M_2.

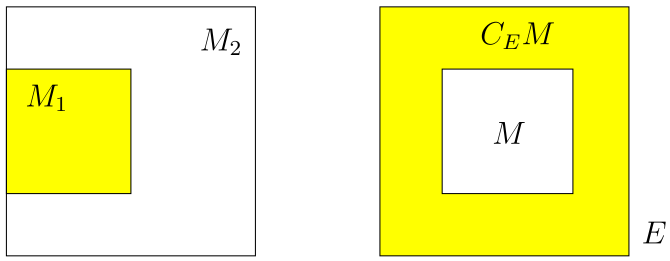

Abbildung 2: Teilmenge M_1 von M_2 und Komplement von M bezüglich E.

Für eine beliebige Menge M gelten die Beziehungen $M \subset M$ und $\emptyset \subset M$.

DEFINITION 1.5 *Seien E eine Menge und $M \subset E$. Die Menge $C_E M := \{x \in E : x \notin M\}$ heißt Komplement der Menge M bezüglich E.*

Betrachten wir folgende Teilmengen reeller Zahlen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \quad M_2 := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} \,.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

$$M_1 \cup M_2 = \mathbb{R}, \quad M_1 \cap M_2 = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}, \quad M_1 \backslash M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\},$$
$$C_{\mathbb{R}} M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}, \quad C_{\mathbb{R}^+} M_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\} \,.$$

1.2 Produkt von Mengen

DEFINITION 1.6 *Seien X und Y zwei Mengen. Unter dem Mengenprodukt $X \times Y$ versteht man die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$, in Zeichen*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \text{ und } y \in Y\} \,.$$

Man beachte, dass das Mengenprodukt im allgemeinen nicht kommutativ ist. Für $X = \{1, 3\}$ und $Y = \{4, 7, 1\}$ gilt

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1,1), (1,4), (1,7), (3,1), (3,4), (3,7)\} \,, \\ Y \times X &= \{(1,1), (1,3), (4,1), (4,3), (7,1), (7,3)\} \,. \end{aligned}$$

Für die Menge $P = X \times (Y \times X)$ haben wir

$$\begin{aligned} P \;=\; & \{(1,(1,1)),(1,(1,3)),(1,(4,1)),(1,(4,3)),(1,(7,1)),(1,(7,3)), \\ & (3,(1,1)),(3,(1,3)),(3,(4,1)),(3,(4,3)),(3,(7,1)),(3,(7,3))\}. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führt man geordnete Tripel

$$(3,7,1) := (3,(7,1)) = ((3,7),1)$$

ein. In diesem Sinne gilt dann das Assoziativgesetz

$$X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z.$$

Die Verallgemeinerung dieses Konzeptes führt auf geordnete n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Das Produkt $X \times Y$ einer Menge X von m-Tupeln mit einer Menge Y von n-Tupeln ist eine Menge von $m + n$-Tupeln. Für das r-fache Produkt von X mit sich selbst schreiben wir einfach X^r.

Die Menge $\mathbb{R}^n$ aller n-Tupel reeller Zahlen kann geometrisch als Menge aller Punkte auf der Zahlengerade ($n = 1$), als Menge aller Punkte in der Ebene ($n = 2$) bzw. als Menge aller Punkte im Raum ($n = 3$) interpretiert werden. Ein n-Tupel reeller Zahlen entspricht genau einem Punkt im n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (vgl. Vorlesung Lineare Algebra).

1.3 Abbildungen, Einschränkungen, Ausdehnungen

DEFINITION 1.7 *Seien X und Y zwei Mengen. Eine Teilmenge F von $X \times Y$ heißt genau dann eine Abbildung von X in Y (oder eine auf X definierte Funktion mit Werten in Y), wenn es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ derart gibt, dass $(x, y) \in F$ gilt. X heißt Definitionsbereich, Y Zielbereich.*

Für $(x, y) \in F$ schreibt man häufig auch $y = F(x)$. Die Abbildung wird durch $F : X \to Y$ und die Angabe der Abbildungsvorschrift $y = F(x)$ charakterisiert. Es ist grundsätzlich zu unterscheiden zwischen der Abbildung F (einer Teilmenge von $X \times Y$) und der Menge aller Funktionswerte $\{F(x) : x \in X\}$ (einer Teilmenge von Y).

Beispiel 1.1 Seien $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ und $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$. Dann sind $X \times Y$ die Menge aller Punkte in der xy-Ebene und F die Menge aller Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt im Ursprung $(0, 0)$ und Radius a. F ist zwar Teilmenge von $X \times Y$, aber keine Abbildung, da

(a) es Punkte $x \in X$ gibt, zu denen kein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$, z.B. $x = 2a$,

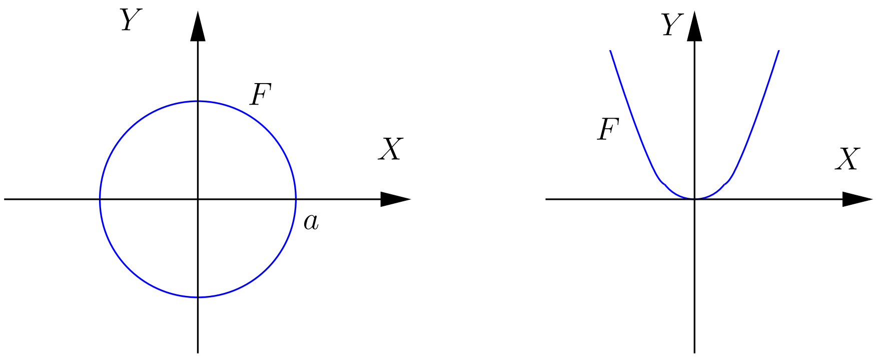

Abbildung 3: Teilmengen F von $X \times Y$, links keine Abbildung (Bsp. 1.1), rechts eine Abbildung (Bsp. 1.2).

(b) es Punkte $x \in X$ gibt, zu denen mehr als ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in F$, z.B. ist für $x = 0$ sowohl $(0, a) \in F$ als auch $(0, -a) \in F$.

Beispiel 1.2 Seien $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ und $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. In diesem Beispiel ist F Abbildung von X in Y.

Beispiel 1.3 Die Menge $X \subset \mathbb{R}^3$ umfasse alle Punkte im Innern eines wärmeleitenden Mediums und sei $Y = \mathbb{R}$. Wir ordnen jedem Raumpunkt $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$ eine örtlich gemittelte Temperatur y zu, also

$$y = F(x) = F(x_1, x_2, x_3) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \in F.$$

Dann ist F eine Abbildung von X in Y, in Zeichen $F : X \to Y$. Auch hier beachte man den Unterschied zwischen dem Temperaturwert $F(x)$ in x und der Temperaturverteilung F.

LEMMA 1.1 *Seien $A \subset X$ eine Teilmenge von X und $F : X \to Y$ eine Abbildung von X in Y. Dann ist $F \cap (A \times Y)$ eine Abbildung von A in Y.*

Beweis:
(i) $F \cap (A \times Y)$ ist eine Teilmenge von $A \times Y$.
(ii) Zu jedem $x \in A \subset X$ gibt es genau ein $y \in Y$ derart, dass $(x, y) \in F$. Nach Konstruktion ist auch $(x, y) \in A \times Y$.

DEFINITION 1.8 *Seien $A \subset X$ und $F : X \to Y$. Die Abbildung $F \cap (A \times Y)$ heißt Einschränkung von F auf A, in Zeichen $F|_A$.*

DEFINITION 1.9 *Unter der Ausdehnung einer Abbildung $F : X \to Y$ auf die Menge $B \supset X$ verstehen wir eine Abbildung $\tilde{F} : B \to Y$, deren Einschränkung auf X mit F übereinstimmt.*

Beachte: Die Einschränkung $F|_A$ einer Abbildung F von X in Y auf A ist eindeutig bestimmt. Es gibt mehrere Ausdehnungen $\tilde{F}$ ein und derselben Abbildung $F : X \to Y$.

Beispiel 1.4 Seien $X = \mathbb{R}^+$, $Y = \mathbb{R}$ und $F : X \to Y$ durch die Zuordnungsvorschrift $y = F(x) = x^2$ gegeben. Die Einschränkung von F auf $\mathbb{N}$ ordnet jeder natürlichen Zahl ihre Quadratzahl zu. Zwei Ausdehnungen von F auf $B = \mathbb{R}$ sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(x) &:= \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x > 0 \\ 2x+1 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \\ \tilde{F}_2(x) &:= \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \geq -2 \\ 0 & \text{für} \quad x < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

gegeben.

1.4 Bilder und Urbilder von Abbildungen

Seien $F : X \to Y$ eine Abbildung von X in Y und A eine Teilmenge von X.

DEFINITION 1.10 *Die Menge*

$$F(A) := \{y \in Y : \text{ es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = F(x)\}$$

heißt Bild von A unter der Abbildung F.

LEMMA 1.2 *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Für jedes $x \in X$ gilt $F(\{x\}) = \{F(x)\}$.

(b) Aus $A \subset B$ folgt $F(A) \subset F(B)$.

(c) Für beliebige Mengen $A \subset X$ und $B \subset X$ gilt

$$F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B).$$

(d) Für beliebige Mengen $A \subset X$ und $B \subset X$ gilt

$$F(A \cup B) = F(A) \cup F(B).$$

Beweis:
Wir weisen exemplarisch die Eigenschaft (c) nach. Sei y im Bild von $A \cap B$ unter F enthalten. Dann existiert ein $x \in A \cap B$ mit $y = F(x)$. Da x im Durchschnitt von A und B liegt, ist $x \in A$ und $x \in B$ und somit $y = F(x) \in F(A)$ und

$y = F(x) \in F(B)$. Folglich liegt y im Durchschnitt der Bilder $F(A)$ und $F(B)$.

Beispiel 1.5 Im allgemeinen gilt in der Aussage (c) nicht das Gleichheitszeichen. Betrachten wir hierzu die durch die Zuordnungsvorschrift $F(x) = x^2$ gegebene Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ und $B = \mathbb{R}^+$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ folgt $F(A \cap B) = \emptyset$. Andererseits schließen wir aus $F(A) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ und $F(B) = \mathbb{R}^+$ für den Durchschnitt der Bilder $F(A) \cap F(B) = \mathbb{R}^+$.

DEFINITION 1.11 *Die Menge*

$$F^{-1}(B) := \{x \in X : F(x) \in B\}$$

heißt Urbild von B unter der Abbildung F.

Beispiel 1.6 $F : W \to \mathbb{R}$ entspreche der Temperaturverteilung in einem Würfel $W \subset \mathbb{R}^3$. Ist B ein vorgegebener Temperaturbereich, etwa $B = \{y \in \mathbb{R} : -10 \leq y < 30\}$, so ist das Urbild $F^{-1}(B)$ von B unter F die Menge aller Punkte des Würfels, die im vorgegebenen Temperaturbereich liegen. Zur Visualisierung von berechneten Temperaturfeldern F werden oft im Schnitt eines Bauteils verschiedene Temperaturbereiche durch unterschiedliche Farben auf dem Bildschirm dargestellt. Um die entsprechenden Bereiche einfärben zu können, sucht man gerade die Urbilder der Temperaturbereiche unter der Abbildung F.

LEMMA 1.3 *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) $F^{-1}(A) = F^{-1}(A \cap F(X))$.

(b) Aus $A \subset B$ *folgt* $F^{-1}(A) \subset F^{-1}(B)$.

(c) $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$.

(d) $F^{-1}(A \cup B) = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$.

(e) Für $B \subset Y$ *gilt* $F(F^{-1}(B)) = B \cap F(X)$.

(f) Für $A \subset X$ *gilt* $F^{-1}(F(A)) \supset A$.

Beweis:
Wir weisen exemplarisch die Aussage (f) nach. Sei $x \in A \subset X$. Dann ist $y = F(x) \in F(A)$. Nach Definition des Urbildes der Menge $F(A)$ gehört x zu $F^{-1}(F(A))$.

Man beachte, dass im allgemeinen in der Aussage (f) nicht das Gleichheitszeichen steht. Sei etwa $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnungsvorschrift $F(x) = x^2$ definiert. Für $A = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ist $F(A) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ und $F^{-1}(F(A)) = \mathbb{R}$.

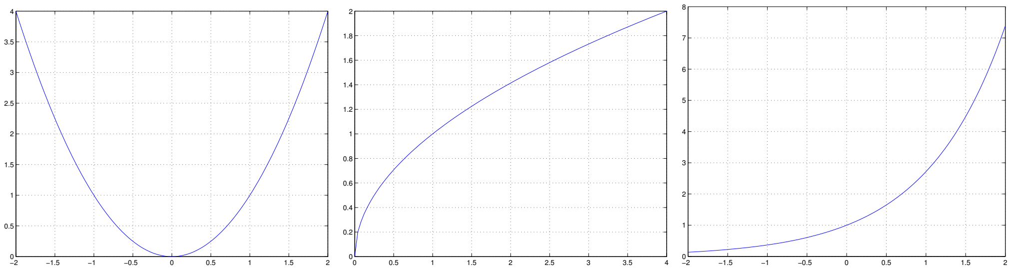

Abbildung 4: Links: nicht injektive und nicht surjektive Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = x^2$; Mitte: bijektive Abbildung $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $F(x) = \sqrt{x}$; Rechts: injektive und nicht surjektive Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = e^x$

1.5 Surjektive, injektive und bijektive Abbildungen

Sei $F : X \to Y$ eine Abbildung von X in Y.

DEFINITION 1.12 *$F : X \to Y$ heißt surjektiv (oder Abbildung von X auf Y), wenn Y das Bild von X unter F ist, in Zeichen $F(X) = Y$.*

DEFINITION 1.13 *$F : X \to Y$ heißt injektiv (oder eineindeutig), wenn aus $F(x_1) = F(x_2)$ die Gleichheit $x_1 = x_2$ folgt.*

DEFINITION 1.14 *$F : X \to Y$ heißt bijektiv (oder umkehrbar eindeutig), falls F surjektiv und injektiv ist.*

Beispiel 1.7 Seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. F ist nicht surjektiv, denn $F(X) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R} = Y$. F ist auch nicht injektiv, denn beispielsweise ist $F(-1) = F(+1)$.

Beispiel 1.8 Seien $X = Y = \mathbb{R}^+$ und $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x\}$. Für jedes $x \in X$ gilt $F(x) = \sqrt{x}$. Aus $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ folgt $x_1 = x_2$, also ist F injektiv. Ferner gilt $F(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, folglich ist F surjektiv und damit auch bijektiv.

Beispiel 1.9 Seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnungsvorschrift $F(x) = exp(x)$ gegeben. F ist injektiv, denn aus $exp(x_1) = exp(x_2)$ folgt $exp(x_1 - x_2) = 1$, also $x_1 - x_2 = 0$ bzw. $x_1 = x_2$. F ist aber nicht surjektiv, da das Bild von $\mathbb{R}$ unter F $\mathbb{R}^+$ ist. Die Abbildung $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $G(x) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist aber surjektiv, da der Zielbereich von F auf das Bild von X unter F eingeschränkt wurde.

THEOREM 1.1 *Die Abbildung $F : X \to Y$ sei bijektiv und die Teilmenge G von $Y \times X$ definiert durch*

$$G := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in F\}.$$

Dann ist G eine bijektive Abbildung von Y auf X.

Beweis:
Da F surjektiv ist, gibt es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $(x, y) \in F$ bzw. $(y, x) \in G$. Diese x ist infolge der Injektivität von F eindeutig bestimmt, denn aus $y = F(x_1) = F(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$. Damit ist G eine Abbildung von Y in X. Nun folgt aus $G(y_1) = G(y_2) = x$ die Beziehungen $(x, y_1) \in F$ und $(x, y_2) \in F$, also $y_1 = y_2$, d.h. G ist injektiv. G ist auch surjektiv, denn zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ derart, dass $(x, y) \in F$ oder gleichbedeutend $(y, x) \in G$.

DEFINITION 1.15 *Die nach Theorem 1.1 existierende bijektive Abbildung G heißt die zu F inverse Abbildung, in Zeichen $G = F^{-1}$.*

Bemerkung: Die eingeführte Notation F^{-1} kann für bijektive Abbildungen $F : X \to Y$ zweifach interpretiert werden, insbesondere ist für eine Teilmenge $B \subset Y$ $F^{-1}(B)$

(a) das Bild von B unter der inversen Abbildung $F^{-1} : Y \to X$ oder

(b) das Urbild von B unter der Abbildung $F : X \to Y$.

Da für bijektive Abbildungen $F : X \to Y$ beide Mengen übereinstimmen, sind jedoch Missverständnisse ausgeschlossen.

1.6 Produkt von Abbildungen

Liegt der Zielbereich einer Abbildung im Definitionsbereich einer weiteren Abbildung, kann man beide Abbildungen hintereinander ausführen.

DEFINITION 1.16 *Seien X, Y und Z nichtleere Mengen, $F : X \to Y$ und $G : Y \to Z$ Abbildungen von X in Y bzw. von Y in Z. Dann definiert die Zuordnungsvorschrift $x \to H(x) = G(F(x))$ für jedes $x \in X$ eine Abbildung $H : X \to Z$, das Produkt der Abbildungen F und G, in Zeichen $H = G \circ F$.*

LEMMA 1.4 *Für das Produkt $H = G \circ F$ gelten folgende Aussagen:*

(a) $H(A) = G(F(A))$ für jede Menge $A \subset X$,

(b) $H^{-1}(B) = F^{-1}(G^{-1}(B))$ für jede Menge $B \subset Z$.

Beweis:
Exemplarisch sei (b) gezeigt. Sei x ein Element des Urbildes von B unter H. Dann gilt $H(x) = G(F(x)) \in B$. Für $y := F(x) \in Y$ gilt dann sowohl $y \in G^{-1}(B) =: A$, als auch $x \in F^{-1}(A)$. Somit gilt zunächst $H^{-1}(B) \subset F^{-1}(G^{-1}(B))$. Für die Umkehrung sei wieder die Abkürzung $A = G^{-1}(B)$ eingeführt. Ist nun $x \in F^{-1}(A)$, so gibt es ein $y = F(x) \in A$ bzw. $y \in G^{-1}(B)$. Dies bedeutet, dass $G(y) = G(F(x)) = H(x)$ in B liegt. Folglich ist $x \in H^{-1}(B)$.

1.7 Vereinigung und Durchschnitt von Mengenfamilien

DEFINITION 1.17 *Sei X eine (Grund-) Menge und Λ eine nichtleere Indexmenge. Jedem $\lambda \in \Lambda$ sei eine Teilmenge $A_\lambda \subset X$ zugeordnet. Die Gesamtheit der A_λ heißt Mengenfamilie, in Zeichen $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.*

DEFINITION 1.18 *Die Menge*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \in X : \exists \lambda \in \Lambda \text{ mit } x \in A_\lambda\}$$

heißt Vereinigung der Mengenfamilie $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Die Menge

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \in X : x \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda\}$$

heißt Durchschnitt der Mengenfamilie $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Für eine zweielementige Indexmenge ist die Vereinigung bzw. der Durchschnitt der Mengenfamilie mit dem bereits eingeführten Begriff der Vereinigung bzw. des Durchschnittes zweier Mengen identisch. Die obige Definition verallgemeinert damit die Begriffe auf den Fall beliebig vieler Mengen.

LEMMA 1.5 *Es gelten die folgenden Aussagen*

$$\begin{aligned}
C_X\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(C_X A_\lambda), \\
\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\bigcap\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} B_\omega\right) &= \bigcup_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega}\left(A_\lambda \bigcap B_\omega\right), \\
\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\bigcup\left(\bigcap_{\omega\in\Omega} B_\omega\right) &= \bigcap_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega}\left(A_\lambda \bigcup B_\omega\right).
\end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen exemplarisch die zweite Eigenschaft. Sei

$$x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\bigcap\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} B_\omega\right).$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \quad \text{und} \quad x \in \left(\bigcup_{\omega\in\Omega} B_\omega\right).$$

Folglich existieren Indizes $\lambda_0 \in \Lambda$ und $\omega_0 \in \Omega$, mit $x \in A_{\lambda_0}$ und $x \in B_{\omega_0}$, so dass $x \in A_{\lambda_0} \cap B_{\omega_0}$. Da das geordnete Paar (λ_0, ω_0) zu $\Lambda \times \Omega$ gehört, ist $x \in \bigcup_{(\lambda,\omega)\in\Lambda\times\Omega}(A_\lambda \bigcap B_\omega)$.

1.8 Mächtigkeit von Mengen

DEFINITION 1.19 *Eine Menge X heißt einer Menge Y gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung F von X auf Y gibt.*

Da die inverse Abbildung F^{-1} der bijektiven Abbildung F bijektiv ist und Y auf X abbildet, ist auch Y der Menge X gleichmächtig. Endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente haben. In diesem Sinne ist der Begriff Mächtigkeit eine gewisse Verallgemeinerung des Begriffes Anzahl. Cantor verfolgte konsequent diesen Gedanken, was zur Brechung zahlreicher Dogmen seiner Zeit führte:

> *Der Teil ist weniger als das Ganze.*

Beispiel 1.10 Betrachte die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen und deren Teilmenge A aller geraden Zahlen. Die Abbildung $F : \mathbb{N} \to A$ mit $F(n) = 2n$ ist bijektiv, also ist die echte Teilmenge der geraden Zahlen der Menge aller natürlichen Zahlen gleichmächtig.

DEFINITION 1.20 *Eine Menge X heißt abzählbar, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.*

Welche Mächtigkeit kann eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ haben ? Beispiele zeigen, dass A endlich oder $\mathbb{N}$ gleichmächtig sein kann. Gibt es weitere Möglichkeiten? Antwort gibt

THEOREM 1.2 *Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ ist endlich oder abzählbar.*

Beweis: Besteht A aus endlich vielen Elementen, so ist nichts zu zeigen. A habe nun unendlich viele Elemente.

x_1 sei kleinstes Element von A
x_2 sei kleinstes Element von $A\backslash\{x_1\}$
$\ldots$
x_n sei kleinstes Element von $A\backslash\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$
$\ldots$

Wir betrachten nun die Abbildung $F : \mathbb{N} \to A$ mit $F(n) = x_n$.

1. F ist injektiv, d.h. $F(n) \neq F(m) \quad \forall n \neq m$, denn für $m > n$ ist $x_m \in A\backslash\{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ aber $x_n \notin A\backslash\{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$.

2. F ist surjektiv, d.h. zu jedem Element $a \in A$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = a = F(n)$. Nach Konstruktion gilt $x_n \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei nun $a \in A$ beliebig, dann gilt insbesondere $x_a \geq a$. Ist m die größte ganze Zahl, für die $x_m < a$, so muss $x_{m+1} = a$ gelten.

Die Frage ist, wie der Begriff B mächtiger als A genau zu fassen ist.

DEFINITION 1.21 *Seien A und B zwei Mengen, es existiere eine bijektive Abbildung von A auf eine (echte) Teilmenge von B aber es existiere keine bijektive Abbildung von A auf B. Dann heißt die Menge B mächtiger als die Menge A.*

THEOREM 1.3 *Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge.*

Beweis: Wählt man $x_1 \in A$ beliebig, so ist die Restmenge $A \backslash \{x_1\}$ unendlich. Wir wählen $x_2 \in A \backslash \{x_1\}$ und die Restmenge ist erneut unendlich, usw.

Damit besitzen abzählbare Mengen die kleinstmögliche Mächtigkeit unendlicher Mengen.

BEMERKUNG 1.1 *Eine unterhaltsame Geschichte über die Mächtigkeit von Mengen ist: Das ungewöhnliche Hotel oder die eintausendunderste Reise des John Tichy. In: N.J. Wilenkin. Unterhaltsame Mengenlehre. S.65-74.*

Fragen: Gibt es (unendliche) Mengen deren Mächtigkeit größer als die der natürlichen Zahlen ist? Gibt es Mengen größter Mächtigkeit?

Seien A eine Menge gegebener Mächtigkeit und B die Menge aller Abbildungen $F : A \to \{0, 1\}$. Dann gilt:

(i) B ist mindestens so mächtig wie A.
Wir betrachten die Abbildung $\Phi : A \to B$, die durch

$$\Phi(a) = F^a \in B \quad \text{mit} \quad F^a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

Man stellt fest, dass Φ injektiv ist. Damit ist $\tilde{\Phi} : A \to \Phi(A)$ mit

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in A$$

eine bijektive Abbildung von A auf eine Teilmenge von B.

(ii) A und B sind nicht gleichmächtig. Angenommen, es gebe eine bijektive Abbildung $\Psi : A \to B$. Für jedes $x \in A$ ist dann $\Psi(x) = F_x \in B$. Betrachten wir nun

$$\phi(x) := 1 - F_x(x).$$

Es sind $\phi \in B$ und $\Psi : A \to B$ bijektiv. Also gibt es ein $b \in A$ mit $\Psi(b) = F_b(\cdot) = \phi$. Damit gilt für alle $x \in A$ $F_b(x) = \phi(x) = 1 - F_b(x)$, insbesondere für $x = b$

$$F_b(b) = 1 - F_b(b) \quad \Rightarrow F_b(b) = \frac{1}{2},$$

im Widerspruch zur Definition der Menge B.

