

FLACHDECKENAUFLAGERUNGEN BEI EINEM REISSNER-MINDLIN PLATTENELEMENT

Henrike Bröker* und Karin Preusch**

* Lehrstuhl für Bauinformatik, TU München

** Fach Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, Universität Dortmund

Zusammenfassung: Im folgenden Beitrag wird die p -Version der Finite-Element Methode für Reissner-Mindlinsche Plattenprobleme vorgestellt. Hierzu sind zwei Modellierungsmethoden entwickelt worden, die es erlauben, elastisch gebettete Bereiche (z.B. Stützen) unabhängig vom eigentlichen Berechnungsnetz zu definieren. Das erste Konzept erfaßt die Bettungsmatrix über eine Federlagerung der entsprechenden Gaußpunkte und die zweite Methode erstellt ein Netz über der exakten Stützengeometrie, über das integriert wird, um die Bettungsmatrix zu berechnen. Die Effektivität dieser Modellierungsmethode wird anhand eines praxisnahen Beispiels dargestellt.

1 Die p -Version

Bei der Finite-Element Methode gibt es im wesentlichen zwei Möglichkeiten, um den Fehler, der aus dem numerischen Verfahren entsteht, zu minimieren. Die h -Version basiert auf niedrigen Polynomansätzen (i.d.R. $p = 1$ oder $p = 2$) und erzielt eine größere Genauigkeit der Ergebnisse durch eine Verfeinerung des Netzes. Bei der p -Version wird das Netz dagegen beibehalten und der Polynomgrad p der Ansatzfunktionen erhöht. Durch den großen Raum an Ansatzfunktionen liefert die p -Version eine sehr hohe Genauigkeit der Ergebnisse.

Ansatzfunktionen höherer Ordnung sind meist hierarchisch aufgebaut. Die Idee dabei ist, daß alle Ansatzfunktionen niedriger Ordnung in der Menge der Ansatzfunktionen höherer Ordnung enthalten sind. Die verschiedenen Ansatzfunktionen lassen sich in drei Gruppen einteilen:

- Knotenmoden: Diese entsprechen den üblichen bilinearen Ansätzen der finiten Elemente. Dabei hat jede Ansatzfunktion an einem Elementknoten den Wert 1 und an den übrigen den Wert 0.
- Kantenmoden: Sie ergeben sich aus der Multiplikation eines eindimensionalen Polynoms längs einer Kante mit einer linearen Ansatzfunktion senkrecht zur Kante. Alle Elementränder weisen mit Ausnahme einer Kante den Wert 0 auf.

- Innere Moden: Sie berechnen sich durch Multiplikation zweier hierarchischer 1D-Ansatzfunktionen längs und quer zur Kante. Diese Moden haben an allen Elementrändern den Wert 0.

Durch die relativ großen Elementabmessungen bei der p-Version ist es besonders wichtig, bei diesem Verfahren die Geometrie exakt darzustellen. Hierzu dient die *Blending-Function* Methode, die es ermöglicht, ein nahezu beliebig berandetes Element exakt abzubilden [3,4].

$$x = Q_e^{(x)}(\xi, \eta) := \frac{1}{2} \cdot [x_1(\xi)(1 - \eta) + x_2(\eta)(1 + \xi) + x_3(\xi)(1 + \eta) + x_4(\eta)(1 - \xi)] - \sum_{i=1}^4 X_i N_i^{St}(\xi, \eta)$$

$$y = Q_e^{(y)}(\xi, \eta) := \frac{1}{2} \cdot [y_1(\xi)(1 - \eta) + y_2(\eta)(1 + \xi) + y_3(\xi)(1 + \eta) + y_4(\eta)(1 - \xi)] - \sum_{i=1}^4 Y_i N_i^{St}(\xi, \eta)$$

