Lösungsvorschlag 2

Aufgabe 2.1
Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt monoton fallen, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n) \geq f(n+1)$. Sie heißt monoton steigend, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n) \leq f(n+1)$.

(a) Ist die Menge dieser monoton fallenden Funktionen abzählbar oder nicht?
(b) Ist die Menge dieser monoton steigenden Funktionen abzählbar oder nicht?

Lösungsvorschlag 2.1

(a) Sei $F = \{f \mid f \text{ ist monoton fallende Funktion}\}$ die Menge all solcher monoton fallenden Funktionen. Wir wollen zeigen, dass F abzählbar ist. Da $(\mathbb{N}, >)$ wohlfundiert ist, kann eine Funktion aus F nur endlich oft *echt* absteigen. D.h. jede solche Funktion f ist ab einer gewissen Stelle $k \in \mathbb{N}$ konstant ($f(n) = f(k) \,\forall n > k$). Wir können F daher darstellen als $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$. F_k bezeichne hierbei die Menge aller ab der Stelle k konstanten Funktionen. Wir zeigen nun, dass F_k für jedes k abzählbar ist.
Sei hierzu
$$h : F_k \to \mathbb{N}^{k+1}, h(f) = (f(0), ..., f(k)).$$
Diese Funktion h ist injektiv, denn für $f, g \in F_k$ gilt:
$$(f(0), ..., f(k)) = h(f) = h(g) = (g(0), ..., g(k)) \Rightarrow f(n) = g(n) \,\forall 0 \leq n \leq k.$$
Weiter gilt: $\forall n > k : f(n) = f(k) = g(k) = g(n)$.
Insgesamt erhalten wir also $f(n) = g(n) \,\forall n \in \mathbb{N}$ und somit $f = g$.
Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist
$$i : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}, i(n_0, ..., n_k) = p_0^{n_0} \cdot ... \cdot p_k^{n_k},$$
mit $p_0, ..., p_k$ paarweise verschiedenen Primzahlen, injektiv.
Also ergibt sich $|F_k| \leq |\mathbb{N}^{k+1}| \leq \mathbb{N}$ und somit ist F_k abzählbar. Nun ist $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen nach Aufgabe 1.2 wiederum abzählbar. ■

(b) Sei $S = \{f \mid f \text{ ist monoton steigende Funktion}\}$ die Menge all solcher monoton steigenden Funktionen. Wir wollen zeigen, dass S nicht abzählbar ist. Dazu konstruieren wir eine surjektive Funktion h:
$$h : S \to 2^{\mathbb{N}}, h(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = f(n+1)\}$$
Z.z. h surjektiv.
Sei also $A \subseteq \mathbb{N}$ und f rekursiv definiert als
$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1), & \text{falls } 0 \leq (n-1) \in A \\ f(n-1) + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
Damit gilt: $h(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = f(n+1)\} \overset{k:=n+1}{=} \{k-1 \in \mathbb{N} \mid f(k-1) = f(k)\} = A$ nach Konstruktion von f. Somit ist f Urbild von A.
Insgesamt ergibt sich: $|S| \geq |2^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$. S ist also überabzählbar. ■

Aufgabe 2.2
Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Untersuchen Sie jede der drei folgenden Sprachen über Σ^*, ob sie DEA-Sprache ist oder nicht. Bewiesen Sie Ihre Antworten: im positiven Fall durch Angabe eines geeigneten endlichen Automaten, dargestellt durch seinen Übergangsgraphen (inklusive Erklärung); im negativen Fall durch den Nachweis von unendlich vielen Fortsetzungsprachen.

Anmerkung: $\#_a(w)$ zählt, wie oft der Buchstabe a im Wort w vorkommt.

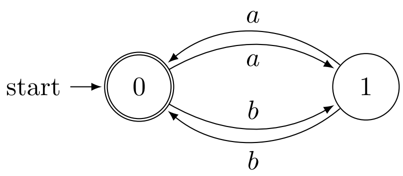
(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = \#_b(w) \bmod 2\}$

(b) $L_{k,l} = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod k = \#_b(w) \bmod l\}$, mit k und l fest vorgegebene positive ganze Zahlen.

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

Lösungsvorschlag 2.2

(a) Folgender DEA erkennt L_1. Der Zustand x steht hierbei für $x = \#_a(w) + \#_b(w) \bmod 2$.



(b) Ein Automat, der die Sprache $L_{k,l}$ erkennt, ist gegeben durch das Quintupel $(\Sigma, Q, s, F, \Delta)$ mit:
$Q = \{q_{i,j} \mid 0 \leq i < k \wedge 0 \leq j < l\}$
$s = q_{0,0}$
$F = \{q_{n,n} \mid 0 \leq n < k, l\}$
$\Delta = \{(q_{i,j}, a, q_{n,j}) \mid q_{i,j} \in Q \wedge n = i + 1 \bmod k\} \cup \{(q_{i,j}, b, q_{i,n}) \mid q_{i,j} \in Q \wedge n = j + 1 \bmod l\}$
Der Zustand $q_{i,j}$ steht hierbei für $\#_a(w) \bmod k = i$ und $\#_b(w) \bmod l = j$.

