KAPITEL 14

Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Diagonalisieren von Matrizen

DEFINITION 14.1. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n\times n}$. Mit h_A bezeichnen wir die Abbildung, die durch $h_A : K^n \to K^n$, $h_A(x) = A \cdot x$ für $x \in K^n$ definiert ist.

Für die kanonische Basis E von K^n gilt also $S_{h_A}(E, E) = A$. Sei nun B eine Basis für K^n. Dann gilt

$$S_{h_A}(B, B) = {}_BT_E \cdot A \cdot {}_ET_B.$$

Wenn P die Matrix ist, in deren Spalten die Vektoren der Basis B stehen, so gilt also

$$S_{h_A}(B, B) = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

DEFINITION 14.2. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Mit $\mathrm{GL}(n, K)$ bezeichnen wir die Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen in $K^{n\times n}$. Es gilt also

$$\mathrm{GL}(n, K) = \{A \in K^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}.$$

DEFINITION 14.3. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ sind *ähnlich über K*, wenn es ein $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, sodass $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Wir schreiben dann $A \sim B$.

LEMMA 14.4. *Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$.*

SATZ 14.5. *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $A \sim B$.
(2) *Es gibt eine Basis C von K^n, sodass $S_{h_A}(C, C) = B$.*
(3) *Es gibt eine lineare Abbildung $h : K^n \to K^n$ und Basen D, F von K^n, sodass $S_h(D, D) = A$ und $S_h(F, F) = B$.*

DEFINITION 14.6. Sei K ein Körper, und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrix $D \in K^{n\times n}$ ist eine *Diagonalmatrix*, wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt: $D(i, j) = 0$.

Für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

schreiben wir oft auch einfach $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

DEFINITION 14.7. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrix A ist *diagonalisierbar über* K, wenn es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(n,k)$ gibt, sodass $P^{-1} \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist.

Eine Matrix ist also diagonalisierbar über K, wenn sie über K ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

SATZ 14.8. *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist A genau dann diagonalisierbar über K, wenn es eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von K^n und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$: $A \cdot b_i = \lambda_i * b_i$.*

Beweisskizze: Wenn $P^{-1} \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix D ist, so gilt

$$A \cdot P = P \cdot D.$$

Seien $\mu_1, \ldots, \mu_n$ so, dass $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, und seien $b_1, \ldots, b_n$ die Spaltenvektoren von P. Dann gilt

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mu_1 * b_1 & \mu_2 * b_2 & \cdots & \mu_n * b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Also gilt $A \cdot b_i = \mu_i * b_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis ist, sodass $A \cdot b_i = \lambda_i * b_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt wegen $S_{h_A}(B,B) = {}_BT_E \cdot S_{h_A}(E,E) \cdot {}_ET_B$ die Gleichung $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = P^{-1} \cdot A \cdot P$, wobei P die Matrix ist, in deren Spalten die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ stehen. ■

2. Eigenwerte

DEFINITION 14.9. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in K^{n\times n}$, und sei $\lambda \in K$. Dann ist λ ein *Eigenwert* von A :$\Leftrightarrow$ es gibt ein $v \in K^n$ mit $v \neq 0$ und $A \cdot v = \lambda * v$.

SATZ 14.10. *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:*

(1) *λ ist ein Eigenwert von A.*
(2) $\det(\lambda * E - A) = 0$.

DEFINITION 14.11. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$. Wir bezeichen die Matrix $C := t * E - A$ in $K[t]^{n\times n}$ als die *charakteristische Matrix von A* und

$$c_A := \det(t * E - A)$$

als das *charakteristische Polynom von A*.

Wir berechnen als Beispiel das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 12 & -7 & 12 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

$A = \{\{1, -1, 1\}, \{12, -7, 12\}, \{10, -5, 10\}\}$

$\{\{1, -1, 1\}, \{12, -7, 12\}, \{10, -5, 10\}\}$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 12 & -7 & 12 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

CC = t ∗ IdentityMatrix[3] − A

$\{\{-1 + t, 1, -1\}, \{-12, 7 + t, -12\}, \{-10, 5, -10 + t\}\}$

MatrixForm[CC]

$$\begin{pmatrix} -1+t & 1 & -1 \\ -12 & 7+t & -12 \\ -10 & 5 & -10+t \end{pmatrix}$$

c = Det[CC]

$-5t - 4t^2 + t^3$

Somit erhalten wir $c_A = t^3 - 4t^2 - 5t$ als das charakteristische Polynom von A.