THEOREM 1.4 *Es gibt keine Menge maximaler Mächtigkeit.*

2 Reelle Zahlen und komplexe Zahlen

2.1 Axiome der reellen Zahlen

Ausgehend von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ führt die Forderung der Ausführbarkeit der Subtraktion zur Menge der ganzen Zahlen, die Ausführbarkeit der Division zu den rationale Zahlen und die Ausführbarkeit des Wurzelziehens aus nichtnegativen rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen (irrationale und rationale Zahlen).

Wir beschränken uns hier mit einer axiomatischen Einführung der reellen Zahlen. Man kann sie auch aus Axiomen der Mengenlehre ableiten. Hierfür sei auf die Literatur, z.B. Landau: Grundlagen der Analysis. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930, verwiesen.

DEFINITION 2.1 *Der Körper der reellen Zahlen ist eine Menge $\mathbb{R}$, für die zwei Abbildungen $(x, y) \to x + y$ und $(x, y) \to xy$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ und eine Relation $x \leq y$ (auch $y \geq x$ geschrieben) zwischen Elementen von $\mathbb{R}$ definiert sowie die folgenden vier Gruppen von Axiomen erfüllt sind:*

1. Die Menge $\mathbb{R}$ ist ein Körper.
   - (a) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,
   - (b) $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
   - (c) es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
   - (d) zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{R}$ derart, dass $x + (-x) = 0$,
   - (e) $x(yz) = (xy)z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,
   - (f) $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
   - (g) es gibt ein Element $1 \neq 0$ in $\mathbb{R}$ derart, dass $1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
   - (h) zu jedem $x \neq 0$ in $\mathbb{R}$ gibt es ein Element $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (auch $1/x$ geschrieben) derart, dass $xx^{-1} = 1$,
   - (i) $x(y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Die Menge $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper.
   - (a) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$,
   - (b) die Aussage ($x \leq y$ und $y \leq x$) ist äquivalent mit $x = y$,
   - (c) für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$,
   - (d) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$,
   - (e) aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

Die Relation ($x \leq y$ und $x \neq y$) wird $x < y$ oder $y > x$ geschrieben. Sind a, b Elemente von $\mathbb{R}$ mit $a < b$, so nennt man

$$\begin{array}{rcll} (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \end{array}$$

mit dem Anfangspunkt a und dem Endpunkt b.

3. Die Menge $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch geordneter Körper, d.h., es gilt das archimedische Axiom:
   Zu jedem Paar x, y reeller Zahlen mit $0 < x$, $0 \leq y$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $y \leq nx$.

4. Die Menge $\mathbb{R}$ genügt dem Intervallschachtelungsaxiom.
   Sind bei einer Folge $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle für jedes n die Bedingungen $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_{n+1} \leq b_n$ erfüllt, so ist der Durchschnitt dieser Folge nicht leer.

2.2 Ordnungseigenschaften der reellen Zahlen

LEMMA 2.1 *Für jedes Paar reller Zahlen x, y gilt genau eine der drei Relationen $x < y$, $x = y$, $x > y$.*

Beweis. Für $x \neq y$ kann $x < y$ und $x > y$ nicht gleichzeitig gelten.

LEMMA 2.2 *Die Beziehungen ($x \leq y$ und $y < z$) und ($x < y$ und $y \leq z$) ziehen beide die Beziehung $x < z$ nach sich.*

Beweis. Zunächst folgt in beiden Fällen $x \leq z$. Angenommen, dass $x = z$ gilt. Dann ist aber $x \leq y$ und $y < x$ (oder $x < y$ und $y \leq x$) im Widerspruch zu obigem Lemma.

LEMMA 2.3 *Genügen die $2n$ Zahlen x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$ für jedes i der Bedingung $x_i \leq y_i$, so ist*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Gilt zusätzlich $x_i < y_i$ für wenigstens einen Index i, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Beweis. Aus den Axiomen folgt zunächst die Richtigkeit für $n = 2$

$$x_1 + x_2 \leq y_1 + x_2 \leq y_1 + y_2.$$

Ferner folgt aus $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ auch $x_1 + x_2 = y_1 + x_2 = y_1 + y_2$, also $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$, d.h., die zweite Behauptung für $n = 2$. Die Richtigkeit des Lemma für mehr als zwei Summanden folgt nun durch vollständige Induktion.

Spezialfall: Sind $x_1, \ldots, x_n$ nichtnegativ, so gilt dies auch für $x_1 + \ldots + x_n$. Ferner ist $x_1 + \ldots + x_n > 0$, außer im Fall $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

LEMMA 2.4 *Die Relation $x \leq y$ ist äquivalent mit $x + z \leq y + z$. Diese Behauptung gilt auch, wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird.*

Beweis. Aus $x \leq y$ folgt bereits $x + z \leq y + z$ (Axiom 2(d)). Sei umgekehrt $x + z \leq y + z$. Dann folgt durch Addition mit $(-z)$ auch

$$x = x + z + (-z) \leq y + z + (-z) = y.$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Äquivalenz von $x = y$ zu $x + z = y + z$.

Spezialfälle: Setzt man nacheinander $z = -x$, $z = -y$ und $z = -x + (-y)$, erhält man die Äquivalenz der Relationen

$$x \leq y, \quad 0 \leq y - x, \quad x - y \leq 0, \quad -y \leq -x.$$

Analoges gilt, wenn man $\leq$ durch $<$ ersetzt.

Für jede reelle Zahl x definieren wir den absoluten Betrag von x durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Ferner seien der positive Teil und negative Teil von x durch

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2} \qquad x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

bezeichnet, so dass $x = x^+ - x^-$ und $|x| = x^+ + x^-$ gelten.

LEMMA 2.5 *Ist $a > 0$, so ist die Relation $|x| \leq a$ äquivalent mit $-a \leq x \leq a$, die Relation $|x| < a$ äquivalent mit $-a < x < a$.*

Beweis. Im Fall $x \geq 0$ haben wir $0 \leq x = |x| \leq a$ oder $0 \leq x = |x| < a$. Im anderen Fall gilt für $x < 0$ die Beziehung $-x = |x| \leq a$, d.h., $-a \leq x < 0$, oder $-x = |x| < a$, d.h., $-a < x < 0$.

LEMMA 2.6 *(Dreiecksungleichung) Für jedes Paar reeller Zahlen x, y gilt*

$$|x+y| \le |x| + |y|, \quad \textit{und} \quad ||x| - |y|| \le |x-y|.$$

Beweis. Die erste Beziehung ist für $x, y \ge 0$ oder für $x, y < 0$ offensichtlich. Für unterschiedliches Vorzeichen, etwa $x \le 0 < y$ ist

$$x + y \le y \le y + |x| = |x| + |y| \quad \text{und} \quad x + y \ge x \ge x - |y| = -|x| - |y|.$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, denn wegen

$$\begin{aligned} |x| = |y + (x-y)| &\le |y| + |x-y| \\ |y| = |x + (y-x)| &\le |x| + |y-x| \end{aligned}$$

ist

$$-|x-y| \le |x| - |y| \le |x-y|.$$

FOLGERUNG 2.1 *Durch vollständige Induktion erhalten wir*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

LEMMA 2.7 *Ist $z \ge 0$, so folgt aus $x \le y$ die Beziehung $xz \le yz$. Aus $x \le 0$ und $y \ge 0$ folgt $xy \le 0$, aus $x \le 0$ und $y \le 0$ folgt $xy \ge 0$. Gleiche Beziehungen gelten bei der Ersetzung von $\le$ durch $<$. Insbesondere ist $x^2 \ge 0$ für jede reelle Zahl x und $x^2 > 0$ außer für $x = 0$.*

Beweis. Einfache Anwendung der Axiome und Folgerungen.

LEMMA 2.8 *Für $x > 0$ ist $x^{-1} > 0$. Für $z > 0$ ist $x \le y$ mit $xz \le yz$ äquivalent. Die Beziehung $0 < x < y$ ist mit $0 < y^{-1} < x^{-1}$ äquivalent.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt wegen $xx^{-1} = 1 > 0$. Die zweite folgt mit $x = (xz)z^{-1}$ aus der ersten. Die dritte Behauptung ist die Folge der zweiten.

Reelle Zahlen der Form $\pm r/s$, wobei $r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $s \in \mathbb{N}$, werden rationale Zahlen genannt.

THEOREM 2.1 *Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Menge aller positiven rationalen Zahlen abzählbar ist. Da die Vereinigung der abzählbaren Mengen $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^-$ wieder abzählbar ist, folgt hieraus die Behauptung. Wir betrachten die surjektive Abbildung $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ mit $\Phi(m,n) := m/n$. Wir schränken nun Φ auf eine geeignete Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein, so dass die Einschränkung surjektiv und injektiv ist. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist (Diagonalverfahren), ist diese Teilmenge höchstens abzählbar (wegen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ abzählbar).

THEOREM 2.2 *Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

Beweis. Siehe beispielsweise Dieudonné Kap. 2.

2.3 Obere und untere Grenze

DEFINITION 2.2 *Eine reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt obere (untere) Schranke einer Menge X reeller Zahlen, wenn $x \leq b$ $(b \leq x)$ für jedes $x \in X$ gilt.*

DEFINITION 2.3 *Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt (nach unten beschränkt), wenn die Menge der oberen (unteren) Schranken nicht leer ist. Eine Menge X reeller Zahlen, die nach oben und unten beschränkt ist, heißt beschränkt.*

THEOREM 2.3 *Ist eine nichtleere Teilmenge X von $\mathbb{R}$ nach oben (nach unten) beschränkt, so besitzt die Menge aller oberen Schranken M ein kleinstes Element (unteren Schranken ein größtes Element).*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall einer nach oben beschränkten Menge. Der Beweis im Fall einer nach unten beschränkten Menge ist analog.

1. Konstruktion einer Intervallschachtelung.
   Seien $a \in X$ und $b \in M$, d.h., $a \leq b$. $\mathbb{R}$ ist archimedisch geordnet, also finden wir zu $b - a \geq 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $m\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq b - a$. Dies bedeutet, dass $a + m\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq b$ eine obere Schranke für die Menge X ist. Wir verkleinern diese obere Schranke und bezeichnen mit p_n die kleinste natürliche Zahl m, für die $a + m\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (noch) eine obere Schranke von X ist. Wir betrachten nun die Folge abgeschlossener Intervalle
   $$I_n = \left[a + (p_n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n, a + p_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad n \in \mathbb{N}.$$
   Wir stellen zunächst fest, dass $I_n \cap X \neq \emptyset$, denn im Fall $p_n = 1$ gehört zumindest a zum Durchschnitt und für $p_n > 1$ folgt aus $I_n \cap X = \emptyset$, dass $a + (p_n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ eine obere Schranke von X ist, im Widerspruch zur Definition von p_n. Wegen
   $$p_n\left(\frac{1}{2}\right)^n = (2p_n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
   folgt $p_{n+1} \leq 2p_n$. Nun war
   $$a + (p_n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = a + (2p_n - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
   keine obere Schranke von X, also gilt $p_{n+1} > 2p_n - 2$. Damit kann p_{n+1} nur $2p_n$ oder $2p_n - 1$ sein. Somit haben wir eine Intervallschachtelung $I_{n+1} \subset I_n$.

2. Es gibt nur eine reelle Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
   Angenommen es gibt zwei reelle Zahlen α, β mit $\alpha < \beta$, die im Durchschnitt der I_n liegen. Dann gehört auch $[\alpha, \beta]$ zu allen Intervallen I_n, insbesondere gilt dann $\beta - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ bzw. $2^n(\beta - \alpha) \leq 1$. Da jedoch $2^n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dies ein Widerspruch zur archimedischen Ordnung von $\mathbb{R}$.

3. Die Zahl γ ist obere Schranke von X.
   Angenommen es gäbe ein $x \in X$ mit
   $$x > \gamma \geq a + (p_n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem archimedischen Axiom gibt es dann eine natürliche Zahl n^*, für die $(x-\gamma)2^{n^*} > 1$ ist. Dies ist aber gleichbedeutend mit
   $$x > \gamma + \left(\frac{1}{2}\right)^{n^*} \geq a + p_{n^*}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^*}$$
   im Widerspruch zur Definition von p_n.

4. Die Zahl γ ist die kleinste aller oberen Schranken.
   Angenommen, es gäbe eine kleinere obere Schranke $y < \gamma$ von X. Dann gibt es nach dem archimedischen Axiom eine natürliche Zahl n für die $(\gamma - y)2^n > 1$ gilt. Hieraus folgt
   $$a + p_n\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \gamma > y + \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$
   d.h.,
   $$y < a + (p_n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   im Widerspruch zu y ist obere Schranke von X.

DEFINITION 2.4 *Für eine nach oben beschränkte Menge X reeller Zahlen bezeichnet* $\sup X$ *das kleinste Element der Menge aller oberen Schranken von X. Entsprechend wird für eine nach unten beschränkte Menge X reeller Zahlen das größte Element der Menge aller unteren Schranken mit* $\inf X$ *bezeichnet.*

2.4 Komplexe Zahlen

Für den Aufbau der (reellen) Analysis könnte man auf die komplexen Zahlen verzichten, dennoch ist es sehr nützlich sie zur Verfügung zu haben. Sie ermöglichen erst eine vertiefte Einsicht in die Zusammenhänge zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen. Sie gehören heute zum Standardwerkzeug von Ingenieuren, Naturwissenschaftler und Mathematiker.

Ein algebraischer Mangel der reellen Zahlen besteht darin, dass es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat -1 ist, denn alle Quadrate reeller Zahlen sind nicht negativ. Dieses Manko wird durch Einführung der komplexen Zahlen beseitigt. Allerdings müssen wir auf eine angenehme Eigenschaft der reellen Zahlen verzichten: Die komplexen Zahlen lassen sich nicht zu einem angeordneten Körper machen.

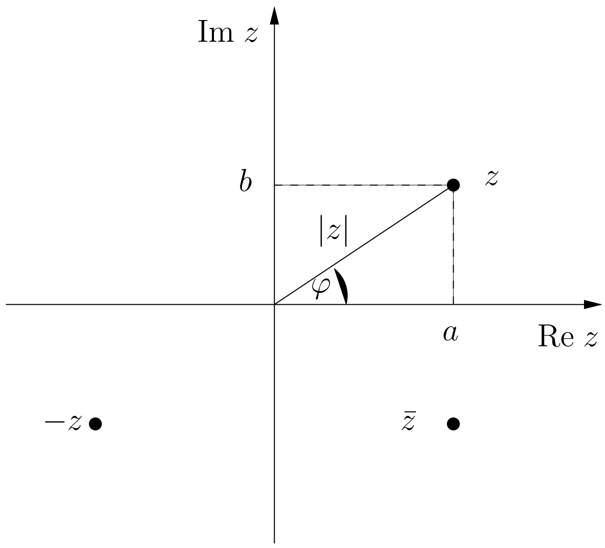

Abbildung 5: Komplexe Zahlen.

DEFINITION 2.5 *Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (a, b) reeller Zahlen. Zwei Paare (a, b) und (c, d) sind gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Mit $\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Menge aller komplexen Zahlen.*

Spätestens seit Gauss interpretiert man die komplexen Zahlen als Punkte in der Zahlenebene (vgl. Abb. 5). Die erste Komponente des Paares $z = (a, b)$ wird Realteil von z, die zweite Komponente Imaginärteil von z genannt, in Zeichen Re $z = a$, Im $z = b$. Wir erklären die Addition und die Multiplikation der komplexen Zahlen (a, b) und (c, d) durch

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d)\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

THEOREM 2.4 *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.*

Nullelement der Addition ist die komplexe Zahl $(0, 0)$, das zu $z = (a, b)$ inverse Element ist $-z = (-a, -b)$, Einselement der Multiplikation ist die komplexe Zahl $(1, 0)$ und das zu $0 \neq z = (a, b)$ inverse Element (bzgl. der Multiplikation) ist

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right).$$

Die reellen Zahlen können als Teilmenge der komplexen Zahlen aufgefasst werden, in diesem Sinne identifiziert man die komplexe Zahl $(a, 0)$ mit der reellen Zahl a.

Insbesondere gilt dann für die Summe und das Produkt zweier reeller Zahlen $a, c \in \mathbb{R}$

$$a + c = (a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) = a + c,$$
$$ac = (a, 0) \cdot (c, 0) = (ac - 0, 0 + 0) = ac.$$

In der Menge der komplexen Zahlen gibt es eine weitere fundamentale Zahl, die *imaginäre Einheit* $\mathbf{i} := (0, 1)$. Für sie ist $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Sie ist also eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ in der Menge der komplexen Zahlen.

Die komplexe Zahl $z = (a, b)$ können wir auch in *Normalform*

$$z = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + \mathbf{i}b$$

schreiben. Es sei vermerkt, dass die üblichen Rechenregeln für algebraische Ausdrücke angewendet werden dürfen, insbesondere gilt für die Multiplikation

$$(a + \mathbf{i}b) \cdot (c + \mathbf{i}d) = (ac + \mathbf{i}bc + a\mathbf{i}d + \mathbf{i}^2 bd) = (ac - bd) + \mathbf{i}(ad + bc).$$

DEFINITION 2.6 *Ist $z = (a, b) = a + \mathbf{i}b$ eine komplexe Zahl, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, so heißt $\bar{z} := (a, -b) = a - \mathbf{i}b$ die konjugiert komplexe Zahl und $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der absolute Betrag von z.*

Für eine reellen Zahl $a = (a, 0)$ ist der Betrag der komplexen Zahl

$$|(a, 0)| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

gleich $|a|$. Neben der Normalform ist noch die *trigonometrische Form komplexer Zahlen* üblich, bei der der Betrag $r = |z|$ und der Winkel φ angegeben werden (vgl. Abb. 5). Man beachte, dass der komplexen Zahl Null kein Winkel zugeordnet werden kann und für alle komplexen Zahlen $z \neq 0$ der Winkel nur bis auf einen additiven Term, der ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, angegeben werden kann. Der Zusammenhang zur Normalform ergibt sich durch

$$z = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) = r \cos \varphi + \mathbf{i} r \sin \varphi = a + \mathbf{i}b.$$

Auf Grund der Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen gestaltet sich die Multiplikation komplexer Zahlen in trigonometrischer Form besonders einfach: Seien $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + \mathbf{i} \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + \mathbf{i} \sin \varphi_2)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &\qquad + \mathbf{i}(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i} \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

d.h. die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert.

3 Metrische Räume

In diesem Abschnitt treten wir in die eigentliche Welt der Analysis ein, die zu einem wesentlichen Teil auf dem Begriff der Konvergenz aufgebaut ist. Das Konzept der Konvergenz erlaubt uns in gewissem Sinne, unendlich viele (Rechen-) Operationen durchzuführen, ein wesentlicher Unterschied zur Algebra. Präzisiert man die naiv-anschaulichen Vorstellungen von Häufungspunkten und konvergenten (Zahlen-)Folgen, so gelangt man in natürlicher Weise zu den Begriffen des Abstandes, der Umgebung eines Punktes und des metrischen Raumes.

3.1 Begriff des metrischen Raumes

Wir weisen auf folgende Zusatzliteratur hin:

H. Belkner: Metrische Räume. Teubner Verlag. Leipzig. 1972
A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Reelle Funktionen und Funktionalanalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin. 1975

Der Raumbegriff wird in den Disziplinen unterschiedlich interpretiert.

Brockhaus, ABC Physik: *Grundbegriff zur Erfassung der gegenseitigen Anordnung von Körpern und Feldern.*
Mathematisches Wörterbuch: *Menge, zwischen deren Elemente Beziehungen erklärt sind.*

BEISPIEL 3.1 *Der Abstand zweier reeller Zahlen auf der Zahlengerade ist eine Abbildung, die zwei reellen Zahlen eine nichtnegative Zahl zuordnet, in Zeichen* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ *mit* $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$, *mit folgenden Eigenschaften:*
(M1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,
(M3) $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

BEISPIEL 3.2 *Wir betrachten die Menge aller Tripel* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *reeller Zahlen und setzen* $E = \mathbb{R}^3$. *Dann ist der Euklidische Abstand (vgl. Abb. 6)*

$$d(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

zwischen zwei Punkten $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ *und* $y = (y_1, y_2, y_3) \in E$ *eine Abbildung* $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ *mit den Eigenschaften*
(M1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$,
(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E$.

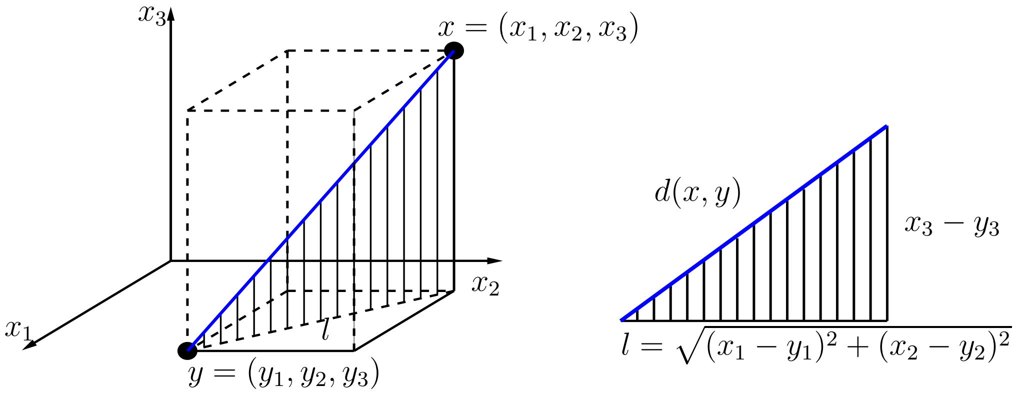

Abbildung 6: Euklidischer Abstand zweier Punkte in $\mathbb{R}^3$

Beweis. (M1) und (M2) sind unmittelbar klar. (M3) folgt aus

$$\begin{aligned}
|x_i - y_i| &\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \\
\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^{3}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{3}|x_i - z_i|\,|z_i - y_i| + \sum_{i=1}^{3}(z_i - y_i)^2.
\end{aligned}$$

Wir wenden die Schwarzsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{1/2} \qquad n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

für $n = 3$, $a_i = |x_i - z_i|$ und $b_i = |z_i - y_i|$ an und erhalten

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2 \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{3}(x_i - z_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{3}(z_i - y_i)^2\right)^{1/2}\right]^2,$$

oder äquivalent

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Verallgemeinerung der ermittelten Eigenschaften und Axiomatisierung führen zum Begriff des metrischen Raumes. Dabei wird die geometrische Sprache (Punkt, Abstand, usw.) beibehalten.

DEFINITION 3.1 *Sei E eine nichtleere Menge. Ein Abstand auf E ist eine Abbildung $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ mit folgenden Eigenschaften:*
(M1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$ (Symmetrie),
(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E$ (Dreiecksungleichung).
Das Paar (E, d) heißt metrischer Raum. Falls es aus dem Zusammenhang klar ist, auf welche Metrik wir uns beziehen, schreiben wir einfach E für (E, d).

BEISPIEL 3.3 *Seien $E = \mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen und für $z_1 = (a_1, b_1) \in E$, $z_2 = (a_2, b_2) \in E$ eine Abbildung $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ durch*

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

definiert. (E, d) ist ein metrischer Raum.

Beweis. Die Eigenschaften lassen sich analog zum Beispiel *Euklidicher Abstand im* $\mathbb{R}^3$ zeigen, wenn die anstelle der Dimension drei die Dimension zwei verwendet wird.

BEISPIEL 3.4 *Seien $E = \mathbb{R}^3$ und für $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in E$ eine Abbildung $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ durch*

$$d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

definiert. (E, d) ist ein metrischer Raum.

Beweis. Man sieht sofort, dass (M1) und (M2) gelten. (M3) folgt aus

$$|x_i - y_i| = |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \quad i = 1, 2, 3,$$

durch Addition.

Der oben definierte Abstand heißt auch Manhattan-Abstand (vgl. Abb. 7). Um vom Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ zum Punkt $y = (y_1, y_2, y_3)$ zu kommen, muss man folgende Entfernungen zurücklegen:

> $|x_1 - y_1|$ entlang der dritten Avenue, $|x_2 - y_2|$ entlang der fünften Street und $|x_3 - y_3|$ von ebener Erde in den 37. Stock.

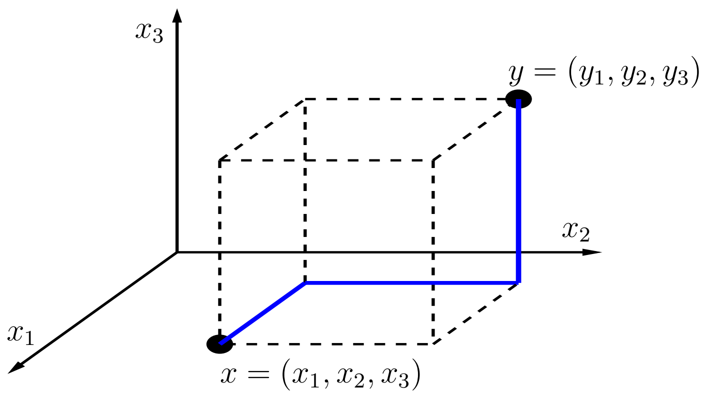

Abbildung 7: Manhattan-Abstand zweier Punkte in $\mathbb{R}^3$

DEFINITION 3.2 *Seien (E, d) ein metrischer Raum und $A \subset E$. Dann genügt offenbar die Einschränkung von d auf $A \times A$ den Bedingungen (M1)-(M3) und $(A, d|_{A \times A})$ ist ein metrischer Raum. Die Einschränkung $d|_{A \times A}$ heißt die von d auf A induzierte Metrik.*

3.2 Kugeln, Sphären, Durchmesser und Abstand von Mengen

DEFINITION 3.3 *Seien (E,d) ein metrischer Raum, $a \in E$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann heißen die Mengen*

$$\begin{array}{rcll} B(a,r) & := & \{x \in E \,:\, d(x,a) < r\} & \textit{offene Kugel,} \\ \bar{B}(a,r) & := & \{x \in E \,:\, d(x,a) \leq r\} & \textit{abgeschlossene Kugel,} \\ S(a,r) & := & \{x \in E \,:\, d(x,a) = r\} & \textit{Sphäre} \end{array}$$

um a mit Radius r.