(c) Betrachte $w_n = a^n$. Für $n \neq m$ gilt: $b^n \in F_L(w_n)$, da $w_n b^n = a^n b^n \in L_3$.
Aber $b^n \notin F_L(w_m)$, denn $w_m b^n = a^m b^n \notin L_3$.
Damit existieren unendlich viele Fortsetzungssprachen. Also ist L_3 nicht regulär. ■

Aufgabe 2.3

Skizzieren Sie einen DEA, der folgende Sprache erkennt:
$S = \{a^n \mid n > 1600$ und n ist ein Schaltjahr nach dem gregorianischen Kalender $\}$

Lösungsvorschlag 2.3

Ein Automat, der die Sprache S erkennt, ist gegeben durch das Quintupel $(\Sigma, Q, s, F, \Delta)$ mit:
$\Sigma = \{a\}$
$Q = \{q_i \mid 0 \leq i \leq 1600\} \cup \{p_i \mid 0 \leq i < 400\}$
$s = q_0$
$F = \{p_i \mid ((4 \mid i \wedge 100 \nmid i) \vee 400 \mid i)\}$
$\Delta = \{(q_i, a, q_{i+1}) \mid 0 \leq i < 1600\} \cup \{(q_{1600}, a, p_1)\} \cup \{(p_i, a, p_{i+1 \bmod 400}) \mid 0 \leq i < 400\}$

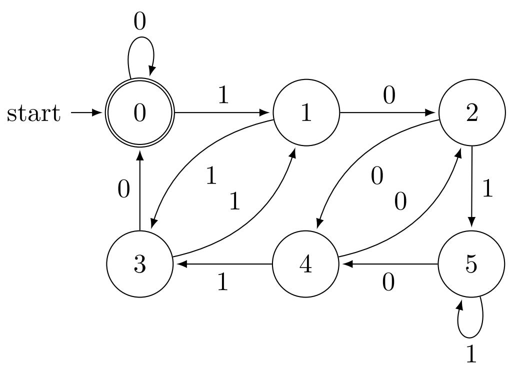
Aufgabe 2.4

Für einen Bitstring $u \in \{0,1\}^*$ bezeichnen wir mit $\langle u \rangle >$ die natürliche Zahl, die durch u binär dargestellt wird; also $\langle u_{k-1} u_{k-2} \dots u_1 u_0 \rangle = \sum_{0 \leq i < k} u_i 2^i$.
Untersuchen Sie jede der folgenden Sprachen, b sie eine DEA-Sprache ist oder nicht.

(a) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \langle w \rangle$ durch 6 teilbar$\}$
(b) $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \langle w \rangle$ ist eine Quadratzahl$\}$

Lösungsvorschlag 2.4

(a) Die Sprache ist eine DEA-Sprache, denn folgender Automat erkennt L_4:

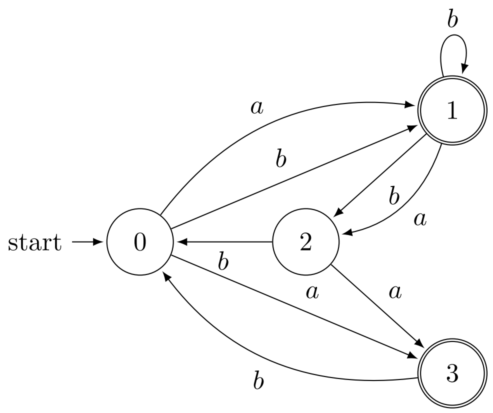


(b) Definiere für gerades $n \geq 2 : w_n := 10^{n-2}1$. Sei x die kleinste Binärzahl ungerader Länge, sodass $w_n x \in L_5$. Wegen $|0^{n-2}1x|$ gerade, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\langle 10^{n-2}1x \rangle = 2^{2k} + a$, wobei $a = \langle 1x \rangle > 0$.
Da a minimal gilt:

$$\begin{aligned}
&2^{2k} + a = (2^k + 1)^2 = 2^{2k} + 2^{k+1} + 1 \\
&\Rightarrow a = 2^{k+1} + 1 \text{ und } x = 0^k 1 \\
&\Rightarrow 2^{n+k} + 2^{k+1} + 1 = \langle 10^{n-2}10^k 1 \rangle = 2^{2k} + 2^{k+1} + 1 \\
&\Rightarrow n = k \text{ und } x = 0^n 1
\end{aligned}$$

Damit ist $x = 0^n 1$ das kleinste Element in $F_{L_5}(w_n)$ mit ungerader Länge. Also gibt es unendlich viele Fortsetzungssprachen und L_5 ist nicht regulär. ■

Aufgabe 2.5
Bestimmen Sie für den unten angegebenen NEA M einen DEA M', der die gleiche Sprache akzeptiert wie M.



Lösungsvorschlag 2.5