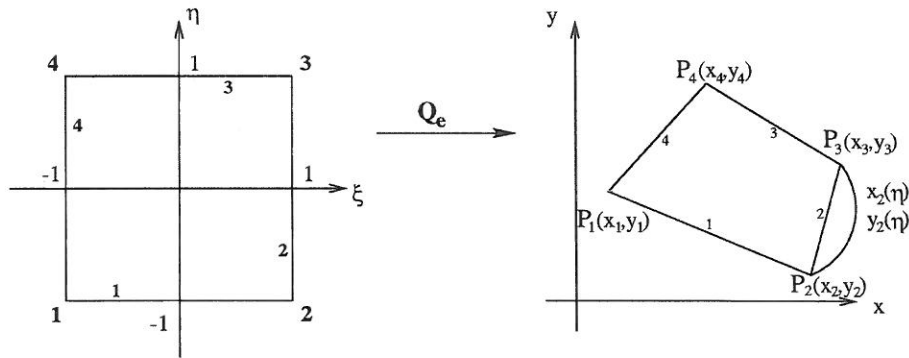


Abbildung 1: Abbildungsfunktion Q_e

2 Das Reissner-Mindlin Plattenelement

Ein Reissner-Mindlin Plattenelement, das in der x, y -Ebene definiert ist, hat die Freiheitsgrade w als Verschiebung in Richtung der z -Achse und die Verdrehungen β_y bzw. β_x als Verdrehung um die x - bzw y -Achse. Diese werden zu einem Vektor $\underline{u} = (\beta_x, \beta_y, w)^T$ zusammengefasst.

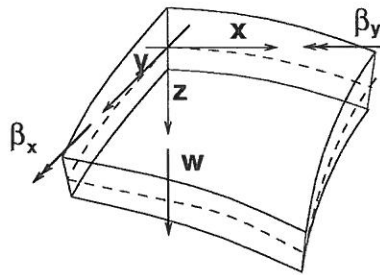


Abbildung 2: Vorzeichendefinition der Freiheitsgrade

Aus der Kinematik ergeben sich die Dehnungen und Verzerrungen zu:

$$\underline{\epsilon} = \left[\underline{\epsilon}_B^T \cdot z, \underline{\epsilon}_S^T \right]^T \quad (1)$$

mit

$$\underline{\epsilon}_B^T = \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \frac{\partial \beta_y}{\partial y}, \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right] \quad \underline{\epsilon}_S^T = \left[\left(\beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \left(\beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (2)$$

Der Vektor ist in einen Biege- und einen Schubanteil aufgespalten.

Wendet man den ebenen Spannungszustand an und integriert die Spannungen über z von $-\frac{t}{2}$ bis $\frac{t}{2}$ so ergibt sich das integrative Stoffgesetz zu $\underline{S} = \left[\underline{M}^T, \underline{Q}^T \right]^T$ mit $\underline{M} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T = -\frac{t^3}{12} \underline{D}_B \underline{\epsilon}_B$ und $\underline{Q} = [Q_x, Q_y]^T = -t \underline{D}_S \underline{\epsilon}_S$.

Die Materialmatrix kann man ebenfalls in einen Biegeanteil und einen Schubanteil aufteilen:

$$\underline{D}_B = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \underline{D}_S = \frac{E k}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Der Schubkorrekturfaktor $k = \frac{5}{6}$ erfasst den parabelförmigen Schubspannungsverlauf über die Dicke t .

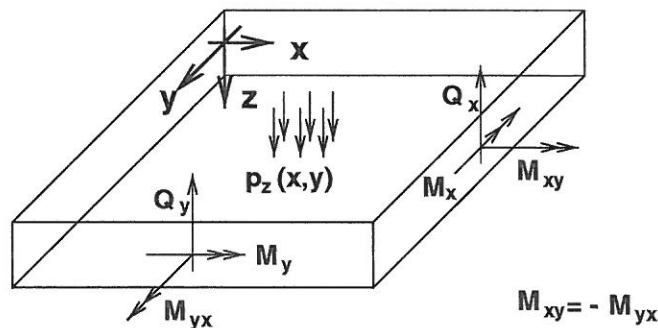


Abbildung 3: Schnittgrößendefinition

Aus den in Abbildung 3 definierten Schnittgrößen lässt sich das Gleichgewicht an einem Plattenelement wie folgt formulieren :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - p_z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Auf dem Rand Γ können sowohl Neumann'sche Randbedingungen für M_n, M_t, M_{nt} und Q_n als auch Dirichlet'sche Randbedingungen für β_x, β_y und w definiert werden. Für das