SATZ 14.12. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$, und sei c_A das charakteristische Polynom von A. Dann gilt für alle $x \in K$: ${c_A}^K(x) = \det(x * E_n - A)$.*

SATZ 14.13. *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$, und sei $c_A = c_0 + c_1t^1 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1} + c_nt^n$ das charakteristische Polynom von A. Dann gilt:*

(1) *Das charakteristische Polynom von A ist ein normiertes Polynom vom Grad n, es gilt also $c_n = 1$.*
(2) *Für alle $\lambda \in K$ gilt: λ ist ein Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda$ ist eine Nullstelle von c_A.*
(3) ${c_A}^K(0) = c_0 = (-1)^n \det(A)$.
(4) $c_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} A(i,i)$.

KOROLLAR 14.14. *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$. Dann hat A höchstens n Eigenwerte.*

SATZ 14.15. *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich. Dann haben A und B dasselbe charakteristische Polynom.*

3. Eigenvektoren

DEFINITION 14.16. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n\times n}$, und sei λ ein Eigenwert von A. Dann ist v ein *Eigenvektor von A zum Eigenwert λ* $:\Leftrightarrow v \neq 0$ und $A \cdot v = \lambda * v$.

Der *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ ist definiert durch

$$E(A, \lambda) := \{x \in K^n \mid A \cdot x = \lambda * x\}.$$

Der Eigenraum von A zum Eigenwert λ ist also genau der Nullraum von $\lambda * E_n - A$, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 12 & -7 & 12 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

A = {{1, −1, 1}, {12, −7, 12}, {10, −5, 10}}

{{1, −1, 1}, {12, −7, 12}, {10, −5, 10}}

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 12 & -7 & 12 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues[A]

{5, −1, 0}

B1 = 5 ∗ IdentityMatrix[3] − A

{{4, 1, −1}, {−12, 12, −12}, {−10, 5, −5}}

E1 = NullSpace[B1]

{{0, 1, 1}}

B2 = (−1) ∗ IdentityMatrix[3] − A

{{−2, 1, −1}, {−12, 6, −12}, {−10, 5, −11}}

E2 = NullSpace[B2]

{{1, 2, 0}}

B3 = 0 ∗ IdentityMatrix[3] − A

{{−1, 1, −1}, {−12, 7, −12}, {−10, 5, −10}}

NullSpace[B3]

{{−1, 0, 1}}

Wir erhalten also, dass in den Spalten der Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis B von $\mathbb{R}^3$ steht, die aus lauter Eigenvektoren von A besteht. Es gilt

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(5, -1, 0).$$

Da $\mathrm{diag}(5, -1, 0) = S_{h_A}(B, B)$, lässt sich diese Gleichung auch als

$$ {}_BT_E \cdot S_{h_A}(E, E) \cdot {}_ET_B = S_{h_A}(B, B) $$

schreiben. B ist also eine Basis, bezüglich der h_A durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden kann.

DEFINITION 14.17 (Vielfachheit von Eigenwerten). Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, und sei λ ein Eigenwert von A.

(1) Die *algebraische Vielfachheit von λ in A*, $e(A, \lambda)$, ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristschen Polynom c_A von A.
(2) Die *geometrische Vielfachheit von λ in A*, $d(A, \lambda)$, ist die Dimension des Eigenraums $E(A, \lambda)$. Es gilt also $d(A, \lambda) = \dim(E(A, \lambda))$.

Wir berechnen die Eigenwerte und ihre Vielfachheiten für die Matrix $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

F = {{0, −1}, {4, 4}}

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

p = Det[t ∗ IdentityMatrix[2] − F]

$4 - 4t + t^2$

Factor[p]

$(-2 + t)^2$

(* Bestimmen der geometrischen Vielfachheit *)
NullSpace[2 ∗ IdentityMatrix[2] − F]

{{−1, 2}}

Somit hat F den Eigenwert 2, und es gilt $e(2, F) = 2$ und $d(2, F) = 1$.

SATZ 14.18. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, und sei λ ein Eigenwert von A. Dann gilt $d(\lambda, A) \leq e(\lambda, A)$.*

Die geometrische Vielfachheit ist also höchstens so groß wie die algebraische Vielfachheit.

LEMMA 14.19. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$, sei $m \in \mathbb{N}$, und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A. Sei $u_1 \in E(A, \lambda_1), \ldots, u_m \in E(A, \lambda_m)$ so, dass $u_1 + u_2 + \cdots + u_m = 0$. Dann gilt $u_1 = u_2 = \cdots = u_m = 0$.*

DEFINITION 14.20. Sei K ein Körper, und sei $p \in K[x]$. Das Polynom p *zerfällt über K in Linearfaktoren* $:\Leftrightarrow$ es gibt $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in K$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{N}$, sodass

$$ p = \alpha \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i)^{e_i}. $$

SATZ 14.21. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:*

(1) *A ist über K diagonalisierbar.*
(2) *c_A zerfällt über K in Linearfaktoren, und für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.*