BEISPIEL 3.5 *Seien $E = \mathbb{R}$ und $d(x,y) = |x-y|$. Dann stimmen die offene, die abgeschlossene Kugel bzw. die Sphäre mit folgenden Mengen überein: $B(a,r) = (a-r, a+r)$, $\bar{B}(a,r) = [a-r, a+r]$ und $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$.*

BEISPIEL 3.6 *Seien $E = \mathbb{R}^2$ und d_1 der Euklidische sowie d_2 der Manhatten-Abstand. Dann ist $B(a,r)$ in (E,d_1) die Menge aller Punkte im Inneren eines Kreises mit dem Mittelpunkt in a und dem Radius r während $B(a,r)$ in (E,d_2) die Menge aller Punkte im Inneren eines auf die Spitze gestellten Quadrates um a mit der Seitenlänge $\sqrt{2}r$ ist (vgl. Abb. 8).*

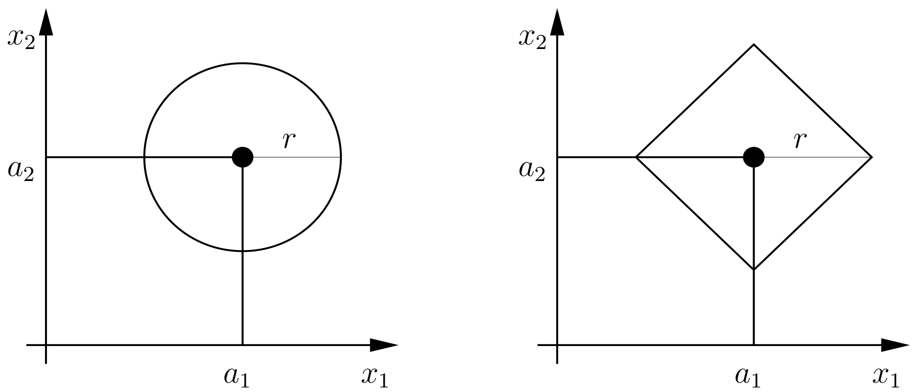

Abbildung 8: Kugeln in (E,d_1) und (E,d_2)

DEFINITION 3.4 *Seien $A, B \subset E$ und (E,d) ein metrischer Raum. Unter dem Abstand der Mengen A und B versteht man die nichtnegative Zahl*

$$d(A,B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y).$$

Falls eine der Mengen nur aus einem Punkt x besteht, sprechen wir vom Abstand des Punktes x zur Menge A und schreiben

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y)$$

(vgl. Abb. 9).

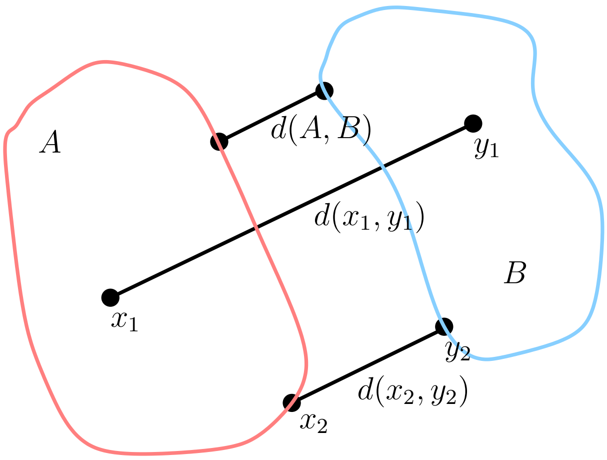

Abbildung 9: Abstand der Mengen A und B

DEFINITION 3.5 *Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt im metrischen Raum (E,d) beschränkt, wenn es eine Konstante $M > 0$ derart gibt, dass $d(x,y) \leq M$ für alle $x, y \in A$ gilt. Für eine beschränkte Menge A ist der Durchmesser von A,*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y),$$

endlich.

3.3 Konvergente Folgen in metrischen Räumen

DEFINITION 3.6 *Sei E eine Menge. Abbildungen von $\mathbb{N}$ in E heißen Folgen in E. Ist $\varphi : \mathbb{N} \to E$ eine Folge, so schreiben wir auch*

$$(x_n), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{oder } (x_1, x_2, \ldots)$$

für φ, wobei $x_n := \varphi(n)$ das n-te Glied der Folge ist.

DEFINITION 3.7 *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt im metrischen Raum (E,d) konvergent gegen $x_0 \in E$, wenn zu jeder vorgegebenen Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ eine Indexschranke $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n > n_0(\varepsilon)$ $\quad d(x_n, x_0) < \varepsilon$ gilt, in Zeichen*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{in } E, \qquad x_n \to x_0 \quad \text{in } E.$$

Beachte: Für jede Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ liegen außerhalb der offenen Kugel $B(x_0, \varepsilon)$ höchstens endlich viele Folgenglieder.

DEFINITION 3.8 *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt im metrischen Raum divergent, wenn es kein $x_0 \in E$ gibt, so dass $x_n \to x_0$ in E.*

BEISPIEL 3.7 *Im metrischen Raum* $\mathbb{R}$ *ist*

$$\left(\frac{n-1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \dots\right\}$$

gegen $x_0 = 1/2$ *konvergent. In der Tat gilt*

$$d(x_n, x_0) = \left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \textit{für } n > \frac{1}{2\varepsilon} =: n_0(\varepsilon).$$

BEISPIEL 3.8 *Im metrischen Raum* $(\mathbb{C}, d)$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, *der komplexen Zahlen ist die komplexe Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$z_n := \frac{n+2}{n+1} + i\frac{2n}{n+2}$$

gegen $z_0 = 1 + 2i$ *konvergent. Nach Definition des Abstandes in* $\mathbb{C}$ *haben wir*

$$\begin{aligned} d(z_n, z_0) &= \left|\frac{n+2}{n+1} + i\frac{2n}{n+2} - (1+2i)\right| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{4i}{n+2}\right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{16}{(n+2)^2}} < \frac{\sqrt{17}}{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

für $n > \sqrt{17}/\varepsilon - 1 := n_0(\varepsilon)$ *(vgl. Abb. 10).*

3.4 Eigenschaften konvergenter Folgen

THEOREM 3.1 *Im metrischen Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, es gibt zwei Grenzwerte x_0 und x_0^*. Nach Definition finden wir zu jeder Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ Indexschranken $n_0(\varepsilon/2)$ und $n_0^*(\varepsilon/2)$, so dass

$$\begin{array}{ll} \forall n > n_0(\frac{\varepsilon}{2}) & d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n > n_0^*(\frac{\varepsilon}{2}) & d(x_n, x_0^*) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

gilt. Damit haben wir für alle

$$n > \max(n_0(\frac{\varepsilon}{2}), n_0^*(\frac{\varepsilon}{2}))$$

die Ungleichungskette

$$0 \le d(x_0, x_0^*) \le d(x_0, x_n) + d(x_n, x_0^*) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $d(x_0, x_0^*) = 0$ gelten im Widerspruch zur Annahme es gäbe zwei Grenzwerte.

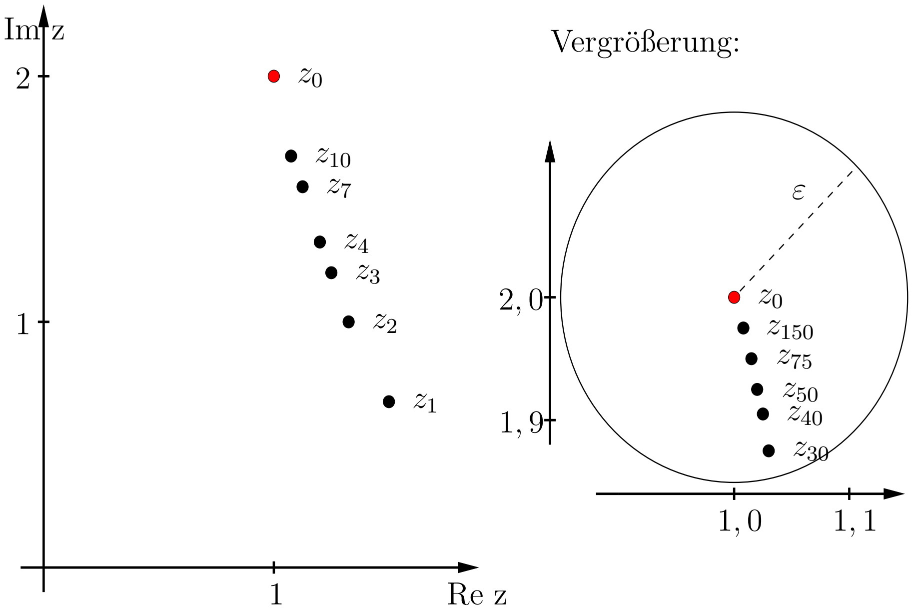

Abbildung 10: Darstellung der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen

THEOREM 3.2 *Im metrischen Raum ist jede konvergente Folge beschränkt.*

Beweis. Wegen

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_n, x_0) \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

genügt es, die Beschränktheit von $d(x_n, x_0)$ für $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Wir setzen $\varepsilon = 1$. Dann liegen außerhalb der Kugel $B(x_0, 1)$ höchstens die endlich vielen Folgenglieder $x_1, \ldots, x_N$ mit $N \leq n_0(1)$. Sei $R := \max(1, d(x_1, x_0), \ldots, d(x_N, x_0))$. Dann haben wir

$$d(x_n, x_0) \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

DEFINITION 3.9 *Es sei $\varphi = (x_n)$ eine Folge in E, und $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt wachsend, d.h., aus $m < n$ folgt $\psi(m) < \psi(n)$. Dann heißt $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to E$ Teilfolge von φ. In Analogie zur Notation (x_n) schreiben wir kurz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $n_k := \psi(k)$. Da ψ strikt wachsend ist, gilt $n_1 < n_2 < \ldots$.*

BEISPIEL 3.9 *Ausgehend von der Folge*

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

erhalten wir Teilfolgen durch Angabe der strikt wachsenden Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
n_k = \psi(k) = 2k : \quad & \left(\frac{1}{2k}\right) &= \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\} \\
n_k = \psi(k) = 2k+1 : \quad & \left(\frac{1}{2k+1}\right) &= \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\} \\
n_k = \psi(k) = k^2 : \quad & \left(\frac{1}{k^2}\right) &= \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\}
\end{aligned}$$

THEOREM 3.3 *Es sei (x_n) konvergent mit Grenzwert x_0. Dann ist auch jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n) konvergent, und es gilt $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.*

Beweis. Für jede Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ gibt es eine Indexschranke $n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n > n_0(\varepsilon)$ $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Da ψ strikt wachsend ist, gilt $n_k \geq k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und damit auch für jedes $k > n_0(\varepsilon)$ $d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$.

3.5 Cauchyfolgen und Vollständigkeit metrischer Räume

Bei der Definition konvergenter Folgen tritt der Grenzwert explizit auf. In diesem Abschnitt werden wir das Konzept der Cauchyfolgen einführen, das es ermöglicht, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, ohne den Grenzwert zu kennen.

> Cauchy, Augustin-Louis 21.8.1789-13.5.1857 franz. Mathematiker, Verdienste beim strengen Aufbau der Analysis, Begründer der Funktionentheorie

DEFINITION 3.10 *Eine Folge heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $m, n > n_0(\varepsilon)$ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ gilt.*

BEISPIEL 3.10 *Im metrischen Raum $\mathbb{R}$ ist*

$$(x_n) = \left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

Cauchyfolge, denn für alle $m \geq n$ gilt

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{m-1}{2m} - \frac{n-1}{2n}\right| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right| < \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

falls nur $m \geq n > \dfrac{1}{2\varepsilon} =: n_0(\varepsilon)$.

THEOREM 3.4 *(Notwendiges Konvergenzkriterium)*
Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis. Sei (x_n) gegen x_0 konvergent. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Indexschranke $n_0 = n_0(\frac{\varepsilon}{2})$, so dass für alle $n > n_0 \quad d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Dann haben wir aber auch für alle $m, n > n_0$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Umkehrung des Theorem 3.4 gilt nicht in jedem metrischen Raum, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 3.11 *Im metrischen Raum der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sei eine Folge rekursiv durch*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = 2$$

gegeben. Da (x_n) in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert (Beweis als Übungsaufgabe), ist (x_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und damit auch in $\mathbb{Q}$.

DEFINITION 3.11 *Ein metrischer Raum E heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.*

Beispiele vollständiger metrischer Räume geben wir im nächsten Abschnitt an. Hier betrachten wir noch zwei weitere Eigenschaften von Cauchyfolgen.

THEOREM 3.5 *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Beweis. Für $m, n > n_0(1)$ ist $d(x_m, x_n) < 1$. Sei N die kleinste natürliche Zahl, die größer als $n_0(1)$ ist. Nun haben wir

$$d(x_n, x_1) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_1) < 1 + d(x_N, x_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

woraus für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_1) + d(x_n, x_1) < 2 + 2d(x_N, x_1)$$

folgt.

THEOREM 3.6 *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

Beweis. Seien (x_n) eine Cauchyfolge und (x_{n_k}) eine gegen x_0 konvergierende Teilfolge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_{01}(\frac{\varepsilon}{2})$, so dass für alle $m, n > n_{01}$ $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Ferner gibt es auch ein $n_{02}(\frac{\varepsilon}{2})$, so dass für alle $k > n_{02}$ $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei N die kleinste natürliche Zahl, die größer als n_{01} und n_{02} ist. Dann gilt wegen $n_N \geq N$

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > N.$$

3.6 Beispiele vollständig metrischer Räume

THEOREM 3.7 *Der metrische Raum der reellen Zahlen ist vollständig.*

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) \qquad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Wir definieren eine strikt wachsende Folge natürlicher Zahlen durch

1. n_1 sei die kleinste natürliche Zahl, so dass $\forall m, n \geq n_1 \quad |x_m - x_n| < 1/4$,
2. $n_2 > n_1$ sei die kleinste natürliche Zahl, so dass $\forall m, n \geq n_2 \quad |x_m - x_n| < 1/8$,

usw. .... Wir betrachten nun die Folge abgeschlossener Intervalle

$$I_k := \left[x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^k, x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k \right].$$

Nach Definition der n_k ist

$$|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

oder äquivalent

$$x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < x_{n_{k+1}} < x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Hieraus erhalten wir insbesondere

$$x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^k < x_{n_{k+1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \qquad x_{n_{k+1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Somit bilden die I_k eine Intervallschachtelung $I_{k+1} \subset I_k$, wobei die Länge von I_k mit $k \to \infty$ gegen Null geht. Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es (genau eine) reelle Zahl $x_0 \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Andererseits liegt auch x_{n_k} in I_k für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wegen

$$|x_{n_k} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

konvergiert die Teilfolge (x_{n_k}) der Cauchyfolge (x_n) gegen x_0, also die Cauchyfolge ebenfalls gegen x_0.

THEOREM 3.8 *Der metrische Raum der komplexen Zahlen ist vollständig.*

Beweis. Wir erinnern an den Abstand im metrischen Raum $\mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

für zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$. Sei nun $(z_n) = (a_n + ib_n)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $m, n > n_0(\varepsilon) \quad d(z_m, z_m) < \varepsilon$ gilt. Wegen

$$|a_m - a_n| \leq d(z_m, z_n) \quad \text{und} \quad |b_m - b_n| \leq d(z_m, z_n)$$

sind die reellen Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gibt es Grenzwerte $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ in $\mathbb{R}$, insbesondere gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Indexschranken $n_{01}(\varepsilon)$ und $n_{02}(\varepsilon)$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_{01}, \qquad |b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > n_{02}.$$

Damit haben wir für $z = a + ib$ und $N(\varepsilon) := \max(n_{01}(\varepsilon), n_{02}(\varepsilon))$

$$d(z_n, z) < \sqrt{2}\varepsilon \qquad \forall n > N.$$

THEOREM 3.9 *Der metrische Raum $(\mathbb{R}^s, d)$, wobei $s \in \mathbb{N}$ und $d(x, y)$ der Euklidische Abstand zweier Punkte $x = (x_1, \ldots, x_s)$ und $y = (y_1, \ldots, y_s)$ bezeichnen, ist vollständig.*

Beweis. Analog zum Spezialfall komplexer Zahlen, in dem $s = 2$ gilt.

BEISPIEL 3.12 *Die Folge*

$$(x^n) := \left(\left(1, \frac{n+1}{n}, \frac{1-n}{n}, -2\right)\right)$$

ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}^4$ und damit konvergent. In der Tat ist für $m \geq n$

$$d(x^m, x^n) = \max_{1\leq i\leq 4} |x_i^m - x_i^n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0(\varepsilon).$$

BEISPIEL 3.13 *Die reelle Zahlenfolge*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und daher konvergent. Zunächst ist für $m \geq n$

$$d(x_m, x_n) = \left|\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\right| = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2}.$$

Wegen

$$\frac{1}{j^2} < \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$$

können wir die rechte Seite weiter abschätzen

$$\sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2} < \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j-1} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für $n > 1/\varepsilon =: n_0(\varepsilon)$.

BEISPIEL 3.14 *Die reelle Zahlenfolge* (x_n) *mit* $x_n = (-1)^n$ *ist beschränkt, aber keine Cauchyfolge. Wegen*

$$d(x_m, x_n) = \begin{cases} 0 \text{ für } m+n \text{ gerade} \\ 2 \text{ für } m+n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gibt es zu $\varepsilon = 1/2$ *kein* n_0*, so dass für alle* $m, n > n_0 \quad d(x_m, x_n) < 1/2$ *gilt.*

3.7 Rechenregeln für konvergente Folgen in $\mathbb{R}^s$ und $\mathbb{C}$

DEFINITION 3.12 *Im* $\mathbb{R}^s$ *führen wir die Summe zweier* s*-Tupel reeller Zahlen* $x = (x_1, \ldots, x_s)$ *und* $y = (y_1, \ldots, y_s)$ *durch*

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_s + y_s)$$

und die Multiplikation eines s*-Tupels mit einer reellen Zahl* $\alpha \in \mathbb{R}$ *durch*

$$\alpha x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_s)$$

ein. Die Menge aller s*-Tupel stellt dann einen linearen Vektorraum dar.*

Regeln für konvergente Folgen im $\mathbb{R}^s$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x \quad \text{in } \mathbb{R}^s \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = x_i \quad \text{in } \mathbb{R}\ , \forall i$

(ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} x^n = x \quad \text{in } \mathbb{R}^s, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y^n = y \quad \text{in } \mathbb{R}^s \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha x^n + \beta y^n = \alpha x + \beta y \quad \text{in } \mathbb{R}^s$

Regeln für konvergente Folgen in $\mathbb{C}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{in } \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ z_n = \mathrm{Re}\ z \quad \text{und} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ z_n = \mathrm{Im}\ z$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{in } \mathbb{C}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} w_n = w \quad \text{in } \mathbb{C} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = zw, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w} \quad \text{falls } w \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} \alpha z_n + \beta w_n = \alpha z + \beta w \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

Beweis. (i) und (iii) folgen unmittelbar aus der Definition des Abstandes in $\mathbb{R}^s$ bzw. $\mathbb{C}$. (ii) folgt wegen

$$\begin{aligned} d(\alpha x^n + \beta y^n, \alpha x + \beta y) &= \max_i |\alpha x_i^n + \beta y_i^n - \alpha x_i - \beta y_i| \\ &\leq |\alpha| \max_i |x_i^n - x_i| + |\beta| \max_i |y_i^n - y_i| \\ &= |\alpha| d(x^n, x) + |\beta| d(y^n, y). \end{aligned}$$

Der erste Teil von (iv) basiert auf

$$\begin{aligned} |z_n w_n - zw| &\leq |z_n w_n - z_n w + z_n w - zw| \\ &\leq |z_n|\ |w_n - w| + |w|\ |z_n - z| \end{aligned}$$

und der Beschränktheit konvergenter Folgen. Zum Beweis des zweiten Teils bemerken wir zunächst, dass aus $||w_n| - |w|| \leq |w_n - w| < \varepsilon$ für $n > n_0(\varepsilon)$

$$|w| - \varepsilon < |w_n| < |w| + \varepsilon$$

folgt, für $n > n_0(|w|/2)$ also $|w_n| > |w|/2 > 0$ folgt. Nun gilt

$$\left| \frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w} \right| = \frac{|z_n w - z w_n|}{|w_n|\ |w|} \leq \frac{|z_n - z|}{|w_n|} + \frac{|z|\ |w_n - w|}{|w_n|\ |w|},$$

und für $n > n_0(|w|/2)$

$$\left| \frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w} \right| < \frac{2}{|w|} \left[|z_n - z| + \frac{|z|}{|w|} |w_n - w| \right].$$

Der letzte Teil, die Linearität, basiert auf

$$|\alpha z_n + \beta w_n - \alpha z - \beta w| \leq |\alpha|\ |z_n - z| + |\beta|\ |w_n - w|.$$

3.8 Spezielle Eigenschaften reeller Zahlenfolgen

Wir erinnern daran, dass die Menge der reellen Zahlen ein geordneter Körper ist und nutzen im folgenden die Ordnung zusätzlich aus.

DEFINITION 3.13 *Eine Folge (x_n) reeller Zahlen heißt wachsend (fallend), wenn $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Falle, dass das $\leq$-Zeichen durch das $<$-Zeichen ersetzt werden kann, spricht man von strikt wachsend (fallend).*

BEMERKUNG 3.1 *Für eine wachsende (bzw. fallende) Folge verwenden wir das Symbol $x_n \uparrow$ (bzw. $x_n \downarrow$). Liegt zusätzlich Konvergenz gegen x_0 vor, so schreiben wir $x_n \uparrow x_0$ (bzw. $x_n \downarrow x_0$) anstelle von $x_n \to x_0$.*

BEISPIEL 3.15 *Die Folge* $(x_n) = (1/n)$ *ist strikt fallend, denn*

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

BEISPIEL 3.16 *Die Folge* $(x_n) = (q^n)$ *mit* $q \in (0,1)$ *ist strikt fallend, denn*

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q < 1.$$

THEOREM 3.10 *Jede wachsende (fallende) beschränkte Folge* (x_n) *in* $\mathbb{R}$ *konvergiert, und es gilt*

$$x_n \uparrow \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (x_n \downarrow \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

Beweis. Sei (x_n) eine wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen. Da die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, existiert $x := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

für alle $n > n_0$ gilt. Der Beweis für eine fallende Folge verläuft analog.

THEOREM 3.11 *(Vergleichssatz) Es seien* (x_n), (y_n) *konvergente Folgen in* $\mathbb{R}$. *Ferner gelte* $x_n \leq y_n$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$. *Dann folgt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweis. Angenommen es sei

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x > y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Dann ist $\varepsilon := (x-y)/2 > 0$ und wir finden ein n_0 derart, dass für alle $n > n_0$

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \qquad y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon,$$

woraus insbesondere

$$y_n < \frac{x+y}{2} < x_n \quad \forall n > n_0$$

folgt. Demnach kann die Ungleichung $x_n \leq y_n$ nur für endlich viele $n \leq n_0$ gelten im Widerspruch zur Voraussetzung.

3.9 Einige wichtige Grenzwerte

BEISPIEL 3.17 *Es sei $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \quad |a| < 1 \\ 1, & \textit{falls} \quad a = 1 \\ \textit{divergent}, & \textit{falls} \quad |a| \geq 1, \quad a \neq 1. \end{cases}$$

Angenommen, die Folge (a^n) konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \lim_{n\to\infty} a^n.$$

Damit gilt entweder $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ oder $a = 1$. Sei zunächst $|a| < 1$. Dann ist die Folge $(|a|^n) = (|a^n|)$ fallend und beschränkt. Sie besitzt daher einen Grenzwert, der nach obiger Argumentation nur Null sein kann. Ist $a = 1$, so ist $a^n = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$. Wir nehmen jetzt $|a| = 1$ und $a \neq 1$ an. Angenommen die Folge würde konvergieren, so muss sie nach obiger Argumentation gegen Null konvergieren, was aber wegen $|a^n| = |a|^n = 1$ nicht möglich ist. Sei schließlich $|a| > 1$. Dann ist $1/|a| < 1$, und $(1/|a^n|)$ eine Nullfolge. Also gibt es eine Indexschranke $n_0(\varepsilon)$ mit $1/|a^n| < 1$ für alle $n > n_0$ oder äquivalent $|a^n| > 1$ für alle $n > n_0$. Somit divergiert (a^n).

BEISPIEL 3.18 *Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| > 1$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

d.h., für $|a| > 1$ wächst die Funktion $n \to a^n$ schneller als jede Potenz $n \to n^k$.