Prinzip der virtuellen Arbeit werden nun die Gleichgewichtsbedingungen und die Neumann'schen Randbedingungen mit den Testfunktionen

$$\underline{v}^T = \left[\phi_x \quad \phi_y \quad v \right] \quad (5)$$

skalar multipliziert, über das Berechnungsgebiet Ω bzw. den Rand Γ integriert und in die schwache Formulierung überführt. Hierbei stellt Ω die Plattenmittelfläche in der x,y-Ebene dar.

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = F(\underline{v}) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad B(\underline{u}, \underline{v}) &= \frac{t^3}{12} \cdot \int_{\Omega} \underline{\epsilon}_B(\underline{u})^T \underline{D}_B \underline{\epsilon}_B(\underline{v}) \, dx dy + t \cdot \int_{\Omega} \underline{\epsilon}_S(\underline{u})^T \underline{D}_S \underline{\epsilon}_S(\underline{v}) \, dx dy \\ F(\underline{v}) &= \int_{\Omega} p_z v(\underline{v}) \, dx dy + \int_{\Gamma} (M_n \phi_n(\underline{v}) + M_{nt} \phi_t(\underline{v}) + Q_n v(\underline{v})) \, ds \end{aligned} \quad (7)$$

Um nun diese Gleichung zu lösen wird ein Ansatz der Form

$$\underline{u}_{FE} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (8)$$

gewählt, wobei N_i die Ansatzfunktionen für den Ansatzgrad p darstellen. Es wurden hierarchische Ansatzfunktionen für ein quadratisches Element nach Szabó und Babuška [3] gewählt.

Die Elementsteifigkeitsmatrix des Reissner-Mindlin Plattenproblems ergibt sich zu

$$\underline{K}^e = \frac{t^3}{12} \cdot \int_{\Omega_e} \underline{B}_B^T \underline{D}_B \underline{B}_B \, d\Omega_e + t \cdot \int_{\Omega_e} \underline{B}_S^T \underline{D}_S \underline{B}_S \, d\Omega_e \quad (9)$$

wobei Ω_e die Fläche des Elementes ist und \underline{B}_B bzw. \underline{B}_S die Matrizen der abgeleiteten Ansatzfunktionen des Biege- und des Schubanteils sind.

Um eine Verbesserung des Querkraftverlaufes zu erhalten, werden die Querkräfte im Postprocessing aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet.

$$\underline{Q}_{gleich} = [Q_x, Q_y]^T = -\frac{Et^3}{2(1+\nu)} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} \right) \end{array} \right] \quad (10)$$

Hierfür werden die zweiten Ableitungen der Ansatzfunktionen benötigt [8]. Die Ergebnisse der Querkräfte aus dem Gleichgewicht sind sehr viel glatter, als die aus den integrierten Schubspannungen [5,8]. Stenberg und Suri haben bei einem eingespannten Parallelogramm gezeigt, daß sich die Konvergenz des L_2 -Fehlers um eine halbe Ordnung verbessert [6].

Das hier definierte Plattenelement ist robust gegenüber verzerrten Elementen [1,5] und ab einem Ansatzgrad $p \geq 4$ lockingfrei [2,5].

3 Netzfrequente Stützenmodellierung

Die Modellierung von Stützen kann, wie bei der klassischen h-Version, durch ein vollständig gebettetes Element definiert werden. Die relativ kleinen Stützenflächen lassen dann im Vergleich zu den großen Elementen der p-Version ein FE-Netz entstehen, das wieder sehr feine Strukturen aufweist. Dies widerspricht jedoch der eigentlichen Idee der p-Version.

Daher sollen hier Verfahren aufgezeigt werden, die das FE-Netz *nicht* in Abhängigkeit von den Stützenstellungen und -größen modellieren, sondern unabhängig davon. Dies ist im Hinblick auf eine Einbindung von Finite-Element Berechnungen in eine CAD-Umgebungen ein besonderer Vorteil, da die Stützenstellungen verändert werden können, ohne daß ein neues FE-Netz erstellt werden muß.

