Dozent:

Dr. Ingo Hoffmann
Ingo.Hoffmann@HS-Fresenius.de

Lineare Algebra und Analysis

2. Vorlesung – Zusatzinformationen

1 Lernstand - Zusammenfassung

- Begriff der Funktion und Bedeutung von $f : M \to N$.
- Unterscheidung von Urmenge M und Bildmenge N, sowie Definitions- D_f und Wertebereich W_f als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
- Koordinatensystem und Graph einer Funktion $f(x)$. Unterscheidung von injektiven, surjektiven und bijektiven Funktionen.
- Darstellung einfacher Funktionen in Polynomform (bspw. Kostenfunktion $K(x)$). Graphische Darstellung der Exponentialfunktion $\exp(x)$.
- Umstellen von Gleichungen und Ungleichungen, sowie Bestimmung der entsprechenden Lösungsmengen $\mathbb{L}$.
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$ und Bestimmung der Lösungsmenge von einfachen Relationen, wie z.B. $|x - a| \leq b$.
- Rechenregeln für Potenzen, bspw. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

2 Ausführliche Darstellung des Beispiels Nr. 1 aus der Vorlesung

2.1 Kostenfunktion

Bei der Produktion und beim Handel von Waren entstehen Gesamtkosten, die sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammensetzen.

Das Beispiel 1 aus der Vorlesung zeigt folgende – hier lineare – Kostenfunktion:

$$K(x) = 20x + 20.$$

Wobei den variablen (also den von der Menge x abhängigen Kosten $20x$) die Fixkosten von $+20$ additiv aufgeschlagen werden.

2.2 Stückkostenfunktion

Stückkosten sind die Kosten für die Herstellung einer Produktionseinheit[1] und berechnen sich mit Hilfe der Kostenfunktion für das obige Beispiel wie folgt:

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{K(x)}{x} \\ &= 20 + \frac{20}{x}. \end{aligned}$$

2.3 Nachfragefunktion

Wir nehmen in diesem Beispiel eine beliebige Nachfragefunktion an und stellen die Gleichung um, so dass anschließend eine Preis-Absatz-Funktion vorliegt.

$$\begin{array}{rrcll} & x(p) & = & 30 - 0.5p & \mid -30 \\ \Leftrightarrow & x - 30 & = & -0.5p & \mid \times(-2) \\ \Leftrightarrow & -2x + 60 & = & p & \\ \Leftrightarrow & p(x) & = & -2x + 60. & \end{array}$$

2.4 Erlösfunktion

Die Erlösfunktion berechnet sich durch Multiplikation des Verkaufspreises $p(x)$ und der verkauften Menge x.

[1] In manchen betriebspraktischen Anwendungen werden die Stückkosten ohne den Fixkostenanteil berechnet; somit also ausschließlich auf Basis der variablen Kosten.

$$
\begin{aligned}
E(x) &= x\ p(x) \\
&= x\ (-2x + 60) \\
&= -2x^2 + 60x.
\end{aligned}
$$

2.5 Gewinnfunktion

Aus dem Erlös muss ein Unternehmen die Kosten decken. Ein Gewinn entsteht, wenn nach Abzug der Kosten vom Erlös ein positiver Wert verbleibt. Letzteres ist der Gewinn des Unternehmens.

Berechnung der Gewinnfunktion für das obige Beispiel:

$$
\begin{aligned}
G(x) &= E(x) - K(x) \\
&= (-2x^2 + 60x) - (20x + 20) \\
&= -2x^2 + 60x - 20x - 20 \\
&= -2x^2 + 40x - 20.
\end{aligned}
$$

2.6 Gewinnmaximum

Bei einer quadratischen Gewinnfunktion (d.h. die Potenz von x ist höchstens vom Grad 2) kann durch Umformung, quadratische Ergänzung und Rückwärtsanwendung der binomischen Formeln die Gewinnfunktion in die sogenannte Scheitelpunktform umgewandelt werden.

Aus der Scheitelpunktform lässt sich dann das Gewinnmaximum ablesen.

$$
\begin{array}{rcll}
G(x) & = & -2x^2 + 40x - 20 & \\
& = & -2(x^2 - 20x + 10) & \mid \text{ausklammern von -2} \\
& = & -2\left[x^2 - 20x + \left(\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} - \left(\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + 10\right] & \mid \text{quadratische Ergänzung} \\
& = & -2\left[(x^2 - 20x + 10^2) - 100 + 10\right] & \mid \text{2-tes Binom erkennen} \\
& = & -2\left[(x - 10)^2 - 90\right] & \mid \text{2-te binomische Formel rückwärts} \\
& = & -2(x - 10)^2 + 180 & \mid \text{ausmultiplizieren von -2}
\end{array}
$$

Die letzte Zeile zeigt die Scheitelpunktsform einer **nach unten** geöffneten Parabel; erkennbar an dem negativen Faktor (-2) vor dem Klammerausdruck. Der Scheitelpunkt ist also ein Hochpunkt der Gewinnfunktion. Der x-Wert des Scheitelpunktes ist +10, denn dann wird der

Klammerausdruck Null. Der y-Wert des Scheitelpunktes entspricht für $x = +10$ dem konstanten Term $+180$, vgl. hierzu auch die Abbildung in der Vorlesung.

Das Gewinnmaximum wird also für die verkaufte Menge von $x = +10$ Stücken angenommen und hat den Wert $G_{\max} = +180$.