Für $\alpha := 1/|a| \in (0,1)$ und $x_n = n^k \alpha^n$ haben wir

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h., $x_{n+1}/x_n \downarrow \alpha$ für $n \to \infty$. Sei nun $\beta \in (\alpha, 1)$. Dann gibt es eine Indexschranke n_0 mit $x_{n+1}/x_n < \beta$ für alle $n > n_0$. Also gilt mit vollständiger Induktion für einen festen Index $N > n_0$

$$x_{N+1} < \beta x_N, \quad x_{N+2} < \beta^2 x_N, \quad \ldots, \quad x_{N+n} < \beta^n x_N, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da (β^n) eine Nullfolge ist, ist auch (x_n) eine Nullfolge.

BEISPIEL 3.19 *Für $a \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Die Fakultät $n \to n!$ wächst also schneller als jede Funktion $n \to a^n$.

Sei $\beta \in (0,1)$. Es gibt ein N mit $|a|/k < \beta$ für alle $k > N$. Somit folgt für alle $n > N$

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n} \frac{|a|}{k} \leq \frac{|a|^N}{N!}\beta^{n-N} = \frac{|a|^N}{\beta^N N!}\beta^n.$$

Da (β^n) eine Nullfolge ist, folgt die Behauptung.

BEISPIEL 3.20 *Die Folge* $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert. Für ihren Grenzwert*

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

die Eulersche Zahl, gilt $2 < e < 3$.

Wir setzen

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

und zeigen, dass die Folge (a_n) wachsend und die Folge (b_n) fallend sind. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Wir nutzen die Bernoullische Ungleichung

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{für } a > -1,\ n \in \mathbb{N},$$

die leicht mit vollständiger Induktion gezeigt werden kann und in der das Gleichungszeichen nur für $n = 1$ oder für $a = 0$ gilt. Anwendung der Ungleichung ergibt

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Somit haben wir $a_{n+1} > a_n$. Betrachten wir nun

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}.$$

durch Anwendung der Bernoullischen Ungleichung folgt nun

$$\begin{aligned}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n(n+2)} = 1+\frac{n+1}{(n+1)^2-1} \\ &> 1+\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h., (a_n) ist strikt wachsend, (b_n) ist strikt fallend und beide Folgen sind beschränkt. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty} a_n$$

sind die existierenden Grenzwerte beider Folgen gleich. Insbesondere sind $a_1 = 2$ eine untere Schranke und $b_1 = 4$ eine obere Schranke für e. Eine bessere obere Schranke liefert $b_{10} \sim 2.853116\ldots < 3$. Eine numerische Berechnung liefert den Wert

$$e = 2.71828182845904523536\ldots.$$

3.10 Offene und abgeschlossene Mengen

DEFINITION 3.14 *Eine Teilmenge $A \subset E$ eines metrischen Raumes heißt offen, wenn es zu jedem ihrer Punkte $x \in A$ eine offene Kugel $B(x,r)$ gibt, die ganz in A liegt, d.h. $B(x,r) \subset A$.*

BEISPIEL 3.21 *Die leere Menge $\emptyset$ und E sind in jedem metrischen Raum (E,d) offen.*

THEOREM 3.12 *Im metrischen Raum ist jede offene Kugel eine offene Menge.*

Beweis. Seien $A = B(a,r)$ und $x \in A$ beliebig. Da $d(x,a) < r$, haben wir $r_1 := r - d(x,a) > 0$. Wir zeigen, dass die Kugel $B(x,r_1)$ ganz in A liegt. Sei $y \in B(x,r_1)$ beliebig, dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < r_1 + d(x,a) = r,$$

also $y \in B(a,r) = A$.

THEOREM 3.13 *Die Vereinigung jeder Familie $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ offener Mengen A_λ ist offen.*

Beweis. Sei $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Dann gibt es mindestens ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x \in A_{\lambda_0}$. Nun ist A_{λ_0} offen, d.h. es gibt eine offene Kugel $B(x,r)$, die ganz in A_{λ_0} enthalten ist. Also haben wir

$$B(x,r) \subset A_{\lambda_0} \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

THEOREM 3.14 *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

Beweis. Ist der Durchschnitt leer, so ist er trivialerweise offen. Seien nun A_i, $i = 1,\ldots,n$ offen und $x \in \cap_{i=1}^n A_i$ beliebig. Da x in jeder der offenen Mengen A_i liegt, gibt es n offene Kugeln $B(x,r_i)$, $i = 1,\ldots,n$, die jeweils ganz in A_i liegen, in Zeichen $B(x, r_i) \subset A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Sei $r = \min_{1 \le i \le n} r_i > 0$, dann folgt aus $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset A_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ die Inklusion

$$B(x, r) \subset \cap_{i=1}^n A_i,$$

was zu zeigen war.

Der Durchschnitt einer unendlichen Familie offener Mengen ist nicht notwendig offen, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 3.22 *Seien $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ und $A_n = (-1/n, +1/n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die offenen Intervalle A_n offen und für den Durchschnitt gilt $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$. Es gibt jedoch keine Kugel $B(0, r)$, die ganz im Durchschnitt der A_n liegt.*

DEFINITION 3.15 *Eine Teilmenge $A \subset E$ eines metrischen Raumes heißt abgeschlossen, wenn das Komplement von A bezüglich E offen ist.*

FOLGERUNG 3.1 *Die Mengen $E = C_E \emptyset$ und $\emptyset = C_E E$ sind abgeschlossen. Der Durchschnitt einer Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis. Der Beweis der obigen Aussagen basiert auf

$$\begin{aligned} C_E\left(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \cup_{\lambda \in \Lambda} C_E A_\lambda, \\ C_E\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) &= \cap_{i=1}^n C_E A_i. \end{aligned}$$

Beachte: In einem metrischen Raum gibt es Mengen, die

- offen und abgeschlossen sind (z.B. E, $\emptyset$),
- offen und nicht abgeschlossen sind (z.B. $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$),
- nicht offen und abgeschlossen sind (z.B. $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$),
- weder offen noch abgeschlossen sind (z.B. $(0, 1]$ in $\mathbb{R}$).

THEOREM 3.15 *Im metrischen Raum sind die abgeschlossene Kugel $\bar{B}(a, r)$ und die Sphäre $S(a, r)$ abgeschlossene Mengen.*

Beweis. Nach der Definition abgeschlossener Mengen müssen wir zeigen, dass die Komplemente offen sind.

1. Sei $x \in C_E(\bar{B}(a, r))$, d.h. $d(x, a) > r$. Setze $\rho := d(x, a) - r > 0$. Dann ist
$$B(x, \rho) \cap \bar{B}(a, r) = \emptyset,$$
denn für jedes $y \in B(x, \rho)$ haben wir
$$d(x, a) \le d(x, y) + d(y, a) < \rho + d(y, a) = d(x, a) - r + d(y, a),$$
woraus $d(y, a) > r$ folgt.

2. Das Komplement von $S(a, r)$ ist die Vereinigung der offenen Mengen $B(a, r)$ und $C_E \bar{B}(a, r)$ und somit offen.

3.11 Umgebungen, Häufungs- und Berührungspunkte

DEFINITION 3.16 *Sei A eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raumes E. Unter einer offenen Umgebung von A versteht man eine A umfassende offene Menge. Eine Umgebung von A ist jede Menge, die eine offene Umgebung von A enthält. Ist $A = \{x\}$, so spricht man von Umgebungen des Punktes x statt von Umgebungen von $\{x\}$.*

DEFINITION 3.17 *Ein Punkt $x \in E$ heißt Berührungspunkt der Menge $A \subset E$, falls jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.*

DEFINITION 3.18 *Ein Punkt $x \in E$ heißt Häufungspunkt der Menge $A \subset E$, falls jede Umgebung von x einen von x verschiedenen Punkt von A enthält.*

FOLGERUNG 3.2

(i) *Jeder Häufungspunkt einer Menge A ist Berührungspunkt der Menge A.*

(ii) *Jeder Berührungspunkt $x \notin A$ der Menge A ist Häufungspunkt von A.*

(iii) *Jeder Punkt $x \in A$ ist Berührungspunkt von A.*

Beweis. (i), (ii) folgen unmittelbar aus der Definition. (iii) ergibt sich daraus, dass jede Umgebung des Punktes x den Punkt x enthält.

DEFINITION 3.19 *Die Menge aller Berührungspunkte einer Menge A heißt abgeschlossene Hülle oder Abschließung von A und wird mit $\bar{A}$ bezeichnet.*

FOLGERUNG 3.3 *Bezeichne $HP(A)$ die Menge aller Häufungspunkte der Menge A. Dann gilt $\bar{A} = A \cup HP(A)$.*

Beweis. Sei $x \in A$, dann ist wegen (iii) x Berührungspunkt von A, d.h., $A \subset \bar{A}$. Jeder Berührungspunkt $x \notin A$ von A ist aber nach (ii) Häufungspunkt von A, liegt also in $HP(A)$, damit haben wir $\bar{A} \subset A \cup HP(A)$. Wegen (i) gilt nun $HP(A) \subset \bar{A}$.

THEOREM 3.16 *Für jede Menge A ist die Abschließung $\bar{A}$ von A die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h.,*

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{abgeschlossen}}} B.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$D := \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{abgeschlossen}}} B.$$

D ist als Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen und enthält die Menge A.
Wir zeigen zunächst, dass jeder Berührungspunkt von A zu D gehört, also $\bar{A} \subset D$ ist. Da $A \subset D$, genügt es, Berührungspunkte $x \notin A$ zu betrachten. Dann ist $x \in HP(A)$. Angenommen $x \notin D$. Dann gilt für mindestens eine abgeschlossene Menge $B \supset A$ $x \notin B$. Nun war B abgeschlossen, also gibt es eine Umgebung um x, die keinen Punkt mit D gemeinsam hat. Somit kann x kein Häufungspunkt von A sein und es gilt $\bar{A} \subset D$.
Wir zeigen, dass $\bar{A}$ abgeschlossen ist, so dass wegen $A \subset \bar{A}$ automatisch D als Durchschnitt aller abgeschlossener Mengen, die A enthalten, Teilmenge von $\bar{A}$ ist.
$\bar{A}$ abgeschlossen ist mit $C_E\bar{A}$ offen äquivalent. Sei x kein Berührungspunkt von A, also $x \in C_E\bar{A}$. Dann gibt es eine Umgebung, in der keine Punkte aus A liegen, insbesondere auch eine Kugel $B(x, r)$ mit $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Angenommen, es gibt einen Punkt $y \in \bar{A} \backslash A$ aus $B(x, r)$. Dann würden in jeder Umgebung $B(y, R)$ Punkte aus A liegen. Aber für $R := r - d(x, y)$ gilt

$$B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r), \qquad B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Also gibt es derartige Punkte y nicht und $B(x, r)$ liegt ganz im Komplement von $\bar{A}$. Damit ist $C_E\bar{A}$ offen.

THEOREM 3.17 *(Bolzano-Weierstraß)*
Jede unendliche beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gibt es ein Intervall $I_1 := [-c, +c]$, in dem alle Punkte aus A liegen. Wir halbieren das Intervall und wählen ein Teilintervall aus, in dem unendlich viele Elemente von A liegen. Wir fahren dann mit dem ausgewählten Intervall in gleicher Weise fort. So erhalten wir eine Folge (I_n) von Intervallen, mit $I_{n+1} \subset I_n$. Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es eine reelle Zahl $\xi \in \mathbb{R}$, die in allen Intervallen liegt. Wir zeigen, dass ξ Häufungspunkt von A ist. Wir betrachten eine beliebige Umgebung von ξ, die insbesondere eine Kugelumgebung $B(\xi, r)$ enthält. Da $\xi \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für die Länge l_n der Intervalle $l_n = c/2^{n-1}$ gilt, gibt es ein I_n mit $I_n \subset B(\xi, r)$. Jedes I_n enthält nach Konstruktion aber unendlich viele Elemente von A also gegebenenfalls auch ein von ξ verschiedenes.
Im Fall der komplexen Zahlen geht man analog vor und teilt die Rechtecke R_n jeweils in vier Teile. Die Projektionen auf die Real- bzw. Imaginärteile liefern dann zwei Intervallschachtelungen in $\mathbb{R}$.

FOLGERUNG 3.4 *Jede beschränkte Zahlenfolge* (x_n) *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Gibt es ein x, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ $x_n = x$, gilt, so konvergiert die Teilfolge $(x)_n \in \mathbb{N}$ gegen x. Gibt es kein derartiges x, so ist das Bild der Folge $\varphi = (x_n)$ also $A := \varphi(\mathbb{N})$ eine unendliche beschränkte Teilmenge in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert ein Häufungspunkt ξ dieser Menge. Wir konstruieren nun eine Teilfolge von (x_n), die gegen ξ konvergiert. Wir betrachten die Folge der Kugeln $B((\xi, 1/n))$. In jeder dieser Kugeln gibt es unendlich viele Elemente der Folge, da andernfalls die Kugel $B(\xi, \rho)$ mit ρ kleiner als der minimale Abstand eines Folgengliedes zu ξ keinen Punkt mit A gemein hätte. Sei $x_{n_1} \in B(\xi, 1)$. Angenommen wir haben für n_i, dass $x_{n_i} \in B(\xi, 1/n)$ gilt. Dann gibt es in der Kugel $B(\xi, 1/(n+1))$ ein Element x_n mit einem Index höher als n_i. Wir bezeichnen diesen Index mit n_{i+1}. Dann konvergiert die Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

DEFINITION 3.20 *Ein Punkt x heißt Häufungspunkt der Folge (x_n), wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Glieder der Folge liegen.*

Beachte: Die Begriffe Häufungspunkt einer Folge $\varphi = (x_n)$ und Häufungspunkt der Menge $\varphi(\mathbb{N})$ sind verschieden. Beispielsweise sind für eine stationäre Folge $(x_n) = (x)$ der Punkt x Häufungspunkt der Folge (x_n) aber kein Häufungspunkt der einelementigen Menge $\varphi(\mathbb{N}) = \{x\}$.

3.12 Limes superior and Limes inferior

Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a_n := \inf_{k \geq n} x_k := \inf\{x_k\ ;\ k \geq n\}, \qquad b_n := \sup_{k \geq n} x_k := \sup\{x_k\ ;\ k \geq n\}.$$

Dann sind (a_n) wachsend, (b_n) fallend und beide Folgen beschränkt, es existieren somit $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$.

DEFINITION 3.21 *Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Die Grenzwerte*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} x_k)$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} x_k)$$

heißen Limes superior und Limes inferior.

Die beiden Werte Limes superior und Limes inferior können wie folgt charakterisiert werden:

THEOREM 3.18 *Eine beschränkte Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ besitzt einen kleinsten Häufungspunkt $x_* \in \mathbb{R}$ und einen größten Häufungspunkt $x^* \in \mathbb{R}$. Ferner gilt:*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = x_* \quad \textit{und} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Beweis. Wir setzen $x_* = \liminf_{n\to\infty} x_n$ und zeigen, dass x_* kleinster Häufungspunkt ist. Da

$$(a_n) = (\inf_{k\geq n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine wachsende Folge ist, die gegen x_* konvergiert, gilt $x_* = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Zu jedem $\xi < x_*$ finden wir daher ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\xi < a_N \leq x_n$ für alle $n \geq N$. Somit liegen in der Umgebung $B(\xi, \rho)$ für hinreichend kleines ρ keine Folgenglieder x_n. Damit gibt es keinen kleineren Häufungspunkt als x_* und es bleibt zu zeigen, dass x_* tatsächlich Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$\inf_{k\geq n} x_k = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

gibt es zu jedem n ein $k \geq n$ mit

$$x_k < a_n + \varepsilon \leq x_* + \varepsilon.$$

Damit liegen für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder links von $x_* + \varepsilon$. Andererseits gibt es keinen Häufungspunkt kleiner als x_*. Also ist x_* Häufungspunkt der Folge (x_n).

4 Stetige Abbildungen

4.1 Begriff der stetigen Abbildung

Wir betrachten eine Abbildung $f : E \to E'$ eines metrischen Raumes (E, d) in den metrischen Raum (E', d'). Nachfolgende Definition charakterisiert das lokale Verhalten von f in Umgebung eines Punktes $x_0 \in E$.

DEFINITION 4.1 *Die Abbildung $f : E \to E'$ eines metrischen Raumes (E, d) in den metrischen Raum (E', d') heißt im Punkt $x_0 \in E$ stetig, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

f heißt auf E stetig, wenn f in jedem Punkt von E stetig ist.

Eine Abbildung f ist demnach genau dann im Punkt x_0 stetig, wenn es zu jeder Kugel $B(f(x_0), \varepsilon)$ im Bildbereich E' eine Kugel $B(x_0, \delta(\varepsilon))$ im Urbildbereich gibt, so dass das Bild der Kugel $B(x_0, \delta(\varepsilon))$ in $B(f(x_0), \varepsilon)$ liegt.

BEISPIEL 4.1 *Jede konstante Abbildung $f : E \to E'$ ist auf E stetig.*

Sei etwa $f(x) = a$ für alle $x \in E$ und $x_0 \in E$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in E$

$$d'(f(x), f(x_0)) = d'(a, a) = 0 < \varepsilon.$$

BEISPIEL 4.2 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.*

Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(x_0)) &= |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| \\ &= |x - x_0|\,|x - x_0 + 2x_0| \le |x - x_0|\,(|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &< (1 + 2|x_0|)\,|x - x_0| \quad \text{für } |x - x_0| < 1 \end{aligned}$$

und somit

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \qquad \text{für } |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0) := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right).$$

BEMERKUNG 4.1 *Es ist üblich Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Punktmenge $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^2$ darzustellen (Kurve). Die Stetigkeit im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ kann dann geometrisch wie folgt interpretiert werden. Zu jedem vorgegebenen Toleranzstreifen $T_\varepsilon(f(x_0)) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$ existiert ein Streifen $S_{\delta(\varepsilon)}(x_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\}$ um $x = x_0$, so dass die Einschränkung von f auf $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\}$ im vorgegebenen Toleranzstreifen liegt.*

BEMERKUNG 4.2 *Es ist üblich Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als Punktmenge $\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ im $\mathbb{R}^3$ darzustellen (Fläche). Schränkt man diese Funktion auf die Menge $\{x(t) = x_0 + th : t \in \mathbb{R}\}$ ein (Gerade durch $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ in Richtung $h = (h_1, h_2)$), so entsteht eine Schnittkurve als Schnitt der die Funktion darstellenden Fläche mit der auf der $x_1 - x_2$-Ebene senkrecht stehenden und durch die Gerade verlaufenden Ebene.*

Im Folgenden studieren wir, wie die Stetigkeit einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit der Stetigkeit der Schnittkurven zusammenhängt.

BEMERKUNG 4.3 *Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0d})$ stetig, so ist die Schnittkurve $\Phi(t) := f(x_0 + th)$ mit $h = (h_1, \dots, h_d) \neq 0$, als Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt 0 stetig.*

Beweis. Der Beweis folgt sofort mit $\|h\| = (\sum_{i=1}^d h_i^2)^{1/2}$ aus

$$|\Phi(t) - \Phi(0)| = |f(x_0 + th) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } d(x_0 + th, x_0) = |t| \, \|h\| < \delta(\varepsilon).$$

Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 4.3 *Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 \text{ für } & |y| \geq x^2 \\ 0 \text{ für } & y = 0 \\ 1 \text{ für } & 0 < |y| < x^2 \end{cases}$$

ist entlang jeder Geraden durch den Ursprung im Ursprung stetig, sie ist jedoch als Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ unstetig.

4.2 Produkt stetiger Abbildungen

THEOREM 4.1 *Seien $f : E \to E'$, $g : E' \to E''$, E, E', E'' metrische Räume sowie f stetig in $x_0 \in E$ und g stetig in $y_0 = f(x_0) \in E'$. Dann ist $h = g \circ f$ in $x_0 \in E$ stetig. Ist f stetig auf E und g stetig auf E', so ist h stetig auf E.*

Beweis. Die Stetigkeit von g in $y_0 = f(x_0)$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ d'(y, f(x_0)) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d''(g(y), (g \circ f)(x_0)) < \varepsilon,$$

die von f in x_0

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \delta^*(\delta) > 0 \ : \ d(x, x_0) < \delta^*(\delta) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \delta.$$

Setzt man $\delta = \delta(\varepsilon)$ und $y = f(x)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{\delta}(\varepsilon) := \delta^*(\delta(\varepsilon)) > 0 \ : \\ &\quad d(x, x_0) < \tilde{\delta}(\varepsilon) \Rightarrow d''((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)) = d''(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die zweite Aussage des Satzes folgt aus der Stetigkeit in jedem Punkt.

BEISPIEL 4.4 *Die Abbildungen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^2 + 1$ *und* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $g(y) = \arctan y$ *sind auf* $\mathbb{R}$ *stetig. Somit ist auch die Abbildung* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $h(x) = (g \circ f)(x) = \arctan(x^2 + 1)$ *auf* $\mathbb{R}$ *stetig.*

4.3 Grenzwerte von Abbildungen

DEFINITION 4.2 *Seien* (E, d), (E', d') *metrische Räume,* $M \subset E$ *eine Menge und* x_0 *Häufungspunkt der Menge* M*. Die Abbildung* $f : M \to E'$ *hat für gegen* x_0 *strebendes* $x \in M$ *den Grenzwert* $a \in E'$*, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; : \; \forall x \in M, \; 0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), a) < \varepsilon,$$

in Zeichen

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x) = a.$$

BEISPIEL 4.5 *Wir betrachten die Abbildung* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 \text{ für } x_2 > x_1^2, \\ 1 \text{ für } x_2 \leq x_1^2. \end{cases}$$

Dann ist $x_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$ *Häufungspunkt von* $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; x_2 > x_1^2\}$ *und* $\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x) = 0$*. Setzt man jedoch* $N = \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; x_2 > 0\}$*, so ist* x_0 *zwar Häufungspunkt von* N*, aber* $\nexists \lim_{x \to x_0, x \in N} f(x)$*.*

Im Spezialfall von Funktionen einer rellen Veränderlichen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ führt man noch die folgende Notation ein. Seien $M^+ = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x > x_0\}$ und $M^- = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x < x_0\}$. Dann bezeichnen

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) := \lim_{x \to x_0, x \in M^-} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) := \lim_{x \to x_0, x \in M^+} f(x),$$

den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von f in x_0.

BEISPIEL 4.6 *Die Abbildung* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für} \quad x < -1, \\ x^2 & \text{für} \; -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{für} \;\; 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1 & \text{für} \;\; 1 < x \leq 2, \\ 2 & \text{für} \quad x > 2, \end{cases}$$

besitzt die folgenden einseitigen Grenzwerte (vgl. Abb. 11).

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1-0} f(x) &= 0, & \lim_{x \to -1+0} f(x) &= 1, \\ \lim_{x \to 0-0} f(x) &= 0, & \lim_{x \to 0+0} f(x) &= 0, \\ \lim_{x \to 1-0} f(x) &= 0, & \lim_{x \to 1+0} f(x) &= 0, \\ \lim_{x \to 2-0} f(x) &= 1, & \lim_{x \to 2+0} f(x) &= 2. \end{aligned}$$

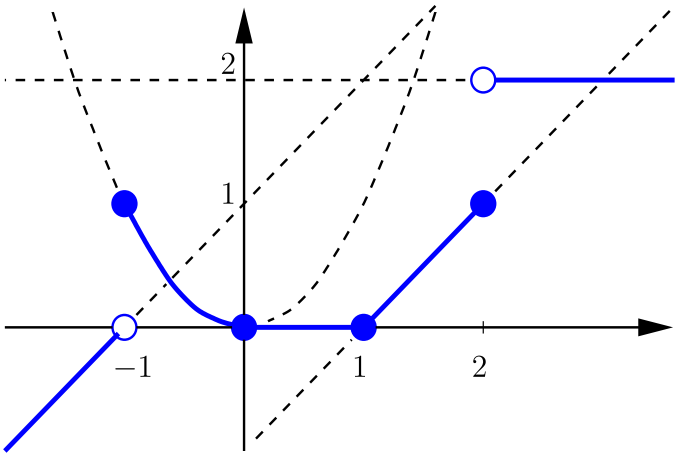

Abbildung 11: Stückweise definierte Abbildung f aus Beispiel 4.6

THEOREM 4.2 *(Stetigkeit – Grenzwert)*

(i) *Seien $f : E \to E'$ in $x_0 \in E$ stetig und x_0 Berührungspunkt von M. Dann existiert $\lim\limits_{x\to x_0, x\in M} f(x)$ und es gilt*

$$\lim_{x\to x_0, x\in M} f(x) = f(x_0).$$

(ii) *Sei M Umgebung von $x_0 \in E$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0, x\in M} f(x)$ und gilt $\lim\limits_{x\to x_0, x\in M} f(x) = f(x_0)$, so ist $f : M \to E'$ in x_0 stetig.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus den Definitionen Stetigkeit und Grenzwert.

THEOREM 4.3 *(Grenzwert von Abbildungen – Grenzwert von Folgen)*
Seien $f : E \to E'$ und x_0 Häufungspunkt von $M \subset E$. Dann hat f für gegen x_0 strebendes $x \in M$ genau dann den Grenzwert a, wenn für alle Folgen $(x_n) \subset M$, mit $x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $(f(x_n))$ in E' gegen a konvergiert.