3.1 Lagerung an den Gaußpunkten

Leitet man die Elementsteifigkeitsmatrix mit dem Anteil der Bettungsmatrix her und integriert sie mit der Gauß-Quadratur, so erhält man

$$\underline{\underline{K}}^e = \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^m w_j \left(\frac{t^3}{12} \cdot \underline{\underline{B}}_{iB}^T \underline{\underline{D}}_B \underline{\underline{B}}_{jB} + t \cdot \underline{\underline{B}}_{iS}^T \underline{\underline{D}}_S \underline{\underline{B}}_{jS} + t \cdot \underline{\underline{N}}_i \underline{\underline{C}} \underline{\underline{N}}_j \right) \quad (11)$$

mit einer Bettungsmatrix

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dabei wird c für jeden Gaußpunkt entweder mit Null, wenn der Gaußpunkt außerhalb der Stützengeometrie liegt, oder mit der Federsteifigkeit der Stütze belegt, wenn der Punkt innerhalb der Stütze liegt. Die Stütze kann also mit einer Gaußpunktlagerung erfaßt werden und ist unabhängig vom FE-Netz.

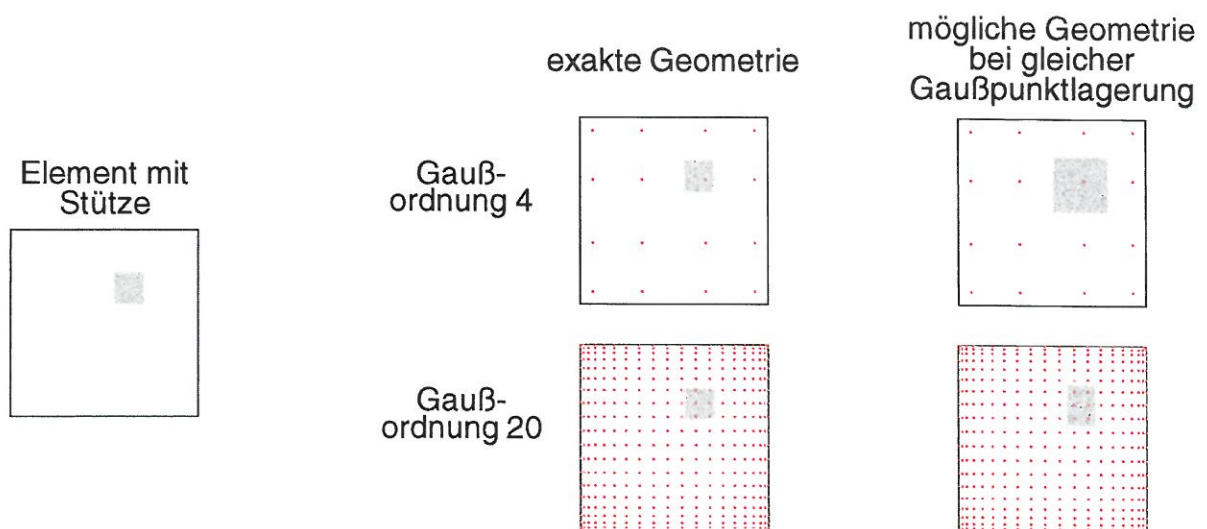


Abbildung 4: Fehler der Gaußpunktlagerung

Allerdings wird durch dieses Modell ein Teil der Genauigkeit eingebüßt. Die Größe des entstehenden Fehlers hängt von der Anzahl der Gaußpunkte in dem teilgebetteten Element und von der exakten Geometrie der Stütze ab [5,7]. Die gebetteten Gaußpunkte in der Stützenfläche können eine größere oder kleinere Stützenfläche abbilden. Je mehr Gaußpunkte in einem Element vorhanden sind, desto genauer kann die exakte Stütze abgebildet werden.

