§09. Umkehrfunktion

Bei einer Funktion wird jedem x genau ein y zugeordnet. Ordnet man nun umgekehrt jedem y die den entsprechenden x-Wert zu, so erhält man eine Umkehrzuordnung, die bei Eindeutigkeit (genau ein x zu jedem y) auch eine Funktion ist, die sog. Umkehrfunktion.

1. Bestimmung der Umkehrfunktion

Beispiel: f: $y = -x^2 + 2$ $D_f =]-\infty; 0]$ $W_f =]-\infty; 2]$

① Auflösen nach x

f: $y = -x^2 + 2$

f: $x^2 = -y + 2$

f: $x = \pm\sqrt{-y+2}$ Aufgrund von D gilt $x \le 0$, deshalb muss man sich für das „–„ entscheiden

② Vertauschen der Variablen:

f^{-1}: $y = -\sqrt{-x+2}$ $D_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$

$W_{f^{-1}} =]-\infty; 0]$

2. Umkehrbarkeit

Entsteht nach dem Variablentausch wieder eine Funktionsgleichung, so sagt man *f ist umkehrbar*.

Satz:
- Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn für alle $x_1 \ne x_2$ folgt: $f(x_1) \ne f(x_2)$.
- Eine streng monotone Funktion ist umkehrbar.

3. Eigenschaften

- Der Graph der Umkehrfunktion geht aus dem Graphen der Funktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten hervor.
- Für Werte- und Definitionsmengen gilt:
  $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$
- Die Umkehrfunktion einer streng monoton zunehmenden (abnehmenden) Funktion ist streng monoton zunehmend (abnehmend).
- Es gilt: ① $(f^{-1})^{-1} = f$
  ② $f(f^{-1}(x)) = x$
  ③ $f^{-1}(f(x)) = x$

  Bsp.: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-x^2 + 2) = -\sqrt{-(-x^2+2)+2} = -\sqrt{x^2} = -|x| = x$