Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
12. Übungsblatt, für den 13. Juni 2005

1. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume von $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$.

2. Sei λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie:

   (a) für $m \in \mathbb{N}$ ist λ^m ein Eigenwert von A^m.

   (b) falls A regulär ist, ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

3. Diagonalisieren Sie
$$A = \begin{pmatrix} 89 & -5 & -2 \\ -5 & 65 & -10 \\ -2 & -10 & 86 \end{pmatrix}$$
mit einer orthogonalen Matrix aus $\mathbb{R}_3^3$.

4. Seien $h, h' \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass es genau dann eine ONB B von $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass $A_{h,B,B}$ und $A_{h',B,B}$ Diagonalform haben, wenn $h \circ h' = h' \circ h$.

5. Sei $(\mathbb{C}_n, \sigma)$ ein unitärer Raum mit $\sigma(x, y) = x^t \cdot \bar{y}$, und sei $A \in \mathbb{C}_n^n$. Dann heisst $A^* \in \mathbb{C}_n^n$ die zu A adjungierte Matrix wenn
$$\sigma(A \cdot x, y) = \sigma(x, A^* \cdot y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{C}_n.$$
Geben Sie den Zusammenhang zwischen A und A^* explizit an.

6. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix A alle reell sind.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sigma(Ax, x)$ (mit σ wie in der vorigen Aufgabe) immer reell ist.

7. Zeigen Sie den **Spektralsatz für hermitesche Matrizen:**
Sei $A \in \mathbb{C}_n^n$ hermitesch. Dann gibt es eine unitäre Matrix $C \in \mathbb{C}_n^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, sodass
$$\bar{C}^t \, A \, C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$
Hinweis: Verwenden Sie die vorangehenden 2 Aufgaben und führen Sie den Beweis wie in der Vorlesung für den Spektralsatz für symmetrische Matrizen.

8. Die Fibonacci-Folge ist definiert durch die Rekursion $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $x_1 = x_0 = 1$.

   Geben Sie eine explizite Formel für x_n an.