Beweis. Seien zunächst $\lim_{x\to x_o, x\in M} f(x) = a$ und (x_n) eine beliebige Folge mit den oben angegebenen Eigenschaften. Aus der Grenzwertdefinition folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; : \forall x \in M, \; 0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), a) < \varepsilon.$$

Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Indexschranke $n_0(\delta(\varepsilon))$, so dass für alle $n > n_0$

$$d(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d'(f(x_n), a) < \varepsilon.$$

Seien nun umgekehrt alle Zahlenfolgen $(f(x_n))$ in E' gegen a konvergent. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass f für gegen x_0 strebendes $x \in M$ nicht den Grenzwert a besitzt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für jedes $\delta = 1/n$ ein $x_n \in M$ existiert mit $d(x_n, x_0) < 1/n$ und $d(f(x_n), a) \geq \varepsilon$. Somit konvergiert zwar $x_n \to x_0$ aber $f(x_n) \not\to a$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

4.4 Reelle vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Bezeichnen wir die j-te Komponente der vektorwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so entsprechen einer vektorwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ m skalare Funktionen $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$.

THEOREM 4.4 *Die vektorwertige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann stetig, wenn jede Komponente $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ in x_0 stetig ist.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in x_0 stetig. Wegen

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| \le \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(x_0)|^2 \right)^{1/2} = d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, für die $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ gilt, ist jede Komponente f_j, $j = 1, \ldots, m$, in x_0 stetig. Ist umgekehrt jede Komponente f_j in x_0 stetig, also

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad d(x, x_0) < \delta(\varepsilon),$$

so folgt durch Aufsummieren

$$d'(f(x), f(x_0)) = \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(x_0)|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \sqrt{m},$$

also die Stetigkeit der vektorwertigen Funktion.

Rechenregeln für Grenzwerte reeller Funktionen

(i) Für vektorwertige Funktionen und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \to x_0, x \in M} f(x) \pm \beta \lim_{x \to x_0, x \in M} g(x),$$

falls die auf der rechten Seite stehenden Grenzwerte existieren.

(ii) Für skalare Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0, x \in M} f(x) \lim_{x \to x_0, x \in M} g(x),$$

falls die auf der rechten Seite stehenden Grenzwerte existieren.

(iii) Für skalare Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x)}{\lim_{x \to x_0, x \in M} g(x)},$$

vorausgesetzt, dass $\lim_{x \to x_0, x \in M} g(x) \neq 0$ und $\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x)$ existiert.

FOLGERUNG 4.1 *Summe, Differenz, Produkt und Quotient (Nenner $\neq 0$) stetiger Funktionen sind stetig.*

BEISPIEL 4.7 *Polynome n-ten Grades (auch ganzrationale Funktionen genannt), gegeben durch* $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, $(p_n \neq 0)$, *sind auf* $\mathbb{R}$ *stetige Funktionen.*

BEISPIEL 4.8 *Gebrochen rationale Funktionen*

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)}, \quad \textit{wobei } q_m(x) \neq 0,$$

und p_n, q_m *Polynome n-ten bzw. m-ten Grades sind, sind in jedem Punkt* $x \in \mathbb{R}$, *in dem* $q_m(x) \neq 0$, *stetig.*

4.5 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

DEFINITION 4.3 *Sei* $f : (B(x_0, r)\backslash\{x_0\}) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *in* x_0 *unstetig. Existiert* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, *so heißt* f *in* x_0 *hebbar unstetig.*

Beachte: Die Funktion $g : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$, mit $g(x_0) = a$ und $g(x) = f(x)$ für alle $x \in B(x_0, r)\backslash\{x_0\}$, ist im Punkt x_0 stetig.

BEISPIEL 4.9 *Die Funktion* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = (\sin x)/x$ *hat in* $x_0 = 0$ *den Grenzwert 1 (Begründung später).* f *ist damit in* $x_0 = 0$ *hebbar unstetig.*

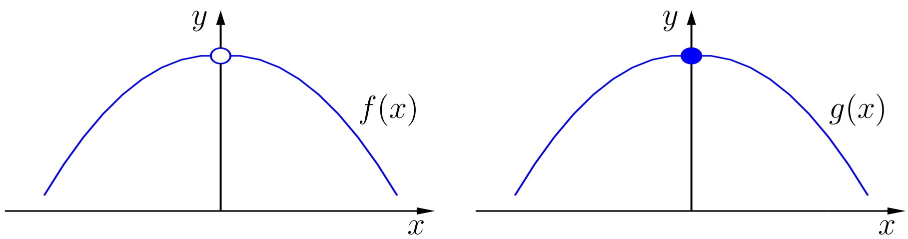

Abbildung 12: Die hebbar unstetige Abbildung f und ihre stetige Erweiterung g

DEFINITION 4.4 *Seien* a_r, a_l *der rechts- bzw. linksseitige Grenzwert von* f *in* x_0 *und* $a_r \neq a_l$. *Dann hat* f *in* x_0 *einen Sprung der Höhe* $a_r - a_l$.

DEFINITION 4.5 *Hebbare Unstetigkeitsstellen und Sprungstellen heißen Unstetigkeitsstellen 1. Art. Eine Unstetigkeitstelle 2. Art liegt vor, wenn mindestens ein einseitiger Grenzwert nicht existiert.*

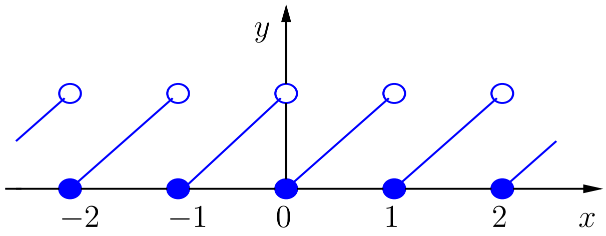

Abbildung 13: Sprungstellen der Funktion $f(x) = x - [x]$

BEISPIEL 4.10 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - [x]$ hat in den ganzzahligen Punkten Sprungstellen der Höhe -1. Hierbei bezeichnet $[x]$ den ganzen Teil von x, d.h., die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist (vgl. Abb. 13).*

BEISPIEL 4.11 *Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ hat in $x_0 = 0$ keinen rechtsseitigen Grenzwert, also eine Unstetigkeitsstelle 2. Art (Polstelle) (vgl. Abb. 14, links).*

BEISPIEL 4.12 *Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(1/x)$ hat in $x_0 = 0$ keine einseitigen Grenzwerte, also eine Unstetigkeitsstelle 2. Art (Oszillationsstelle) (vgl. Abb. 14, rechts).*

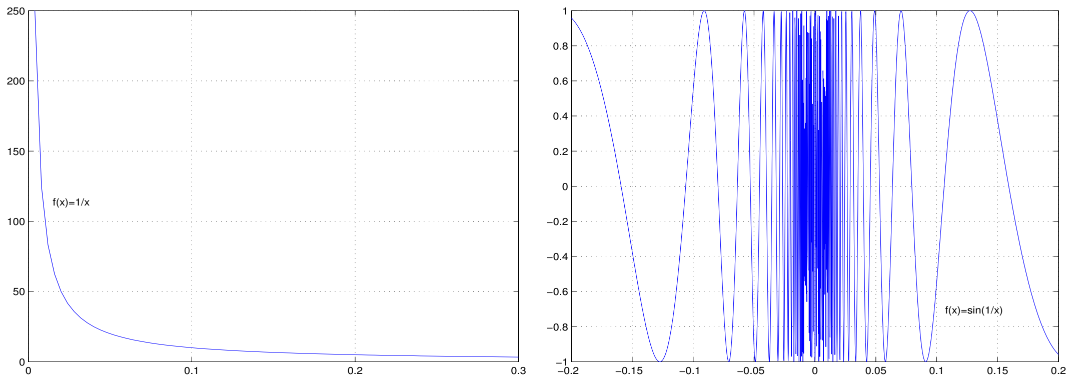

Abbildung 14: Unstetigkeitsstellen 2. Art. links Polstelle, rechts Oszillationsstelle

4.6 Kompaktheit

DEFINITION 4.6 *Sei $A \subset E$ eine Teilmenge des metrischen Raumes (E, d). Eine Familie von Mengen $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ heißt offene Überdeckung von A, wenn*

$$A \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda, \quad O_\lambda \quad \text{offen } \forall \lambda \in \Lambda.$$

A heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von A ein endliches Teilsystem enthält, das zur Überdeckung von A ausreicht.

BEISPIEL 4.13 *Die leere Menge $\emptyset$ ist kompakt. Die Menge $\{0\} \cup \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ist kompakt. Die Menge $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ist nichtkompakt.*

Beweis. Die erste Aussage ist trivial. Sei nun $\{O_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von $\{0\} \cup \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es ein λ_0 mit $0 \in O_{\lambda_0}$. Wegen $1/n \to 0$ für $n \to \infty$, gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ bereits alle bis auf endlich viele der Punkte $1/n$ von O_{λ_0} überdeckt werden. Zu den verbleibenden endlich vielen Punkten $1/n$, $1 \leq n \leq n_0$, gibt es endlich viele offene Mengen aus O_λ, die diese Punkte überdecken. Um zu zeigen, dass die Menge $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ nicht kompakt ist, betrachten wir die offene Überdeckung

$$\{B(\frac{1}{n}, \frac{1}{3n^2}) \ : \ n \in \mathbb{N}\},$$

aus der (weil sie aus paarweise durchschnittsfremden Kugel besteht) kein Teilsystem ausgewählt werden kann, das zur Überdeckung ausreicht.

THEOREM 4.5 *Im metrischen Raum ist jede kompakte Menge A beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. $\{B(0,r) \ : \ r \in \mathbb{R}^+\}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge A. Da ein endliches Teilsystem existiert, gibt es ein $R > 0$, so dass $B(0,R)$ die Menge A überdeckt. Nun gilt wegen $x, y \in A \Rightarrow x, y \in B(0,R)$ sicher $d(x,y) < 2R$. Um die Abgeschlossenheit von A zu zeigen, betrachten wir $x \in C_E A$. Dann ist $\{B(y, d(x,y)/2) \ : \ y \in A\}$ eine offene Überdeckung von A, aus der ein endliches Teilsystem $\{B(y_i, d(x,y_i)/2) \ : \ 1 \leq i \leq N\}$ ausgewählt werden kann, das zur Überdeckung von A ausreicht. Wir setzen

$$r := \min_{1 \leq i \leq N} \frac{d(x,y_i)}{2} > 0$$

und haben $B(x,r) \cap B(y_i,r) = \emptyset$, für $i = 1, \ldots, N$. Also liegt $B(x,r)$ im Komplement von A bezüglich E.

Die folgende Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$ geht auf *E. Heine, 1821-1881* und *E. Borel, 1871-1956* zurück.

THEOREM 4.6 *(Heine-Borel)*
Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Da in jedem metrischen Raum kompakte Mengen beschränkt und abgeschlossen sind, müssen wir nur die Gegenrichtung beweisen. Hierzu verweisen wir auf die Literatur (z.B. H. Amann, J. Escher, Analysis I).

Die Kompaktheit bleibt unter stetigen Abbildungen erhalten.

THEOREM 4.7 *Seien (E,d), (E',d') metrische Räume und $f : E \to E'$ stetig. Ist E kompakt, so ist auch $f(E)$ kompakt.*

Beweis. Siehe z.B. H. Amann, J. Escher, Analysis I.

THEOREM 4.8 *(1. und 2. Satz von K. Weierstraß, 1815-1897)*
Seien $f : A \to \mathbb{R}$ auf A stetig und $\emptyset \neq A$ kompakt. Dann ist f auf A beschränkt und es gibt Punkte $a, b \in A$ mit

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x) \quad \textit{und} \quad f(b) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Beweis. Zunächst ist $f(A) \subset \mathbb{R}$ kompakt, damit beschränkt und es existieren $\inf_{x \in A} f(x)$ und $\sup_{x \in A} f(x)$. Angenommen, dass

$$f(x) < \sup_{x \in A} f(x) =: M \quad \forall x \in A.$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion $g : A \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 1/(M - f(x))$, die auf A stetig und demzufolge beschränkt ist. Somit existiert ein $K > 0$ mit $1/(M - f(x)) < K$ für alle $x \in A$. Äquivalent hierzu ist $f(x) < M - 1/K < M$ im Widerspruch zur Definition von M als kleinste obere Schranke.

4.7 Zwischenwertsätze

LEMMA 4.1 *Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig und $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, in der f das gleiche Vorzeichen wie $f(x_0)$ hat.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $f(x_0) > 0$. Aus der Stetigkeit von f im Punkt x_0 folgt für $\varepsilon := f(x_0)/2$ die Existenz einer Umgebung $B(x_0, \delta(\varepsilon))$ mit

$$x \in B(x_0, \delta(\varepsilon)) \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x_0)/2 = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

THEOREM 4.9 *(Existenz einer Nullstelle)*
Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a)f(b) < 0$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$, so dass $f(\xi) = 0$.

Beweis. O.B.d.A. gelte $f(a) > 0$. Betrachten die Menge

$$M := \{z \in [a,b] \ : \ f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,z]\} \neq \emptyset.$$

M ist als Teilmenge von $[a,b]$ beschränkt, d.h., es existiert $\sup M = \xi$. Ist $f(\xi) > 0$, so gibt es nach obigem Lemma eine Umgebung, in der $f(x) > 0$. Somit gilt $\xi \neq a$. Wegen $f(b) < 0$ entfällt auch $\xi = b$.

Aus dem obigen Satz kann eine einfache Methode zur Nullstellenbestimmung (Halbierungsalgorithmus) abgeleitet werden. Seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dann halbiert man das Intervall $[a, b]$ und berechnet $f((a + b)/2)$. Ist $(a + b)/2$ keine Nullstelle, so erfüllt eines der Intervalle $[a, (a + b)/2]$ und $[(a+b)/2, b]$ die Voraussetzungen des Satzes. Iterativ kann so eine Nullstelle von f beliebig genau eingeschlossen und damit approximiert werden.

THEOREM 4.10 *(Zwischenwertsatz)*
Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann gibt es zu jedem $y \in (m, M)$ (mindestens) ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = y$.

Beweis. Betrachte die Hilfsfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := f(x) - y.$$

Nach dem Satz von Weierstraß gibt es Punkte $x_1, x_2 \in [a, b]$, in denen f das Minimum bzw. das Maximum auf $[a, b]$ annimmt. Sei o.B.d.A. $x_1 < x_2$. Dann ist φ auf $[x_1, x_2]$ stetig und $\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$. Somit gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $0 = \varphi(\xi) = f(\xi) - y$.

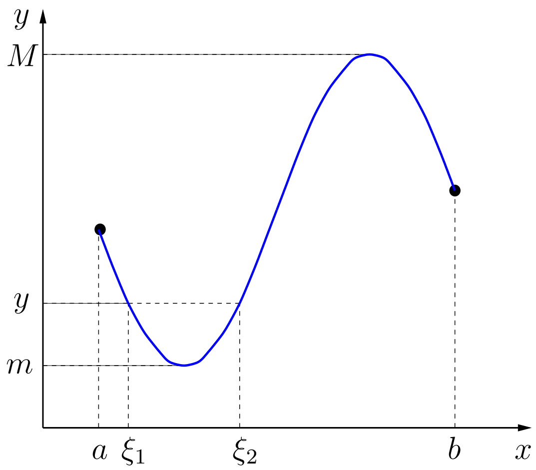

Abbildung 15: Existenz eines ξ mit $f(\xi) = y$ nach dem Zwischenwertsatz

5 Reihen in normierten Räumen

5.1 Begriff des normierten Raumes

Bislang wurde auf einer beliebigen Menge E ein Abstand definiert und damit auf E eine Topologie eingeführt. Wir betrachten jetzt den Fall, dass E ein Vektorraum ist, dessen Struktur mit der Topologie von E verträglich ist.

DEFINITION 5.1 *Eine Menge E heißt Vektorraum über $\mathbb{K}$, wenn auf E zwei Operationen*

$$\begin{aligned} x, y \in E \quad &\rightarrow \quad x + y \in E, \\ (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad &\rightarrow \quad \lambda x \in E, \end{aligned}$$

erklärt sind, die folgenden Eigenschaften genügen:

I.1 $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in E,$

I.2 $x + y = y + x \quad \forall x, y \in E,$

I.3 $\exists 0 \in E: \quad x = 0 + x \quad \forall x \in E,$

I.4 $\forall x \in E \quad \exists (-x) \in E \ : \ x + (-x) = 0,$

II.1 $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},$

II.2 $\lambda(x + y) = \lambda x + \mu y \quad \forall x, y \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K},$

II.3 $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},$

II.4 $\exists 1 \neq 0 : \quad 1x = x, \quad \forall x \in E.$

DEFINITION 5.2 *Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum E ist eine Abbildung von E in $\mathbb{R}_0^+$ mit folgenden Eigenschaften:*

(N1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \forall x \in E,$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E.$

FOLGERUNG 5.1 *Ist $x \rightarrow \|x\|$ eine Norm auf E, so ist $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Abstandsfunktion auf E.*

Beweis. Man prüft unmittelbar (M1)-(M3) nach.

DEFINITION 5.3 *$(E, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum. Der auf E definierte Abstand $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$, wobei $d(x,y) := \|x-y\|$, heißt der durch $\|\cdot\|$ induzierte Abstand. In diesem Sinne wird ein normierter Raum stets als metrischer Raum aufgefaßt. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.*

Die Dreiecksungleichung kann auf endlich viele Summanden erweitert werden, d.h., es gilt für beliebige $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Beweis. Vollständige Induktion.

BEISPIEL 5.1 *Auf der Menge $\mathbb{R}^n$ werden durch*

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

verschiedene Normen eingeführt. Insbesondere induzieren $\|\cdot\|_1$ die Manhattan-Metrik, $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Metrik und $\|\cdot\|_\infty$ die Produktmetrik.

BEISPIEL 5.2 *Der Raum aller quadratischen Matrizen ist ein linearer Vektorraum. Sei $A = (a_{ij})$ eine quadratische Matrix. Dann heißen*

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &:= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \\
\|A\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \\
\|A\|_\infty &:= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|
\end{aligned}$$

die Spaltensummennorm, die Frobeniusnorm und die Zeilensummennorm.

5.2 Reihenbegriff

DEFINITION 5.4 *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Elementen aus E. Dann heißen*

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Partialsumme, $(s_n)_{n\geq 0}$ die Folge der Partialsummen oder Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und a_n n-tes Glied der Reihe. Konvergiert die Folge der Partialsummen (s_n) gegen s, so heißt die Reihe konvergent und s Summe der Reihe, divergiert die Folge der Partialsummen, so heißt die Reihe divergent.

Beachte: Es hat sich eingebürgert, mit dem Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gleichzeitig zwei unterschiedliche Objekte zu bezeichnen, einerseits die Folge der Partialsummen und andererseits ihren Grenzwert (also die Summe der Reihe). Ferner ist der Reihenbegriff nicht am kleinsten Index 0 gebunden, jede ganze Zahl kann hierfür verwendet werden.

BEISPIEL 5.3 *(Geometrische Reihe)*
Seien $E = \mathbb{C}$, $\|\cdot\| := |\cdot|$, $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Für die n-te Partialsumme haben wir

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Damit gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

5.3 Konvergenzkriterien für Reihen in normierten Räumen

THEOREM 5.1 *(Cauchy Kriterium)*
Im normierten Raum E ist die Forderung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) \ : \quad \left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right\| < \varepsilon$$

notwendig für die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. In einem Banachraum ist sie auch hinreichend.

Beweis. Anwendung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums für die Folge der Partialsummen.

THEOREM 5.2 *(Notwendiges Konvergenzkriterium)*
Ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Setze im Cauchyschen Konvergenzkriterium $m = n + 1$, so folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n > n_0(\varepsilon) \ : \quad \|a_{n+1}\| < \varepsilon.$$

Somit gilt für alle $n > n_1(\varepsilon) := n_0(\varepsilon) + 1$ die Beziehung $d(a_n, 0) = \|a_n\| < \varepsilon$.

BEISPIEL 5.4 *Sei $E = \mathbb{R}$. Da der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \cos(2n+1)$ *nicht existiert, ist die Folge* $(\cos(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Nullfolge und die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)$ *divergent.*

DEFINITION 5.5 *Ist die Zahlenreihe (mit positiven Gliedern)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ *konvergent, so heißt die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt absolut konvergent.*

THEOREM 5.3 *In einem Banachraum E ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

(i) Notwendigkeit des Cauchyschen Konvergenzkriteriums

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) \qquad \sum_{i=n+1}^{m} \|a_i\| < \varepsilon.$$

(ii) Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \|a_i\|.$$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genügt dem Cauchyschen Konvergenzkriterium im Banachraum E.

5.4 Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern

Im folgenden betrachten wir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}_+$. Dann ist die Partialsummenfolge strikt wachsend, denn

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i = a_{n+1} > 0$$

und die Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ ist äquivalent mit ihrer Beschränktheit.

THEOREM 5.4 *Für Reihen mit positiven Gliedern gilt folgende Äquivalenz*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \textit{konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right)_{n\geq 0} \quad \textit{beschränkt.}$$

DEFINITION 5.6 *Für die Glieder der Reihen* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *und* $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *gelte ab einem bestimmten Index* i_0, $0 < a_i \leq b_i \; \forall i > i_0$. *Dann heißt die Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *Minorante zur Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *und die Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *Majorante zur Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

THEOREM 5.5 *(Vergleichskriterium)*
Jede Minorante einer konvergenten Majorante ist konvergent. Jede Majorante einer divergenten Minorante ist divergent.

Beweis. Seien s_n^a und s_n^b die Partialsummen der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$. Dann gilt

$$s_n^a = \sum_{i=0}^{i_0}(a_i - b_i) + \sum_{i=0}^{i_0} b_i + \sum_{i=i_0+1}^{n} a_i \leq \sum_{i=0}^{i_0}(a_i - b_i) + s_n^b,$$

so dass die Beschränktheit von s_n^a aus der Beschränktheit von s_n^b folgt. Ist (s_n^a) unbeschränkt, so ist auch (s_n^b) unbeschränkt.

THEOREM 5.6 *(Quotientenkriterium)*
Für die Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern gelte ab einen bestimmten Index n_0 :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \textit{für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent. Gilt dagegen*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \textit{für alle } n \geq n_0,$$

ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus

$$a_{n+1} \leq a_{n_0} q^{1-n_0} q^n \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

da die geometrische Reihe eine konvergente Majorante ist. Die Divergenz der Reihe folgt aus

$$a_{n+1} \geq a_{n_0} > 0, \quad \text{also } \liminf_{n\to\infty} a_{n+1} \geq a_{n_0} > 0,$$

da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist.

THEOREM 5.7 *(Wurzelkriterium)*
Für die Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern gelte ab einen bestimmten Index n_0 :

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \textit{für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Gilt dagegen

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \textit{für alle } n \geq n_0,$$

ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. Die Konvergenz ergibt sich aus

$$a_n \leq q^n \quad \forall n \geq n_0,$$

d.h., die geometrische Reihe ist eine konvergente Majorante. Die Divergenz folgt aus $a_n \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist.

FOLGERUNG 5.2 *(Limes-Variante des Wurzelkriteriums)*
Für die Glieder a_n einer Reihe mit positiven Gliedern gelte

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Ist $r < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ist $r > 1$, so divergiert die Reihe.

Beweis. Sei zunächst $r < 1$. Dann gibt es ein $q \in (r, 1)$. Da r größter Häufungspunkt der Folge $(\sqrt[n]{a_n})_{n\geq 0}$ ist, gibt es höchstens endlich viele Elemente der entsprechenden Folge, die in (q, ∞) liegen. Also ist das Wurzelkriterium anwendbar. Ist nun $r > 1$, so gibt es in $B(r, r-1)$ unendlich viele Glieder der Folge, für die $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ gilt. Damit ist das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllbar.

BEISPIEL 5.5 *Die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.*

Die Voraussetzungen für die Anwendung des Wurzelkriterium bzw. des Quotientenkriteriums sind nicht erfüllt. Wir zeigen, dass eine Teilfolge der Partialsummenfolge unbeschränkt ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Damit gilt

$$s_{2^n} = s_1 + \sum_{k=1}^{n} (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + 1.$$

BEISPIEL 5.6 *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *ist für* $\alpha > 1$ *konvergent.*

Die Folge der Partialsummen wächst monoton. Zum Nachweis der Konvergenz genügt daher zu zeigen, dass eine Teilfolge beschränkt ist. Für $n \geq 2$ gilt

$$s_{2^n-1} - s_{2^{n-1}-1} = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left(2^n - 1 - 2^{n-1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^\alpha = \left(2^{1-\alpha}\right)^{n-1}.$$

Damit haben wir für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= s_1 + \sum_{k=2}^{n} (s_{2^k-1} - s_{2^{k-1}-1}) < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(2^{1-\alpha}\right)^{k-1} \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k = \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

BEISPIEL 5.7 *Die komplexe Zahlenreihe* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+i)}$ *ist absolut konvergent.*

In der Tat ist wegen

$$\left|\frac{1}{k(k+i)}\right| = \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} < \frac{1}{k^2}$$

die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante.

