Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2016/17 · **Mini-Test 12** 16.01.2017

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Aufgabe 1 Sei V ein nicht-trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum (d.h. $V \neq \{0\}$) und $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ der Dualraum von V. Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Die injektiven Homomorphismen $V \to \mathbb{K}$ bilden einen Unterraum von V^*.
2. Die surjektiven Homomorphismen $V \to \mathbb{K}$ bilden einen Unterraum von V^*.

Lösung. beides falsch, denn ein Unterraum von V^* muss jedenfalls das Nullfunktional enthalten, und dieses ist weder injektiv (weil $V \neq \{0\}$) noch surjektiv ($\mathbb{K} \neq \{0\}$).

Aufgabe 2 Die Funktionen $D\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ und $E\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} D(p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n) &= p_1 + 2p_2X + \cdots + np_nX^{n-1} && (\text{„Ableitung“}),\\ E(p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n) &= p_0 && (\text{„Auswertung bei 0“}). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $D^\top(E)(p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n)$.
Zur Erinnerung: Für $h\colon V \to W$ ist $h^\top\colon W^* \to V^*$ definiert durch $h^\top(y^*) = (\, x \mapsto y^*(h(x))\,)$.

Lösung. $D^\top(E)(p_0 + p_1X + \cdots) = E(D(p_0 + p_1X + \cdots)) = E(p_1 + 2p_2X + \cdots) = p_1$.