UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

6. Übungszettel, 30. April 2013

1. Zeigen Sie detailliert: Das homomorphe Bild einer zyklischen Gruppe ist wieder zyklisch.

2. Wir betrachten die General Linear Group $G := \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

   (a) Bestimmen Sie das Zentrum von G.

   (b) Finden Sie eine möglichst große abelsche Untergruppe von G. (Sie sollte zumindest größer als das Zentrum sein.)

3. Finden Sie, wenn möglich

   (a) einen Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_7$;

   (b) einen Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_{12}$;

   (c) einen injektiven Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_7$;

   (d) einen injektiven Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_{12}$.

4. Mit $d_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Drehung der Punkte der Ebene um den Winkel α (gegen den Uhrzeigersinn) mit Zentrum im Ursprung.

   (a) Zeigen Sie, dass $\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ ist.

   (b) Sei weiters $s_\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung, welche mit der x-Achse den Winkel β einschließt. Bildet auch die Menge aller derartigen Spiegelungen eine Untergruppe?

   (c) Finden Sie eine einfache Formel für $s_\beta \circ s_\alpha$.
   Hinweis: Überlegen Sie sich geometrisch, warum das Ergebnis eine Drehung sein muss. Bestimmen Sie dann, was mit einem Punkt auf der Symmetrieachse von s_α passiert.

   (d) Zeigen Sie, dass die Menge bestehend aus allen Drehungen und Spiegelungen eine Untergruppe von $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ ist.

   Hinweis: Zentraler Punkt im Beweis ist der Nachweis, dass alle Produkte aus Drehungen und Spiegelungen wieder Drehungen oder Spiegelungen ergeben.

5. (a) Wir zeichnen ein achsenparalleles Quadrat mit Zentrum im Ursprung. Die 4 Drehungen um ein Vielfaches eines rechten Winkels und die 4 Spiegelungen an den Achsen und Diagonalen bilden eine Gruppe (die Diedergruppe D_4, vgl. Skriptum). Bestimmen Sie von jeder dieser Abbildungen, wie sie die Ecken des Quadrates permutiert, und wie die D_4 daher als Untergruppe von S_4 aufgefasst werden kann?

(b) Bestimmen Sie für die Elemente der D_4 Abbildungsmatrizen bezüglich der kanonischen Basis, sodass sich die D_4 auch als eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}(2, \mathbb{R})$ auffassen läßt.

6. Die Elemente der S_3 können Sie auch als Drehungen und Spiegelungen interpretieren, welche ein gleichseitiges Dreieck in sich überführen.

   (a) Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente von S_3.

   (b) Finden Sie alle Untergruppen von S_3. Welche Ordnungen haben sie? Welche davon sind zyklisch?

   (c) Bestimmen Sie das Zentrum von S_3.

   (d) Bestimmen Sie von allen Untergruppen auch alle Links- und Rechtsnebenklassen sowie deren Index.

Bonus Ein leicht verrückter Mathematiker bekam zur Faschingszeit eine Uhr geschenkt, die verkehrt herum läuft, mit an der vertikalen Achse gespiegeltem Ziffernblatt. In seiner Verzweiflung hängte er sie verkehrt herum auf (mit dem 12er nach unten). Es war ihm natürlich sofort klar, dass sie immer noch verkehrt herum läuft, denn sie ist ja immer noch gespiegelt. Nur die Spiegelungsachse ist anders, nämlich horizontal. Aber da kam er ins Grübeln: Warum ist die Spiegelungsachse nur um 90 Grad verdreht, wo er doch die ganze Uhr um 180 Grad gedreht hat? Wie kann es sein, dass die Achse dabei nur halb so schnell gedreht wurde? Nun ist er ganz verrückt. Die behandelnden Ärzte sind ratlos und meinen, nur eine einfache Erklärung des Phänomens würde ihn heilen. Können Sie helfen?