5.5 Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

DEFINITION 5.7 *Eine reelle Zahlenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt alternierend, wenn für alle Indizes* $n \geq 0$ *die Beziehung* $a_{n+1}a_n < 0$ *gilt.*

THEOREM 5.8 *(Leibniz-Kriterium)*
Die reelle Zahlenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sei alternierend und die Folge* $(|a_n|)_{n\geq 0}$ *konvergiere monoton gegen Null. Dann ist die alternierende Reihe konvergent und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq |a_{n+1}|.$$

Beweis. Wir setzen $\alpha_n := |a_n| > 0$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \leq \alpha_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes n sei $\gamma_n = \pm 1$ derart gewählt, dass $\gamma_n a_{n+1} > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_n(s_{n+p} - s_n) &= \gamma_n \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} + \ldots + (-1)^{p-1}\alpha_{n+p}, \\
&= (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}) + \ldots \geq 0, \qquad \text{und} \\
\gamma_n(s_{n+p} - s_n) &= \alpha_{n+1} - (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) - \ldots \leq \alpha_{n+1}.
\end{aligned}$$

Da (α_n) eine Nullfolge ist, finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $p \geq 0$, $n > n_0(\varepsilon)$

$$|s_{n+p} - s_n| \leq \alpha_{n+1} < \varepsilon.$$

Da $\mathbb{R}$ ein Banachraum ist, folgt aus dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz der Zahlenreihe. Für $p \to \infty$ erhalten wir die Fehlerabschätzung.

BEISPIEL 5.8 *(Alternierende harmonische Reihe)*
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *konvergiert nicht absolut, denn* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *ist divergent. Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *erfüllt aber alle Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums und ist daher konvergent.*

5.6 Rechenregeln für Reihen

5.6.1 Linearkombination von Reihen

Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ im normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$, und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

5.6.2 Umordnung von Reihen

Für endliche Summen gelten das Kommutativ- und Assoziativgesetz, d.h., die Glieder der endlichen Summe können beliebig zusammengefaßt werden. Frage: Gilt diese Eigenschaft auch für Reihen? Zunächst müssen wir klären, was wir unter 'beliebig zusammenfassen' verstehen wollen.

DEFINITION 5.8 *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe im normierten Raum und* $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *eine bijektive Abbildung. Dann heißt* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *mit* $b_n = a_{\varphi(n)}$ *eine Umordnung der Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Wir betrachten die alternierende harmonische Reihe mit der Summe s, sei also

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots .$$

Die Partialsummenfolgen der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right)$$

sind Teilfolgen der alternierenden harmonischen Reihe und haben daher den gleichen Grenzwert s. Multipliziert man erstere mit $1/2$ und addiert sie zur zweiten, so erhält man

$$\frac{3}{2}s = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right). \tag{1}$$

Nehmen wir an, dass eine konvergente Reihe umgeordnet werden kann, ohne dass sich ihre Summe ändert. Wir fassen jeweils zwei positive Summanden der alternierenden harmonischen Reihe zusammen und ziehen dann einen negativen Summanden ab. Dann ist die Partialsummenfolge der Reihe (1) eine Teilfolge der umgeordneten alternierenden Reihe und muss demzufolge die Summe s haben. Sie hat aber die Summe $3s/2$, woraus $s = 0$ folgen würde. Die Fehlersabschätzung für alternierende Reihen liefert jedoch

$$|\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - s| < \frac{1}{m+1},$$

für $m = 1$ also $1/2 < s < 3/2$, im Widerspruch zu $s = 0$.

Aus diesem Beispiel können wir erkennen, dass eine konvergente Reihe nicht beliebig umgeordnet werden kann.

THEOREM 5.9 *(Umordnungssatz)*
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ im normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ absolut konvergent. Dann konvergiert jede Umordnung der Reihe absolut gegen den gleichen Grenzwert.

Beweis. Setze $b_i := a_{\varphi(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}_0$ und

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{und} \quad s_n^* = \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

(i) Die Umordnung ist absolut konvergent.
Die Partialsummenfolge

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \|b_i\| \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

ist monoton wachsend, es genügt zu zeigen, dass sie beschränkt ist. Sei $m(n)$ die größte ganze Zahl aus der Menge $\{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$. Dann gilt wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$

$$\sum_{i=0}^{n} \|b_i\| = \sum_{i=0}^{n} \|a_{\varphi(i)}\| \leq \sum_{j=0}^{m(n)} \|a_j\| \leq M.$$

(ii) Konvergenz gegen s.
Zu zeigen ist, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n > n_0(\varepsilon): \quad \|s_n^* - s\| < \varepsilon.$$

Zwei wichtige Beobachtungen:

- Für hinreichend großes n approximiert s_n die Summe s beliebig genau.
- Für hinreichen großes n ist der Reihenrest $\sum_{i=n+1}^{n+p} \|a_i\|$ beliebig klein (Cauchy Kriterium).

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_0 \quad &: \quad \|s_n - s\| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_0,\ \forall p \geq 0 \quad &: \quad \sum_{i=n+1}^{n+p} \|a_i\| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sei nun $n_0(\varepsilon)$ die größte ganze Zahl in der Menge $\{\varphi^{-1}(\{0, 1, \ldots, N_0\})\}$, dann ist

$$\{\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(N_0)\} \subset \{0, 1, \ldots, n_0(\varepsilon)\}, \tag{2}$$

insbesondere $n_0(\varepsilon) \geq N_0(\varepsilon)$. Für $n > n_0(\varepsilon)$ betrachten wir

$$\|s_n^* - s\| = \|\sum_{i=0}^{n} b_i - s\| = \|\sum_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)} - s\|.$$

Die Summe $\sum_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)}$ enthält wegen (2) alle Summanden a_j mit $j = 0, 1, \ldots, N_0$, gegebenenfalls auch weitere mit a_j, $j > N_0$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \|s_n^* - s\| &= \left\| \sum_{j=0}^{N_0} a_j - s + \sum_{i=0, \varphi(i) > N_0}^{n} a_{\varphi(i)} \right\| \\ &\leq \|s_{N_0} - s\| + \sum_{i=0, \varphi(i) > N_0}^{n} \|a_{\varphi(i)}\| \\ &\leq \|s_{N_0} - s\| + \sum_{j=N_0+1}^{N_0+p} \|a_j\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

5.6.3 Multiplikation von Reihen

Für endliche Summen gilt

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j\right).$$

Wir untersuchen, ob eine analoge Relation für Reihen gilt.

In einer 'vernünftigen' Produktreihe der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sollte jeder Ausdruck in dem folgenden Schema genau einmal vorkommen

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \dots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

wobei die Reihenfolge der Aufsummierung keine Rolle spielen sollte. Einige Varianten der Aufsummierung sind:

1. Bilde für jede Zeile $i \in \mathbb{N}_0$ die Zeilensumme $\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j$, und summiere diese von oben nach unten
$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j\right).$$
2. Bilde für jede Spalte $j \in \mathbb{N}_0$ die Spaltensumme $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_j$ und summiere diese von links nach rechts
$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_j\right).$$
3. Bilde für jede Diagonale $n \in \mathbb{N}_0$ die Diagonalsumme $\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$ und summiere über alle Diagonalen von links oben nach rechts unten
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right).$$

Wir setzen $x_{mn} := a_m b_n$ und sind an hinreichenden Kriterien interessiert, die ein 'Aufsummieren' der Doppelreihe $\sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn}$ sichern. Jede Anordnung der x_{mn} kann durch eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, mit $(m,n) = \varphi(k)$, eineindeutig charakterisiert werden.

DEFINITION 5.9 *Die Doppelreihe $\sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn}$ mit $x_{mn} \in E$ heißt summierbar, wenn*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i,j=0}^{n} \|x_{ij}\| < \infty.$$

THEOREM 5.10 *(Doppelreihensatz)*
Es sei $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ eine summierbare Doppelreihe im Banachraum E. Dann gelten folgende Aussagen:

1. *Jede Anordnung $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\varphi(k)}$ der Doppelreihe $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ konvergiert absolut gegen einen von der Abzählung φ unabhängigen Wert $s \in E$.*

2. *Die Reihe der Zeilensummen*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} \right)$$

und die Reihe der Spaltensummen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_{mn} \right)$$

konvergieren absolut, und es gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} x_{mn} \right) = s.$$

Beweis. Siehe z.B. Amann/Escher, Analysis I, Birkhäuser Verlag 1998, S.215

THEOREM 5.11 *(Cauchyprodukte von Reihen)*
Die Reihen $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann konvergiert das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m})$ absolut und es gilt

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right).$$

Beweis. Die Doppelreihe $\sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn}$ mit $x_{mn} = a_m b_n$ ist wegen

$$\sum_{i,j=0}^{n} |x_{ij}| \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \right) \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

summierbar. Die Aussage folgt daher aus dem Doppelreihensatz.

5.7 Potenzreihen

DEFINITION 5.10 *Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Unter einer Potenzreihe (nach Potenzen von $z - z_0$) versteht man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

Beachte: Das erste Glied der Partialsummenfolge ist $a_0(z - z_0)^0 = a_0$, auch für $z = z_0$!

Für jedes $z \in \mathbb{C}$, für das die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert, bezeichnen wir die Summe mit $f(z)$. Dann ist $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine auf dem Konvergenzbereich der Potenzreihe definierte Abbildung. Die folgenden Beispiele zeigen, dass $\{z_0\} \subset D \subset \mathbb{C}$. Insbesondere können die beiden Grenzfälle $D = \{z_0\}$ und $D = \mathbb{C}$ auftreten.

BEISPIEL 5.9 *Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert für $z = z_0$ gegen a_0, da für die zugeordnete Partialsummenfolge (s_n), $s_n = a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

BEISPIEL 5.10 *Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z - z_0)^n$ konvergiert nur für $z = z_0$, das notwendige Konvergenzkriterium ist wegen $\lim_{n\to\infty} n!(z - z_0)^n = +\infty$ für $z \neq z_0$ nicht erfüllt.*

BEISPIEL 5.11 *Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut. Nach dem Quotientenkriterium gilt nämlich*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - z_0|^{n+1} n!}{(n + 1)!|z - z_0|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z - z_0|}{n + 1} = 0.$$

LEMMA 5.1 *Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für $z = z_1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$, mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, absolut. Divergiert die Reihe für ein $z = z_2$, so divergiert die Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$, für das $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.*

Beweis. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ folgt (notwendiges Konvergenzkriterium), dass $(a_n(z_1 - z_0)^n)$ eine konvergente Nullfolge, also beschränkt ist. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ derart, dass $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ und $q = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}$. Dann ist wegen

$$|a_n|\ |z - z_0|^n \leq |a_n(z_1 - z_0)^n| \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n \leq Mq^n, \quad q \in (0, 1),$$

die geometrische Reihe eine konvergente Majorante.
Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$. Angenommen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sei konvergent, dann ist nach der ersten Aussage $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_2 - z_0)^n$ absolut konvergent im Widerspruch zur Voraussetzung.

THEOREM 5.12 *Zu jeder Potenzreihe gibt es genau ein $\rho \in [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften*

1. *Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert für $|z-z_0| < \rho$ und divergiert für $|z-z_0| > \rho$.*

2. *Es gilt die Hadamardsche Formel*
$$\rho := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Die Zahl ρ heißt Konvergenzradius und $B(z_0, \rho) \subset \mathbb{C}$ Konvergenzkreis der Potenzreihe.

Beweis. Die Existenz eines $\rho \in [0, \infty]$ mit dem angegebenen Eigenschaften folgt aus obigem Lemma. Die Hadamardsche Formel ergibt sich aus dem Wurzelkriterium
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \frac{|z-z_0|}{\rho_0}, \quad \frac{1}{\rho_0} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$
wobei für $|z-z_0| < \rho_0$ die Potenzreihe konvergiert und für $|z-z_0| > \rho_0$ die Potenzreihe divergiert.

Auf dem Rand des Konvergenzkreises können keine allgemeinen Aussagen gemacht werden, wie die folgenden Beispiele zeigen:

BEISPIEL 5.12 *Die Potenreihen*
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2},$$
haben alle den Konvergenzradius $\rho = 1$. Die erste konvergiert für kein z, mit $|z| = 1$ (notwendiges Konvergenzkriterium nicht erfüllt). Die zweite Potenzreihe konvergiert für $z = -1$ (alternierende harmonische Reihe) und divergiert für $z = 1$ (harmonische Reihe). Die dritte Reihe konvergiert in jedem Punkt z mit $|z| = 1$ absolut (konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$).

5.8 Rechenregeln für Potenzreihen

5.8.1 Linearkombination von Potenzreihen

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien ρ_a und ρ_b. Dann gilt für $|z-z_0| < \min(\rho_a, \rho_b)$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z-z_0)^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

und die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)(z-z_0)^n$ hat einen Konvergenzradius $\rho_{a+b} \geq \min(\rho_a, \rho_b)$.

5.8.2 Multiplikation von Potenzreihen

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien ρ_a und ρ_b. Dann gilt für $|z-z_0| < \min(\rho_a, \rho_b)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

wobei

$$c_n := \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}.$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ hat einen Konvergenzradius $\rho_{a.b} \geq \min(\rho_a, \rho_b)$.

5.8.3 Umrechnen einer Potenzreihe

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ρ. Ziel ist die Änderung der Entwicklungsstelle von $z = z_0$ auf $z = z_1$, wobei wir im folgenden z-Werte mit $|z-z_1| < \tau := \rho - |z_1 - z_0|$ betrachten, die sämtlich im Konvergenzkreis der Reihe liegen.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(z-z_1)+(z_1-z_0)\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}(z-z_1)^m(z_1-z_0)^{n-m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_n \binom{n}{m}(z-z_1)^m(z_1-z_0)^{n-m}
\end{aligned}$$

Setze

$$\alpha_{mn} := \begin{cases} a_n\binom{n}{m}(z-z_1)^m(z_1-z_0)^{n-m} & 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}.$$

Wir prüfen zunächst die Summierbarkeit der Doppelreihe.

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} |\alpha_{mn}| = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n} |\alpha_{mn}|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} |z - z_1|^m |z_1 - z_0|^{n-m}$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n,$$

da $|z-z_1|+|z_1-z_0| < \rho$. Wir können also die Summationsreihenfolge vertauschen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (z - z_1)^m (z_1 - z_0)^{n-m} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_1)^m,
\end{aligned}$$

wobei

$$b_m := \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (z_1 - z_0)^{n-m}.$$

5.8.4 Identitätssatz für Potenzreihen

Das folgende Lemma beinhaltet die Stetigkeit der durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

auf $|z - z_0| < \rho$ definierten Abbildung im Punkt $z = z_0$.

LEMMA 5.2 *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *habe den positiven Konvergenzradius* ρ. *Seien* $(z^m) \subset \mathbb{C}$ *eine Folge komplexer Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} z^m = z_0$ *und* $|z^m - z_0| < \rho$. *Dann gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^m - z_0)^n = a_0.$$

Beweis. Sei (z^m) eine Folge mit den angegebenen Eigenschaften, dann gilt

$$\forall \delta > 0 \quad \exists m_0(\delta) \quad \forall m > m_0(\delta) : \qquad |z^m - z_0| < \delta.$$

Wir wählen $\delta \leq \rho/2$ und haben für alle $m > m_0(\delta)$ $\quad |z^m - z_0| < \rho/2$. Sei

$$M := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^m - z_0)^n - a_0\right| &\leq |z^m - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z^m - z_0|^{n-1} \\
&\leq |z^m - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1} \\
&\leq M|z^m - z_0| < \varepsilon
\end{aligned}$$

für $|z^m - z_0| < \min(\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\rho}{2}) =: \delta$, d.h., für alle

$$m > m^*(\varepsilon) := m_0(\delta) = m_0\left(\min(\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\rho}{2})\right).$$

THEOREM 5.13 *(Koeffizientenvergleich)*
Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ *konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien* ρ_a *und* ρ_b*. Gilt für ein* σ*,* $0 < \sigma < \min(\rho_a, \rho_b)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, \sigma),$$

so folgt

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt induktiv bezüglich N. Wir wählen eine Folge komplexer Zahlen $(z^m) \subset B(z_0, \sigma)$ mit $z^m \to z_0$. Dann folgt

$$a_0 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^m - z_0)^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z^m - z_0)^n = b_0.$$

Die Behauptung gilt damit für $N = 0$. Seien nun für $n = 0, \ldots, N$ $a_n = b_n$ gezeigt. Dann haben wir für alle $z \in B(z_0, \sigma)\backslash\{z_0\}$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

oder äquivalent

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+1+n}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{N+1+n}(z - z_0)^n.$$

Hieraus folgt wie oben $a_{N+1} = b_{N+1}$.

5.9 Elementare Funktionen

Nach vorigem Abschnitt stellt jede Potenzreihe innerhalb des Konvergenzkreises eine stetige Funktion dar.

BEISPIEL 5.13

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \rho = +\infty.$$

Die Exponentialfunktion genügt

$$\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2),$$

denn durch Multiplikation erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{z_1^m z_2^{n-m}}{m!(n-m)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z_1^m z_2^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(i\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Zunächst haben wir

$$\exp(i\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varphi^n}{n!},$$

woraus unter Berücksichtigung von

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & n = 2k \\ (-1)^k i & n = 2k+1 \end{cases}$$

und $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

folgt.

BEISPIEL 5.14 *Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ setzen wir*

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Somit gilt die Eulersche Beziehung

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt die Doppelwinkelformel

$$\sin z \;\cos z = \frac{1}{2}\sin 2z.$$

Multiplikation der beiden zugeordneten Reihen ergibt

$$\begin{aligned}
\sin z \;\cos z &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m z^{2m+1}(-1)^{n-m} z^{2n-2m}}{(2m+1)!(2n-2m)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n+1}{2m}.
\end{aligned}$$

Nebenbetrachtung. Aus dem binomischen Satz folgt

$$\begin{aligned}
2^{2n+1} &= (1+1)^{2n+1} - (1-1)^{2n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{2n+1} \left[\binom{2n+1}{m} + (-1)^m \binom{2n+1}{m}\right] = \sum_{m=0}^{n} 2\binom{2n+1}{2m}.
\end{aligned}$$

Setzen wir das Ergebnis in obige Rechnung ein, so erhalten wir

$$\sin z \;\cos z = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\sin 2z.$$

BEISPIEL 5.15 *Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ setzen wir*

$$\begin{aligned}
\sinh z &:= \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cosh z &:= \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Die folgenden Beispiele zeigen, wie Reihenentwicklungen zur Grenzwertberechnung verwendet werden können. Hierbei wird neben den Rechenregeln für Reihen die Stetigkeit einer Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ an der Entwicklungsstelle z_0 benutzt.

BEISPIEL 5.16

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Aus der Reihendarstellung von cos erhalten wir

$$\begin{aligned} 1-\cos x &= 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = -x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!} \\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

BEISPIEL 5.17

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x)-1}{\sinh 3x} = \frac{2}{3}.$$

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ergibt

$$\exp(2x)-1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{(n+1)!},$$

und für die Sinushyperbolikusfunktion gilt

$$\sinh(3x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Insgesamt folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\sinh(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{(n+1)!}}{3x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{(2n+1)!}} = \frac{2}{3}.$$

6 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und Reihen

6.1 Begriff der gleichmäßigen Konvergenz

Für Folgen von Funktionen führt man verschiedene Konvergenzbegriffe ein.

DEFINITION 6.1 *Die Folge $(u_n(x))$ von Funktionen $u : E \to \mathbb{R}$ heißt auf E punktweise konvergent, wenn*

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon, x) \quad \forall n > n_0(\varepsilon, x) : \qquad |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

BEISPIEL 6.1 *Seien $E = [0,1]$ und $u_n(x) = x^n$. Dann gilt auf $[0,1]$ punktweise*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ 1 & x = 1, \end{cases}$$

denn für alle $x \in [0,1)$ haben wir

$$|x^n - 0| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > \frac{ln\varepsilon}{lnx} =: n_0(\varepsilon, x).$$

Im Fall $x = 1$ bekommen wir

$$|1^n - 1| = 0 < \varepsilon \quad \text{für alle } n.$$

Im obigen Beispiel gilt $\sup_{x\in E} n_0(\varepsilon, x) = +\infty$, d.h., es gibt keine Indexschranke n_0, die gleichmäßig für alle $x \in E$ die Beziehung $|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$ garantiert.

DEFINITION 6.2 *Die Folge $(u_n(x))$ von Funktionen $u : E \to \mathbb{R}$ heißt auf E gleichmäßig konvergent, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n > n_0(\varepsilon), \forall x \in E : \qquad |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

BEISPIEL 6.2 *Seien $E = [0,1/2]$ und $u_n(x) = x^n$. Dann gilt auf $[0,1/2]$ gleichmäßig*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0,$$

denn für alle $x \in [0,1/2]$ haben wir

$$|x^n - 0| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > -\frac{ln\varepsilon}{ln2} =: n_0(\varepsilon).$$

THEOREM 6.1 *(Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)*
Die Folge $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $u_n : E \to \mathbb{R}$ ist genau dann auf E gleichmäßig konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0(\varepsilon) \, \forall m, n > n_0(\varepsilon) \, \forall x \in E : \qquad |u_m(x) - u_n(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

Beweis. Sei $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ auf E gleichmäßig gegen $u(x)$ konvergent, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; \forall n > n_0(\varepsilon) \; \forall x \in E : \qquad |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

Wegen

$$|u_m(x) - u_n(x)| \leq |u_m(x) - u(x)| + |u(x) - u_n(x)| < 2\varepsilon$$

genügt die Folge dem Cauchy-Kriterium (3). Nehmen wir nun umgekehrt an, dass die Folge dem Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz (3) genüge. Dann ist für jedes feste $x \in E$ die Zahlenfolge $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent gegen $u(x)$. Grenzübergang $m \to \infty$ in (3) ergibt die Behauptung.

Beachte: Summe und Differenz zweier gleichmäßig konvergenter Folgen sind wieder gleichmäßig konvergent. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt zweier gleichmäßig konvergenter Funktionsfolgen nicht notwendig gleichmäßig konvergiert.

BEISPIEL 6.3 *Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Funktionsfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ mit*

$$f_n(x) = x \text{ und } g_n(x) = \frac{1}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergieren $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f und $(g_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen g, wobei $f(x) = x$ und $g(x) = 0$ gelten.
Tatsächlich haben wir nämlich für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : \qquad |f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$$

und

$$\forall n > n_0(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon} \text{ und } \forall x \in \mathbb{R} : \qquad |g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Das Produkt $f_n(x) \cdot g_n(x)$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ zwar punktweise gegen Null, es gilt nämlich $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n_0(\varepsilon, x) = \frac{x}{\varepsilon} \quad \forall n > n_0(\varepsilon, x)$

$$|f_n(x) \cdot g_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon,$$

jedoch läßt sich keine von $x \in \mathbb{R}$ unabhängige Indexschranke $n_0(\varepsilon)$ angeben, so dass

$$\forall n > n_0(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : \qquad |f_n(x) \cdot g_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon$$

gilt (wähle einfach $x = 2\varepsilon n$).

6.2 Stetigkeit der Grenzfunktion

Beispiel 6.1 zeigt, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Abbildungen unstetig sein kann. Der folgende Satz gibt hinreichende Bedingungen an, die die Stetigkeit der Grenzfunktion sichern.

THEOREM 6.2 *Ist K kompakt und konvergiert die Folge $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $u_n : K \to \mathbb{R}$ auf K gleichmäßig gegen $u : K \to \mathbb{R}$, so ist u auf K stetig.*

Beweis. Sei $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf K gleichmäßig gegen $u(x)$ konvergierende Funktionenfolge, d.h.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n > n_0(\varepsilon),\ \forall x \in K: \qquad |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

Sei $N > n_0(1)$ ein fester Index. Da K kompakt ist, ist u_N auf K beschränkt (Weierstraß !). Aus der gleichmäßigen Konvergenz erhalten wir

$$u_N(x) - 1 < u(x) < u_N(x) + 1.$$

Also ist die Grenzfunktion u auf K beschränkt. Um zu zeigen, dass u in einem beliebigen Punkt x_0 stetig ist, splitten wir die Differenz $|u(x) - u(x_0)|$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung in drei Anteile auf:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &\le |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| + |u_n(x_0) - u(x_0)| \\ &\le 2\sup_{x\in K} |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)|\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen u finden wir zu jeder Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ einen Index $m(\varepsilon)$, so dass

$$\sup_{x\in K} |u(x) - u_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Jede der Abbildungen $u_n : K \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, ist auf K stetig, d.h.

$$\begin{gathered} \forall\varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N},\ x_0 \in K \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0, n) > 0 \quad \text{mit} \\ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \end{gathered}$$

Setzen wir $\delta^*(\varepsilon, x_0) := \delta(\varepsilon, x_0, m(\varepsilon))$ so folgt

$$\forall\varepsilon > 0,\ x_0 \in K \quad \exists\delta^*(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \text{mit } d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| \le \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Zur Beantwortung der Frage, ob aus der Stetigkeit der Grenzfunktion $u : K \to \mathbb{R}$ einer auf K punktweise konvergenten Folge $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $u_n : K \to \mathbb{R}$ sich zwingend die gleichmäßige Konvergenz der Folge ergibt, betrachten wir nachfolgendes Beispiel:

BEISPIEL 6.4 *Wir betrachten die durch*

$$u_n(x) := \begin{cases} n\,x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - n\,x & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases}$$

auf $K = [0,2]$ definierte Folge stetiger Funktionen (vgl. Abb. 16).

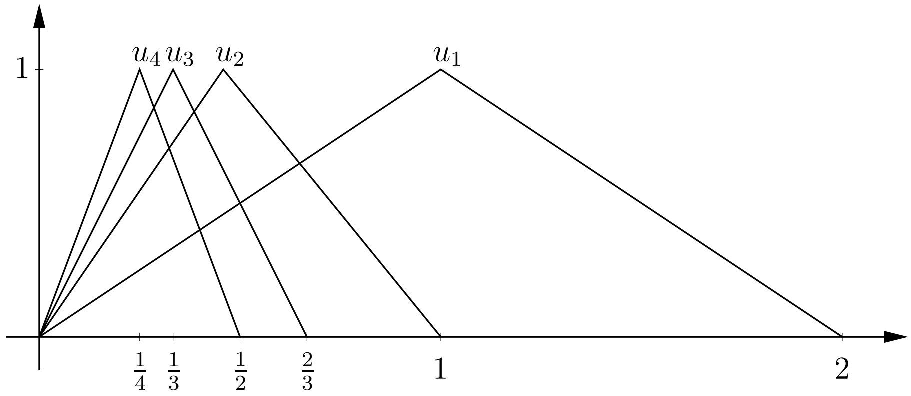

Abbildung 16: Vier Glieder der Folge (u_n)

Die Folge konvergiert punktweise auf $[0,2]$ gegen die stetige Grenzfunktion $u = 0$, denn $u_n(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und für gegebenes $x > 0$ gilt für $n \geq 2/x$ stets $u_n(x) = 0$. Die Folge konvergiert jedoch nicht gleichmäßig auf $[0,2]$, denn

$$\sup_{x\in[0,2]} |u_n(x) - u(x)| = 1\ .$$

Unter zusätzlichen Bedingungen kann die obige Frage positiv beantwortet werden.

THEOREM 6.3 *(Satz von DINI)*
Es sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge des metrischen Raumes (X,d). Jede monoton wachsende (bzw. fallende) Folge stetiger Funktionen $u_n : K \to \mathbb{R}$, die auf K punktweise gegen eine stetige Funktion $u : K \to \mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert auf K gleichmäßig gegen u.

Beweis: O.B.d.A. betrachten wir den Fall einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen. Die punktweise Konvergenz gegen u bedeutet

$$\forall x \in K, \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon, x) \quad \forall n \geq n_0 : \qquad 0 \leq u(x) - u_n(x) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Stetigkeit von u, u_{n_0} im Punkt $x \in K$ liefern die Existenz einer Umgebung $K(x,\delta)$ mit $\delta = \delta(\varepsilon, x) = \delta(\varepsilon, n_0(\varepsilon, x), x) > 0$ derart, dass

$$\forall y \in K(x,\delta) \Rightarrow |u(y) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |u_{n_0}(y) - u_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Somit haben wir
$\forall \varepsilon, x \in K \quad \exists n_0, K(x,\delta)$ mit $\forall n \geq n_0, \forall y \in K(x,\delta)$:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq u(y) - u_n(y) & \leq & u(y) - u_{n_0}(y) \\ & \leq & |u(y) - u(x)| + |u(x) - u_{n_0}(x)| + |u_{n_0}(x) - u_{n_0}(y)| \\ 0 \leq u(y) - u_n(y) & < & \varepsilon. \end{array}$$

Das offene System $\{K(x,\delta)\}_{x \in K}$ überdeckt die Menge K. Da K kompakt ist, reichen endlich viele Mengen zur Überdeckung von K aus, die wir mit $K(\varepsilon, x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ bezeichnen. Sei nun $n_0^*(\varepsilon) = \max_{i \in \{1,\ldots,N\}} n_0(\varepsilon, x_i)$. Dann gilt

$$0 \leq u(y) - u_n(y) < \varepsilon \qquad y \in K, n \geq n_0^*.$$

Beachte: Der Satz von Dini gibt vier hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine auf einer Menge $A \subset X$ punktweise gegen eine Funktion $u : A \to \mathbb{R}$ konvergierende Funktionenfolge $(u_n)_{n \geq 1}$, mit $u_n : A \to \mathbb{R}$, auf A gleichmäßig konvergiert. Diese vier Bedingungen sind

1. $u_n : A \to \mathbb{R}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$
2. $u : A \to \mathbb{R}$ stetig
3. $\forall x \in A \quad \exists n_0(x) \in \mathbb{N} : (u_n(x))_{n \geq n_0(x)}$ monoton wachsend (bzw. fallend)
4. A kompakt.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass keine der vier Bedingungen ersatzlos gestrichen werden kann und die Aussage des Satzes dennoch gilt.

BEISPIEL 6.5 *Betrachte die auf $[0,1]$ definierte Folge $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit*

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ 1 \quad \text{für} \quad 0 < x < \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

die auf $A = [0,1]$ punktweise gegen u mit $u(x) = 0$, $x \in [0,1]$, konvergiert. Man überprüft, dass 2., 3. und 4. gelten, aber

$$\sup_{x \in A} |u_n(x) - u(x)| = 1$$

gilt.

BEISPIEL 6.6 *Betrachte die Folge* $(u_n)_{n\geq 1}$ *mit*

$$u_n(x) = x^n \quad \text{für} \quad x \in [0,1].$$

Die Folge konvergiert auf $[0,1]$ *punktweise gegen* $u : [0,1] \to \mathbb{R}$*, wobei*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0,1), \\ 1 & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$$

Diese Folge genügt den Bedingungen 1., 3. und 4., konvergiert jedoch auf $A = [0,1]$ *nicht gleichmäßig gegen u (vgl. Bsp. 6.1).*

BEISPIEL 6.7 *Betrachte die auf* $A = [0,2]$ *definierte Folge* $(u_n)_{n\geq 1}$ *aus Bsp.6.3. Diese Folge genügt den Bedingungen 1.,2. und 4. konvergiert jedoch auf A nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion.*

BEISPIEL 6.8 *Betrachte die Folge* $(u_n)_{n\geq 1}$ *mit* $u_n(x) = x^n$ *auf* $A = [0,1)$. *Die Folge konvergiert auf* $[0,1)$ *punktweise gegen* $u : [0,1) \to \mathbb{R}$*, wobei* $u(x) = 0$ *für alle* $x \in [0,1)$ *gilt. Hier gelten die Bedingungen 1., 2. und 3., jedoch ist* $A = [0,1)$ *nicht kompakt.*

6.3 Funktionenreihen

In Verallgemeinerung von Potenzreihen mit dem allgemeinen Glied $u_n(x) := a_n(x-x_0)^n$ betrachten wir nun Funktionenreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad u_n : E \to \mathbb{R}$$

Für jedes $x \in E$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ eine Reihe reeller Zahlen. In diesem Sinne verwendet man folgende Konvergenzbegriffe:

DEFINITION 6.3 *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *heißt auf E*

1. *punktweise konvergent, falls die Folge der Partialsummen* $(\sum_{m=0}^{n} u_m(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *auf E punktweise konvergiert,*

2. *gleichmäßig konvergent, falls die Folge der Partialsummen* $(\sum_{m=0}^{n} u_m(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *auf E gleichmäßig konvergiert,*

3. *absolut konvergent, falls für jedes* $x \in E$ *die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ *konvergiert.*

Hinsichtlich der Zusammenhänge der verschiedenen Konvergenzbegriffe bemerken wir:

- Aus der auf E absoluten Konvergenz folgt die auf E punktweise Konvergenz der Reihe.

- Aus der auf E gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ folgt die auf E punktweise Konvergenz der Reihe.

Somit ergibt sich die in Abb. 17 gegebene Übersicht.

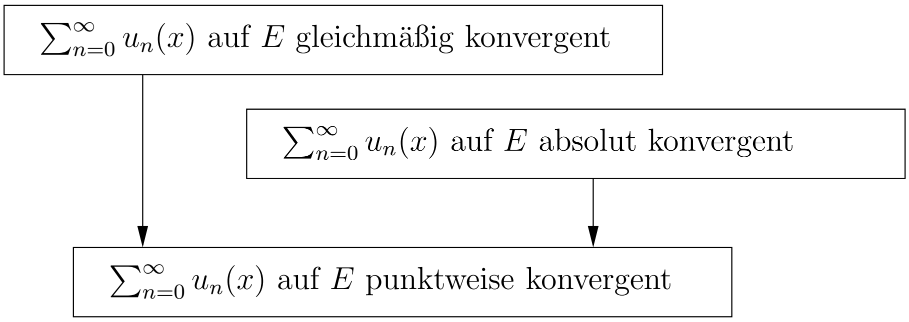

Abbildung 17: Übersicht über die Konvergenzbegriffe

Ein hinreichendes Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz ist

THEOREM 6.4 *(Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz)*
Für alle Indizes $n > N_0$ und für alle $x \in E$ gelte $|u_n(x)| \leq b_n$. Ferner sei die Zahlenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ auf E absolut und gleichmäßig.

Beweis: Für $n > N_0$ ist b_n eine obere Schranke für $|u_n(x)|$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ auf E absolut. Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz zeigen wir, dass die Partialsummenfolge dem Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz genügt (siehe Theorem 6.1). Tatsächlich ist für alle $x \in E$

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{m} u_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |u_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{m} b_i.$$

Nun ist wegen der Konvergenz der Zahlenreihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ die zugeordnete Partialsummenfolge Cauchyfolge, also gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; \forall n > n_0(\varepsilon) : \qquad \sum_{i=n+1}^{m} b_i < \varepsilon.$$

Somit genügt die Partialsummenfolge $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dem Cauchy-Kriterium (3).

BEISPIEL 6.9 *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist auf $\mathbb{R}$ *gleichmäßig konvergent, denn wegen*

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

6.4 Potenzreihen

Lemma 5.2 beinhaltete die Stetigkeit einer Potenzreihe an der Entwicklungsstelle, mit der in Abschnitt 5.8.3 gezeigten Möglichkeit der Umrechnung einer Potenzreihe kann die Stetigkeit in jedem Punkt des Konvergenzkreises $B(z_0, \rho) \subset \mathbb{C}$ gezeigt werden. Wir zeigen, dass eine Potenzreihe auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert und bereiten damit einen neuen Beweis für die Stetigkeit einer Potenzreihe in jedem Punkt ihres Konvergenzkreises vor.

THEOREM 6.5 *Eine Potenzreihe ist auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzkreises* $B(z_0, \rho)$ *gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Sei $K \subset B(z_0, \rho)$ kompakt und $\rho < \infty$.

(i) Wir zeigen zunächst, dass der Abstand einer kompakten Menge K von einer abgeschlossenen Menge A, die keinen Punkt gemeinsam haben, positiv ist. (Dieudonné, Kapitel 3.17, Aufgabe 2). Die Abbildung $f : K \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

ist auf der kompakten Menge K stetig, insbesondere gilt

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y.$$

In der Tat haben wir für alle $z \in A$

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

woraus durch Übergang zum Infimum

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

folgt. Vertauschung von x und y ergibt schließlich

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Nach dem Satz von Weierstraß gibt es also ein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = d(x_0, A) = \operatorname{dist}(K, A)$. Angenommen $d(x_0, A) = 0$. Dann gibt es eine Folge (a_k) in A mit $d(x_0, a_k) \to 0$ für $k \to \infty$, d.h., die Folge (a_k) konvergiert gegen x_0. Da A abgeschlossen war, ist $x_0 \in A$, im Widerspruch zu $K \cap A = \emptyset$.

(ii) Der Abstand von K zu $S(z_0, \rho)$ sei nun τ. Dann ist $K \subset \bar{B}(z_0, \rho - \tau)$ und die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(\rho - \tau)^n$$

eine konvergente Majorante zur Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in K$.

(iii) Im Fall $\rho = \infty$ finden wir eine konvergente Majorante, da die kompakte Menge K (abgeschlossen und) beschränkt ist.

FOLGERUNG 6.1 *Eine Potenzreihe ist in jedem Punkt des Konvergenzkreises $B(z_0, \rho)$ stetig.*

Beweis. Sei $z_1 \in B(z_0, \rho)$ und $\tau := \rho - |z_1 - z_0| > 0$. Da die Potenzreihe auf der kompakten Menge $\bar{B}(z_1, \tau/2) \subset B(z_0, \rho)$ gleichmäßig konvergiert und die Partialsummen auf $\bar{B}(z_1, \tau/2)$ stetig sind, ist die Summe der Reihe auf $\bar{B}(z_1, \tau/2)$ stetig. Nun war $z_1 \in B(z_0, \rho)$ beliebig, also ist die Potenzreihe in jedem Punkt des Konvergenzkreises stetig.

FOLGERUNG 6.2 *Die Abbildungen* $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ *sind auf* $\mathbb{C}$ *stetig.*

7 Differentialrechnung in einer Variablen

Zu Beginn der historischen Entwicklung der Differentialrechnung stehen eine geometrische und eine physikalische Fragestellung: das Tangentenproblem und das Problem der Momentangeschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Massenpunktes. Im ersten Fall ist eine Gerade gesucht, die durch einen gegebenen Punkt eines glatten Kurvenstücks verläuft und dieses Kurvenstück *möglichst gut approximiert*; im zweiten Fall sucht man eine gleichförmige Bewegung, die zu einem gegebenen Zeitpunkt die ungleichförmige Bewegung *möglichst gut approximiert.*
Grundidee. Approximation beliebiger Funktionen in der Umgebung eines Punktes durch lineare Funktionen.

7.1 Begriff der Differenzierbarkeit

DEFINITION 7.1 *Seien $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Abbildung f heißt im Punkt $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, wenn es eine Zahl m und eine in x_0 stetige Abbildung $r : D \to \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \quad x \in D$$

und $r(x_0) = 0$.

BEMERKUNG 7.1 *Wie lassen sich im Falle ihrer Existenz m und r ermitteln? Für $x \neq x_0$ gilt*

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - r(x), \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

und definiert man $r : D \to \mathbb{R}$ durch

$$r(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m & x \neq x_0, \\ 0 & x = x_0, \end{cases}$$

so genügen m und r den Bedingungen der obigen Definition. Der Vorteil der quotientenfreien Formulierung ist neben einfacheren Beweisen die Möglichkeit der Übertragung auf den mehrdimensionalen Fall.

BEMERKUNG 7.2 *Ist f in $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind m und r eindeutig bestimmt. Die Zahl m heißt Ableitung von f an der Stelle x_0, in Zeichen*

$$m = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

BEISPIEL 7.1 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.*

Wir haben

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} x^i x_0^{n-i-1} \\ &= m(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \end{aligned}$$

mit

$$m = nx_0^{n-1}, \quad r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i x_0^{n-i-1} - nx_0^{n-1}.$$

BEISPIEL 7.2 *Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist in jedem Punkt $x_0 \neq 0$ differenzierbar und es gilt*

$$f'(x_0) = -\frac{n}{x_0^{n+1}}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0^{2n}} \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= -\frac{1}{x_0^{2n}} \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = -\frac{n}{x_0^{n+1}} \end{aligned}$$

BEISPIEL 7.3 *Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist in jedem Punkt $x_0 > 0$ differenzierbar und es gilt*

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Die Aussage folgt unmittelbar aus

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

durch Grenzübergang $x \to x_0$.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass stetige Funktionen nicht notwendig differenzierbar sind. Insbesondere gibt es auch auf $\mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar sind (vgl. Barner/Flohr, Analysis I, Abschnitt 8.1).

BEISPIEL 7.4 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.*

Die Aussage ergibt sich aus

$$1 = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - 0}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1.$$

BEISPIEL 7.5 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} x^k \cos(\pi/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist für $k = 1$ im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar. Für $k \geq 2$ ist f im Punkt $x = 0$ differenzierbar.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{k-1} \cos(\pi/x)$$

existiert für $k \geq 2$, jedoch nicht für $k = 1$.

THEOREM 7.1 *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Da f in $x_0 \in D$ differenzierbar ist, haben wir für alle $x \in D$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

mit $r(x) \to 0$ für $x \to x_0$. Also gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta(1)$ mit $|r(x)| < 1$ für $|x - x_0| < \delta(1)$. Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein

$$\delta^*(\varepsilon) := \min\left(\frac{\varepsilon}{m+1}, \delta(1)\right),$$

so dass für $|x - x_0| < \delta^*(\varepsilon)$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (m+1)|x - x_0| < \varepsilon.$$

Aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 folgt nicht die Stetigkeit von f in Umgebung von x_0, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 7.6 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}, \\ x + x^2 & x \neq \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar, aber an keiner anderen Stelle $x \neq 0$.

Für den Differenzenquotienten an der Stelle $x = 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 + x & x \neq \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Setze $m = 1$ und

$$r(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, \\ x & x \neq \mathbb{Q}, \end{cases}$$

dann haben wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(0) + m(x - 0) + r(x)(x - 0)$$

und r ist in $x = 0$ stetig mit $r(0) = 0$. Da f in allen Punkten $x \neq 0$ unstetig ist, kann f in diesen Punkten nicht differenzierbar sein.

Oft ist es nützlich, auch den Begriff der einseitigen Differenzierbarkeit einzuführen.

DEFINITION 7.2 *Ist die Restriktion von f auf $D \cap \{x : x \geq x_0\}$ (bzw. von f auf $D \cap \{x : x \leq x_0\}$) differenzierbar, so heißt f in x_0 rechtsseitig differenzierbar (bzw. linksseitig differenzierbar), in Zeichen*

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

BEISPIEL 7.7 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist im Punkt $x = 0$ einseitig differenzierbar, wobei $f'_+(0) = 1$ und $f'_-(0) = -1$.*

THEOREM 7.2 *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und $1/f$ (falls $f(x_0) \neq 0$) an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (c \cdot f)'(x_0) &= c \cdot f'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \\ \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2} \end{aligned}$$

Beweis. Setzt man $f_1(x) := f'(x_0) + r(x)$ für alle $x \in D$, so stellt man fest, dass aus der Differenzierbarkeit von f in $x_0 \in D$ die Existenz einer Funktion $f_1 : D \to \mathbb{R}$ folgt, die in x_0 stetig ist, mit $f_1(x_0) = f'(x_0)$, und für die

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0)$$

gilt. Umgekehrt folgt aus der Existenz einer derartigen Funktion auch die Differenzierbarkeit von f in x_0.
Exemplarisch beweisen wir die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Es gelten die Beziehungen

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0) \quad \text{und} \quad g(x) = g(x_0) + g_1(x)(x - x_0).$$

Damit haben wir

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (f_1(x)g(x_0) + f(x_0)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x - x_0)) \cdot (x - x_0).$$

Die Abbildung

$$x \to f_1(x)g(x_0) + f(x_0)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x - x_0)$$

ist an der Stelle x_0 stetig, somit ist $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= f_1(x_0)g(x_0) + f(x_0)g_1(x_0) + f_1(x_0)g_1(x_0)(x_0 - x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

FOLGERUNG 7.1 *(Quotientenregel)*
Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist auch f/g in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

THEOREM 7.3 *(Kettenregel)*
Es sei die Verkettung $g \circ f$ möglich, f sei an der Stelle x_0 und g an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Die Differenzierbarkeit von f in x_0 und die von g in $y_0 = f(x_0)$ beinhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f_1(x)(x - x_0) \\ g(y) &= g(y_0) + g_1(y)(y - y_0), \end{aligned}$$

woraus die Beziehung

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= (g \circ f)(x_0) + g_1(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) \\ &= (g \circ f)(x_0) + g_1(f(x)) \cdot f_1(x) \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Die Abbildung $x \to g_1(f(x)) \cdot f_1(x)$ ist im Punkt x_0 stetig, daher ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g_1(f(x_0)) \cdot f_1(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

FOLGERUNG 7.2 *(Ableitung der Umkehrfunktion)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv, an der Stelle x_0 differenzierbar und die Umkehrfunktion g von f an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Aus $x = g(f(x))$ für alle $x \in D$ folgt unmittelbar

$$1 = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Die Voraussetzung, dass g in y_0 differenzierbar ist, kann auf g in y_0 stetig abgeschwächt werden, wie der folgende Satz zeigt.

THEOREM 7.4 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv, an der Stelle x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$. Ist die Umkehrfunktion g von f an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ stetig, so ist g an der Stelle y_0 sogar differenzierbar und es gilt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 beinhaltet

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0), \qquad f_1(x_0) = f'(x_0).$$

Setze $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ und verwende $x = g(y)$. Dann folgt

$$y - y_0 = f_1(g(y)) \cdot (g(y) - g(y_0)).$$

Die Abbildung $f_1 \circ g$ ist an der Stelle y_0 stetig und

$$f_1(g(y_0)) = f_1(x_0) = f'(x_0) \neq 0.$$

In Umgebung von y_0 gilt daher

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{f_1(g(y))}(y - y_0),$$

wobei die Abbildung $y \to 1/f_1(g(y))$ in y_0 stetig ist.

Beachte: Die Injektivität von f kann im allgemeinen nicht aus $f'(x_0) \neq 0$ (auch nicht lokal!) gefolgert werden. Dazu betrachten wir die in Abb. 18 dargestellte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \dfrac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wir haben $f'(0) = 1 \neq 0$, aber die stetige Abbildung f ist in keiner Umgebung von $x_0 = 0$ injektiv. Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz unter Beachtung von

$$f(x_{2k+1}) < f(x_{2k-1}) < f(x_{2k}), \quad x_k = \frac{1}{k}.$$

Jeder Wert aus dem Intervall $(f(x_{2k-1}), f(x_{2k}))$ wird also in (x_{2k+1}, x_{2k-1}) mindestens zweimal angenommen.

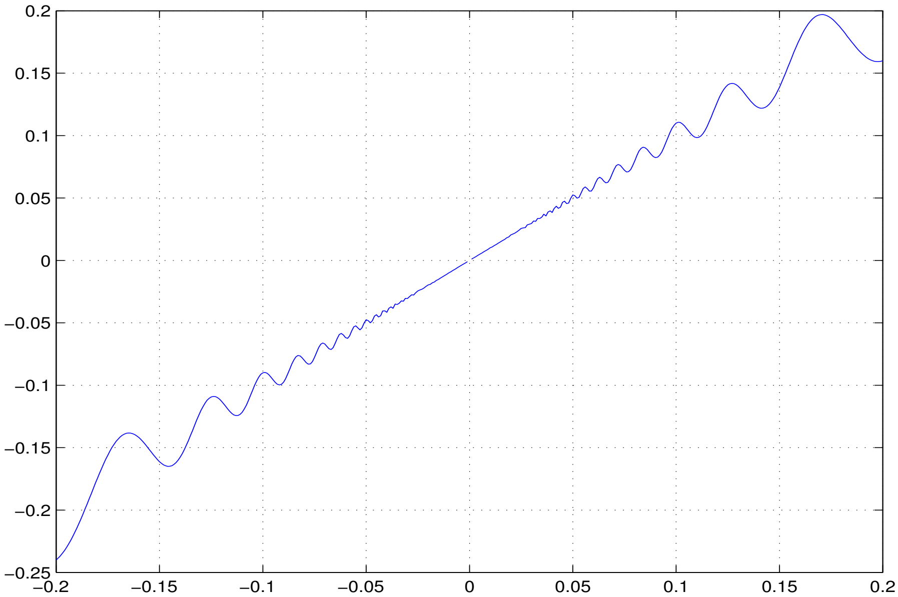

Abbildung 18: Funktion $f(x)$

7.2 Mittelwertsatz

Motivation. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist der Zuwachs

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Wie groß ist der Zuwachs tatsächlich? Antwort darauf gibt der Mittelwertsatz. Wir betrachten zuvor einen Spezialfall.

THEOREM 7.5 *(Satz von Rolle)*
Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Die Abbildung f ist auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ stetig, nach dem Satz von Weierstraß nimmt f auf $[a,b]$ Supremum und Infimum als Funktionswerte an.

(i) $f(a) = f(b) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$.

(ii) Sei $f(x) > f(a)$ für ein $x \in (a,b)$ und $f(\xi) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann gilt

$$f(x) \le f(\xi) \quad \forall x \in [a,b].$$

Nun ist f in ξ differenzierbar, d.h.,

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + r(x)(x - \xi) \le 0.$$

In Umgebung von ξ ist $x-\xi$ positiv und negativ, für $x \to \xi+0$ folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi+0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0,$$

für $x \to \xi - 0$

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi-0} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0,$$

also $f'(\xi) = 0$.

(iii) Der Fall $f(x) < f(a)$ für ein $x \in (a,b)$ verläuft analog.

THEOREM 7.6 *(Mittelwertsatz)*
Die Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Beweis. Anwendung des Satzes von Rolle auf die Hilfsfunktion

$$\varphi(x) := f(x) - f(a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

FOLGERUNG 7.3 *(Kennzeichnung der konstanten Funktionen)*
Sei I ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Dann ist f auf I konstant.

Beweis. Sei $a \in I$ beliebig und $x \in I$, $x \neq a$. Dann gilt auf jedem Intervall $[a,x]$ bzw. $[x,a]$ der Mittelwertsatz

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0.$$

Also ist $f(x) = f(a)$ für alle $x \in I$.

Die nächste Folgerung liefert einen Beitrag zum Umkehrproblem der Differentialrechnung.

DEFINITION 7.3 *Gibt es zu $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$, für die $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so heißt F Stammfunktion zu f.*

FOLGERUNG 7.4 *Ist $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und hat $f : D \to \mathbb{R}$ auf D eine Stammfunktion F, so erhält man alle Stammfunktionen zu f durch Addition von Konstanten.*

Beweis. Aus $F' = f$ und $G' = f$ auf D folgt

$$(F-G)'(x) = 0 \quad \forall x \in D,$$

d.h., $F(x) - G(x) = const$ auf D.

7.3 Monotoniekriterien für differenzierbare Funktionen

DEFINITION 7.4 *Die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D monoton wachsend, wenn*

$$(f(y) - f(x))(y - x) \geq 0 \quad \forall x, y \in D,$$

und auf D monoton fallend, wenn

$$(f(y) - f(x))(y - x) \leq 0 \quad \forall x, y \in D.$$

THEOREM 7.7 *Eine auf einem Intervall I definierte, differenzierbare Funktion f ist genau dann auf I monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

(i) f monoton wachsend $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall y, x \in I \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq 0.$$

(ii) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ monoton wachsend
Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$(f(y) - f(x))(y - x) = f'(\xi)(y - x)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in I.$$

DEFINITION 7.5 *Die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D streng monoton wachsend, wenn*

$$(f(y) - f(x))(y - x) > 0 \quad \forall x, y \in D \text{ mit } x \neq y,$$

und auf D streng monoton fallend, wenn

$$(f(y) - f(x))(y - x) < 0 \quad \forall x, y \in D \text{ mit } x \neq y.$$

THEOREM 7.8 *Eine auf einem Intervall I definierte, differenzierbare Funktion f ist auf I genau dann streng monoton wachsend, wenn*

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ *und*

(ii) *es kein Teilintervall $I^* \subset I$ gibt, mit $f'(x) = 0$ auf I^*.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

(a) f streng monoton $\Rightarrow$ (i) und (ii).
Zunächst folgt aus der strengen Monotonie die Monotonie und somit (i). Angenommen es gäbe ein Teilintervall I^* mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I^*$. Dann haben wir nach der Folgerung aus dem Mittelwertsatz $f(x) = const$ auf I^*, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) (i) und (ii) $\Rightarrow f$ streng monoton.
Zunächst folgt aus (i) die Monotonie von f auf I. Angenommen $f(x_1) = f(x_2)$ für $x_1 < x_2$, dann folgt für alle $x \in [x_1, x_2]$

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1),$$

also $f(x) = const$ auf $[x_1, x_2]$. Hieraus ergibt sich $f'(x) = 0$ auf dem Teilintervall (x_1, x_2) im Widerspruch zu (ii).

7.4 Zweiter Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Mittelwertsatz und wenden die Verallgemeinerung nutzbringend für die Berechnung von Grenzwerten an.

THEOREM 7.9 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\varphi(x) := (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Es gilt: φ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es daher ein $\xi \in (a, b)$ mit $\varphi'(\xi) = 0$. Nun ist

$$0 = \varphi'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

BEMERKUNG 7.3 *Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann der zweite Mittelwertsatz in Quotientenform geschrieben werden. Sei zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt*

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(b) - g(a)).$$

Der Faktor $g(b) - g(a)$ ist verschieden von Null, da andernfalls ein $\xi^* \in (a, b)$ existiert mit $g'(\xi^*) = 0$. Also gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

BEMERKUNG 7.4 *Ist $g(x) = x$, so ist $g'(x) = 1 \neq 0$ für alle x und wir erhalten den (einfachen) Mittelwertsatz.*

Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0,$$

so gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Sind $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ nicht. Die Frage ist, welche Aussagen für den Grenzwert des Quotienten getroffen werden können, wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

gilt. In diesem Fall spricht man von einem unbestimmtem Ausdruck, der Form 0/0. Folgende Ausdrücke sind unbestimmt:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right), \quad (0\cdot\infty), \quad (\infty-\infty), \quad \left(1^{\infty}\right), \quad \left(0^{0}\right), \quad \left(\infty^{0}\right).$$

THEOREM 7.10 *(Regel von Bernoulli/ de l'Hospital)*
Seien f, g für $x > x_0$ definiert und differenzierbar,

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} g(x) = 0$$

sowie $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wir setzen f und g stetig nach x_0 fort und können $f(x_0) = g(x_0) = 0$ annehmen. Auf $[x_0, x]$ wenden wir den zweiten Mittelwertsatz an und erhalten

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{mit } x_0 < \xi < x.$$

Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$. Dann existiert eine Folge (ξ_n) mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0.$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ existiert, existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ und beide sind gleich.

BEMERKUNG 7.5 *Der Satz gilt unter modifizierten Voraussetzungen auch für unbestimmte Ausdrücke der Form $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ bzw. für Grenzwerte $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0$ und $x \to \pm\infty$.*

7.5 Höhere Ableitungen

DEFINITION 7.6 *Sei f in jedem Punkt von $B(x_0, r)$ differenzierbar. Ist die Abbildung $f' : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so heißt f in x_0 zweimal differenzierbar, in Zeichen*

$$f''(x_0) := (f')'(x_0).$$

Allgemein definiert man die höheren Ableitungen rekursiv. Sei $f^{(k)} : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so heißt f in x_0 $k+1$-mal differenzierbar, in Zeichen

$$f^{(k+1)}(x_0) := \left(f^{(k)}\right)'(x_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

FOLGERUNG 7.5 *Sei $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar in x_0. Dann sind f, f',..., $f^{(k-1)}$ in x_0 stetig. Die k-te Ableitung ist nicht notwendig stetig.*

DEFINITION 7.7 *Ist $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ in Umgebung von x_0 k-mal differenzierbar und die k-te Ableitung in x_0 stetig, so heißt f in x_0 k-mal stetig differenzierbar. Existiert die Ableitung $f^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so heißt f unendlich oft differenzierbar.*

Die Menge aller auf D k-mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^k(D)$, für $\mathcal{C}^0(D)$ schreiben wir einfach $\mathcal{C}(D)$ und die Menge der auf D unendlich differenzierbaren wird mit $\mathcal{C}^\infty(D)$ notiert.

BEMERKUNG 7.6 *Es gilt die Inklusion für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{C}^\infty(D) \subset \mathcal{C}^k(D) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}(D).$$

Beachte: Eine differenzierbare Funktion muss, wie das folgende Beispiel zeigt, nicht stetig differenzierbar sein.

BEISPIEL 7.8 *Betrachte die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \textit{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0, \end{cases}$$

deren Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ nicht stetig ist (vgl. Abb. 19).
Die Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \textit{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Die Ableitung ist unstetig an der Stelle Null, denn für $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_k \to 0 \textit{ und } f'(x_k) = 1, \quad \textit{folglich } \lim_{k \to 0} f'(x_k) \neq f'(0) = 0.$$

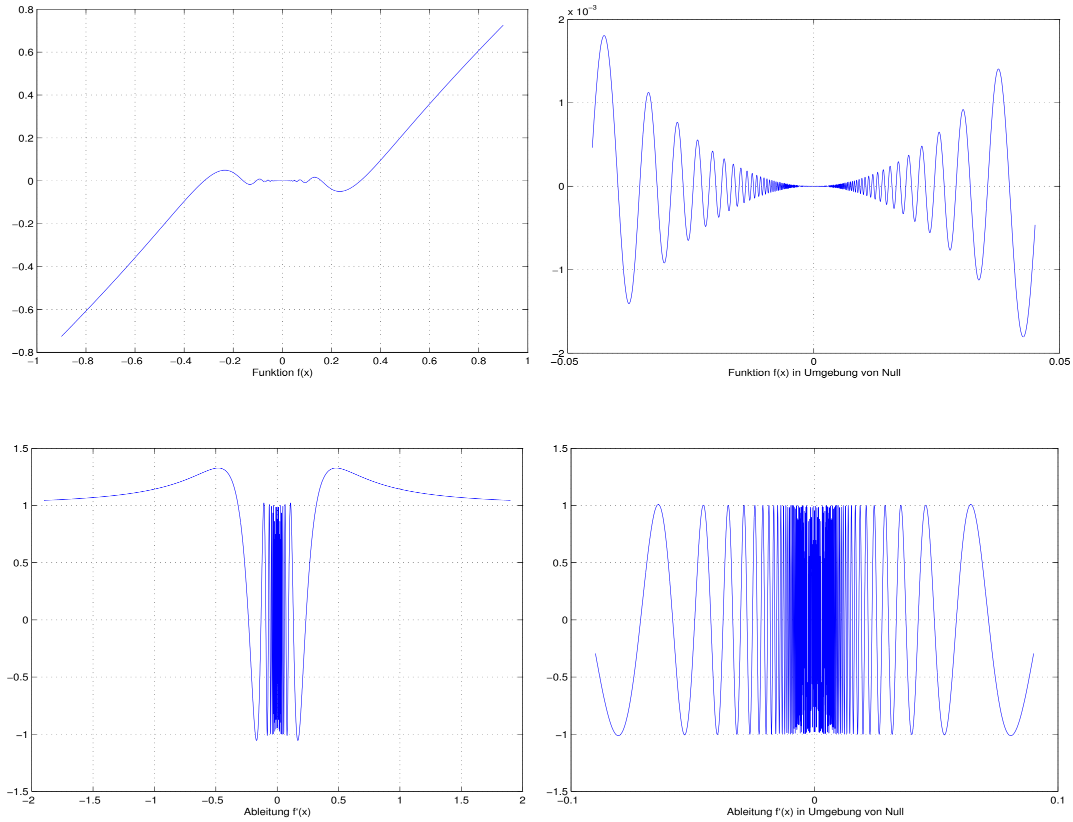

Abbildung 19: Darstellung einer im Punkt $x = 0$ nicht stetig differenzierbaren Funktion (oben) und deren Ableitung (unten).

7.6 Konvexe Funktionen

DEFINITION 7.8 *Eine auf einem Intervall I definierte Funktion heißt konvex (von unten), wenn*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1]: \qquad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt auf I streng konvex, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \quad \forall \lambda \in (0,1): \qquad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Setzt man $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = (1-\lambda)$, so erhält man eine äquivalente Charakterisierung der Konvexität,

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1: \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

THEOREM 7.11 *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf I konvex, so gilt*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in I, \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1: \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Beweis. Vollständige Induktion, $n = 1$ ist trivialerweise erfüllt, $n = 2$ entspricht der Definition der Konvexität. Sei die obige Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig. Wir betrachten den Fall von $n+1$ Summanden, wobei wir o.B.d.A. $\lambda_{n+1} \neq 1$ voraussetzen dürfen. Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1,$$

kann die Induktionsvoraussetzung (Aussage für für n Summanden) angewendet werden, folglich ist

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = (1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

THEOREM 7.12 *Eine auf I differenzierbare Funktion f ist genau dann auf I konvex, wenn ihre Ableitung auf I monoton wachsend ist.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

(a) f auf I konvex $\Rightarrow$ f' auf I monoton.
Seien $x, y \in I$, $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$. Da f auf I konvex ist, gilt

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x),$$

woraus

$$\frac{f(x+\lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda(y-x)} \cdot (y-x) \leq f(y) - f(x),$$

und für $\lambda \to +0$

$$f(x) + f'(x)(y-x) \leq f(y), \quad \forall x, y \in I,\ x \neq y,$$

folgt. Diese Ungleichung läßt sich geometrisch wie folgt interpretieren: Die Tangente an f im jedem Punkt $x \in I$ liegt für alle $y \in I$ unterhalb der Funktion f. Durch Vertauschen von x und y haben wir auch

$$f(y) + f'(y)(x-y) \leq f(x),$$

woraus durch Addition unmittelbar

$$(f'(x) - f'(y))(x-y) \leq 0$$

folgt.

(b) f' auf I monoton $\Rightarrow$ f auf I konvex.
Seien $x_1, x_2 \in I$, $x := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ mit $\lambda \in [0,1]$ und $x_1 < x_2$. Der Mittelwertsatz liefert

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \qquad\qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

mit $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit

$$\begin{aligned} x - x_1 &= (1-\lambda)(x_2 - x_1) \geq 0 \\ x_2 - x &= \lambda(x_2 - x_1) \geq 0 \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\lambda(f(x) - f(x_1)) \leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x)),$$

oder äquivalent

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

THEOREM 7.13 *Eine auf I zweimal differenzierbare Funktion ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Äquivalenz

$$f' \text{ auf } I \text{ monoton} \quad \Leftrightarrow \quad (f')'(x) = f''(x) \geq 0,\ \forall x \in I.$$

7.7 Taylorsche Formeln

Die Frage der Differenzierbarkeit einer Funktion ist, wie wir gesehen haben, äquivalent zur lokalen Approximierbarkeit des Zuwachses durch eine lineare Funktion,

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Wir untersuchen nun allgemeiner, unter welchen Voraussetzungen sich glatte Funktionen lokal durch Polynome approximieren lassen. Wir beginnen mit einer Darstellungsformel für Polynome n-ten Grades.

LEMMA 7.1 *Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom n-ten Grades und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Beweis. Setzt man das Polynom allgemein in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

an, so erhält man sukzessive $a_0 = f(x_0), \ldots, a_k = f^{(k)}(x_0)/(k!)$.

Wir betrachten nun allgemeiner n-mal stetig differenzierbare Funktionen f auf einer konvexen Menge D.

THEOREM 7.14 *(Taylorsche Formel mit Restgliedabschätzung)*
Seien D konvex, $f \in \mathcal{C}^n(D)$ und $x_0 \in D$. Dann gibt es ein $R_n(f, x_0) \in \mathcal{C}^n(D)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(f, x_0)(x), \qquad x \in D.$$

Das Restglied $R_n(f, x_0)$ genügt der Abschätzung

$$|R_n(f, x_0)(x)| \le \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0<\theta<1} |f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)) - f^{(n)}(x_0)|\, |x - x_0|^n, \quad x \in D.$$

Beweis. Seien $x, z \in D$. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\Phi(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0 + z(x - x_0))}{k!}(x - x_0)^k (1 - z)^k - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n (1 - z)^n.$$

dann sind $\Phi(0) = R_n(f, x_0)(x)$ und $\Phi(1) = 0$, sowie

$$\Phi'(z) = \frac{f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0 + z(x - x_0))}{(n-1)!}(1 - z)^{n-1}(x - x_0)^n.$$

Damit folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |R_n(f, x_0)(x)| &= |\Phi(1) - \Phi(0)| = |\Phi'(\theta)| \\ &\le \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0<\theta<1} |f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))|\, |x - x_0|^n. \end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, jedes $f \in \mathcal{C}^n(D)$ und jedes $x_0 \in D$ ist

$$P_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ein Polynom n-ten Grades, das Taylorpolynom n-ten Grades von f an der Entwicklungsstelle x_0 und

$$R_n(f, x_0) = f - P_n(f, x_0)$$

ist das Restglied n-ter Ordnung von f an der Stelle x_0. Seien nun zusätzlich $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$, dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylorreihe von f mit der Entwicklungsstelle x_0. Hat die Taylorreihe den Konvergenzradius $\rho > 0$, so folgt daraus noch nicht, dass die Taylorreihe für $|x - x_0| < \rho$ die Funktion f darstellt, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 7.9 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ beliebig oft differenzierbar mit $f^{(k)}(0) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Damit stellt die Taylorreihe die Funktion $g(x) = 0 \neq f(x)$ dar.

Offensichtlich gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_n(f, x_0)(x) = 0.$$

Basierend auf den zweiten Mittelwertsatz leiten wir nun verschiedene Darstellungen des Restgliedes $R_n(f, x_0)$ ab.

THEOREM 7.15 *(Schlömilchsche Restglieddarstellung)*
Seien $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei f auf I $n+1$-mal differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I\backslash\{x_0\}$ ein $\xi := x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, so dass

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!} \left(\frac{x - \xi}{x - x_0}\right)^{n-p+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktionen $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Phi(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x - z)^k, \qquad \Psi(z) := (x - z)^p.$$

Beide Funktionen sind auf I differenzierbar mit

$$\Phi'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n, \qquad \Psi'(z) = -p(x - z)^{p-1}.$$

Aus dem zweiten Mittelwertsatz folgt die Existenz einer Zahl $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ mit

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \frac{\Phi'(\xi)}{\Psi'(\xi)}(\Psi(x) - \Psi(x_0)).$$

Nun gelten

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = R_n(f, x_0)(x), \qquad \Psi(x) - \Psi(x_0) = -(x - x_0)^p,$$

woraus die Behauptung folgt.

FOLGERUNG 7.6 *(Lagrangesche und Cauchysche Restglieddarstellung)* *Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.15 gelten die Darstellungen von Lagrange und Cauchy*

$$\begin{aligned} R_n(f, x_0)(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ R_n(f, x_0)(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(\frac{x - \xi}{x - x_0}\right)^n (x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Darstellungen folgen aus Theorem 7.15 für $p = n + 1$ bzw. $p = 1$.

BEISPIEL 7.10 *Für* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \cos x$ *haben wir*

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x,$$

somit gilt $x_0 = 0$ *und* $n = 2m + 1$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2m+1}(f, x_0)(x).$$

Wir betrachten das Verhalten des Restgliedes in der Lagrangeschen Form

$$R_{2m+1}(f, 0)(x) = \frac{(-1)^{m+1} \cos \xi}{(2m+2)!} x^{2m+2}, \quad n = 2m \text{ oder } n = 2m - 1.$$

Aus $|\cos \xi| \leq 1$ *folgt sofort*

$$\lim_{m \to \infty} R_{2m+1}(f, 0)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

die Taylorreihe von $\cos x$ *an der Stelle* $x_0 = 0$ *stellt also für alle* $x \in \mathbb{R}$ *die Funktion* $\cos x$ *dar, in Zeichen*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

BEISPIEL 7.11 *Für* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $D = \{x : x > -1\}$ *und* $f(x) = \ln(1 + x)$ *haben wir*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + x) \\ f'(x) &= (1 + x)^{-1} \\ f''(x) &= -(1 + x)^{-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k - 1)!(1 + x)^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

woraus

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(f,0)(x)$$

folgt.

Im folgenden untersuchen wir das Verhalten des Restgliedes für $n \to \infty$. Das Restglied in der Lagrangeschen Form ergibt sich zu

$$R_n(f,0)(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0,1).$$

Sei zunächst $x \in [0,1]$. Dann gilt wegen

$$0 \leq \frac{x}{1+\theta x} \leq 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

für das Restglied n-ter Ordnung

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |R_n(f,0)(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Also haben wir

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \quad x \in [0,1]$$

und speziell für $x = 1$ folgt für die Summe der alternierenden Reihe

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ ist $\rho = 1$, damit bleibt die Frage zu klären, ob die Reihe auch für $x \in (-1,0)$ die Funktion $\ln(1+x)$ darstellt. Da

$$\left| \frac{x}{1+\theta x} \right|$$

für $x \in (-1,0)$ und $\theta \in (0,1)$ nicht mehr durch 1 beschränkt ist, ist die Lagrangesche Form des Restgliedes ungeeignet, um das Verhalten des Restgliedes für $n \to \infty$ zu untersuchen. Betrachten wir die Cauchysche Form des Restgliedes

$$R_n(f,0)(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot \frac{x}{1+\theta x} \cdot x^n.$$

Aufgrund der Abschätzung

$$0 \leq \frac{1-\theta}{1+\theta x} \leq 1, \quad \theta \in (0,1), \quad x \in (-1,0)$$

folgt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |R_n(f,0)(x)| \leq \frac{|x|}{1+x} \cdot \lim_{n\to\infty} |x|^n = 0.$$

Somit gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \qquad x \in (-1,1].$$

7.8 Lokale Extremwerttheorie

DEFINITION 7.9 *$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein lokales Minimum (lokales Maximum), wenn in einer Umgebung $U(x_0)$*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad\qquad (f(x) \leq f(x_0))$$

gilt.

THEOREM 7.16 *(Notwendige Bedingung für Extrema)*
Seien x_0 ein lokales Extrema von f und f im Punkt x_0 differenzierbar. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

hat im Fall eines lokalen Extremwertes in x_0 verschiedenes Vorzeichen für $h > 0$ und $h < 0$. Durch Grenzübergang $h \to \pm 0$ erhält man die Behauptung.

THEOREM 7.17 *(Hinreichende Bedingung für Extrema)*
Seien $f : B(x_0,r) \to \mathbb{R}$ auf $B(x_0,r)$ zweimal differenzierbar, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$) fr alle $x \in B(x_0,r)\backslash\{x_0\}$. Dann hat f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

Beweis. Die Taylorsche Formel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x-x_0))}{2}(x-x_0)^2$$

ergibt unter Beachtung der Voraussetzungen

$$f(x) > f(x_0) \quad (\text{ bzw. } f(x) < f(x_0)\ ) \qquad \forall x \in B(x_0,r)\backslash\{x_0\}.$$

BEMERKUNG 7.7 *Gilt $f''(x_0) \neq 0$ und ist f'' in x_0 stetig, so hat $f''(x)$ in Umgebung von x_0 das gleiche Vorzeichen wie $f''(x_0)$.*

THEOREM 7.18 *(Hinreichende Bedingung für Extrema)*
Seien $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ auf $B(x_0, r)$ $2n$-mal differenzierbar, $f'(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$. Ist $f^{(2n)}$ in x_0 stetig, so hat f in x_0 ein lokales Extrema, und zwar im Fall $f^{(2n)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum und im Fall $f^{(2n)}(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.

Beweis. Unter Beachtung der Voraussetzungen erhalten wir aus der Taylorschen Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(2n)!}(x - x_0)^{(2n)},$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

BEISPIEL 7.12 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, hat für gerade $m \in \mathbb{N}$ ein lokales Maximum in $x_0 = 0$, denn $f'(0) = \ldots = f^{(m-1)}(0) = 0$ und $f^{(m)}(0) = m! > 0$.*

Beachte: Eine differenzierbare Funktion, die einen Extremwert in einem Punkt x_0 annimmt, muss, wie das folgende Beispiel zeigt, in der Umgebung von x_0 das Vorzeichen nicht wechseln.

BEISPIEL 7.13 *Betrachte die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin \frac{1}{x}) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Wegen

$$f(x) = x^4(2 + \sin \frac{1}{x}) \geq 0 = f(0)$$

hat f im Punkt $x_0 = 0$ ein globales Minimum (vgl. Abb. 20).

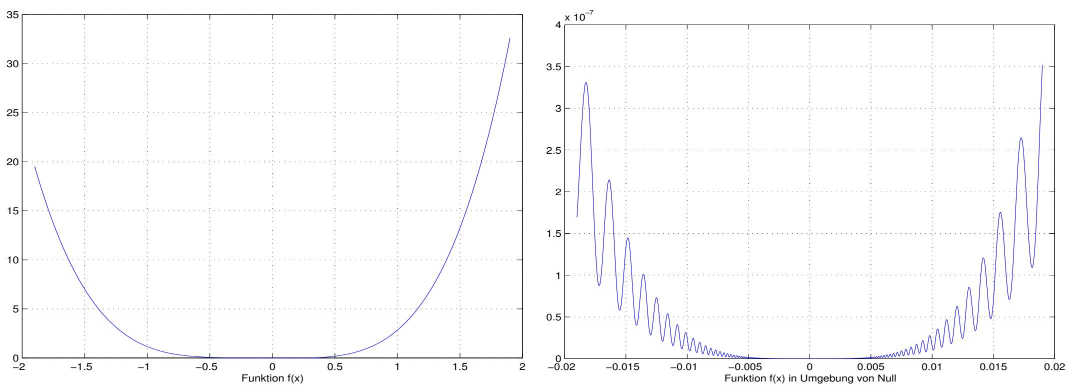

Abbildung 20: Globales und lokales Verhalten der Funktion aus Bsp. 7.13.

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} x^2[4x(2 + \sin \dfrac{1}{x}) - \cos \dfrac{1}{x}] & \textit{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Für $x_{2k} = \frac{1}{2k\pi}$ mit $k \geq 1$ folgt

$$f'(x_{2k}) = x_{2k}^2(8x_{2k} - 1) < 0$$

während für $x_{2k+1} = \frac{1}{(2k\pi+1)\pi}$

$$f'(x_{2k+1}) = x_{2k+1}^2(8x_{2k+1} + 1) > 0$$

gilt (vgl. Abb. 21).

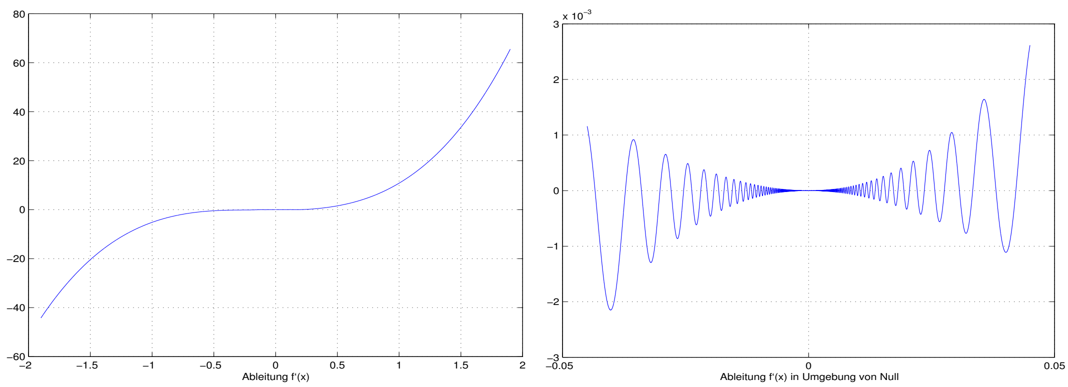

Abbildung 21: Globales und lokales Verhalten der Ableitung der Funktion aus Bsp. 7.13.