3.2 Integration über die exakte Stützengeometrie

Um die Stützengeometrie exakt zu erfassen, wird bei dieser Methode die Stütze in Form einer polygonal berandeten Fläche über dem diskretisierten Berechnungsgebiet definiert. Für diese Fläche wird automatisch ein Netz erstellt, wobei dieses ausschließlich zu Integrationszwecken und weitgehend unabhängig vom eigentlichen FE-Netz des Berechnungsgebietes verwendet wird. Durch die Verwendung der Ansatzfunktionen der Basiselemente für die zusammengesetzte Integration, ist darauf zu achten, daß es sich bei den Elementkanten des Basisnetzes auch um Elementkanten des *Stützennetzes* handelt, um eine eindeutige Zuordnung der Elemente zu garantieren.

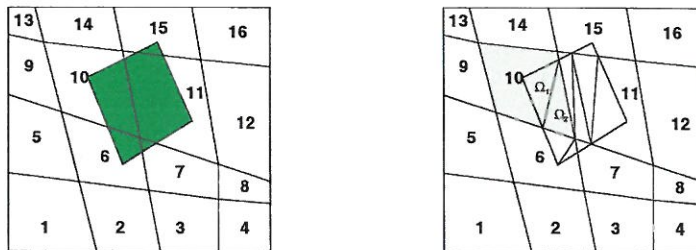


Abbildung 5: Integration über die exakte Stützengeometrie

Die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix für das in Abbildung 5 dargestellte Beispiel ergibt sich zu:

$$\underline{\underline{K}}^{10} := \int_{\Omega^{10}} \frac{t^3}{12} \underline{\underline{B}}^{10T} \underline{\underline{D}}_B \underline{\underline{B}}^{10} + t \underline{\underline{B}}^{10T} \underline{\underline{D}}_S \underline{\underline{B}}^{10} d\Omega^{10} + t \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \underline{\underline{N}}^{10T} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{N}}^{10} d\Omega_k \quad (13)$$

4 Numerisches Beispiel

Abschließend werden die Ergebnisse einer Parkhausplatte dargestellt. Hier wird das zweite Verfahren mit einer herkömmlichen Lösung, in der die Stütze durch jeweils ein Element modelliert wurde, verglichen. Diese herkömmliche Lösung wird im folgenden Referenzlösung genannt. Das Referenznetz besteht aus 300 Elementen und weist 54781 Freiheitsgrade auf. Der Grad der Ansätze wurde zu $p = 11$ für die Rotation und $p = 12$ für die Durchbiegung gewählt. Das FE-Netz für die netzfrei Stützenmodellierung ist in Abbildung 6 dargestellt. Hierbei wird mit einem Ansatzgrad von $p = 9$ bzw. 10 gerechnet.

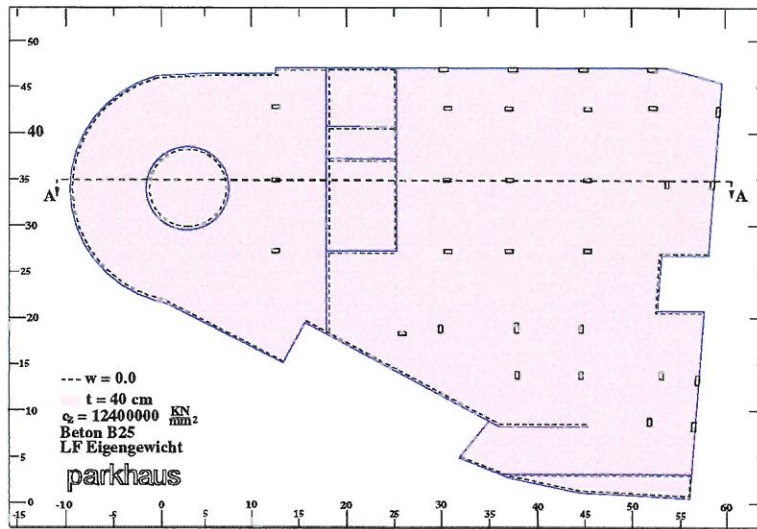


Abbildung 6: Statisches System einer Parkhausplatte

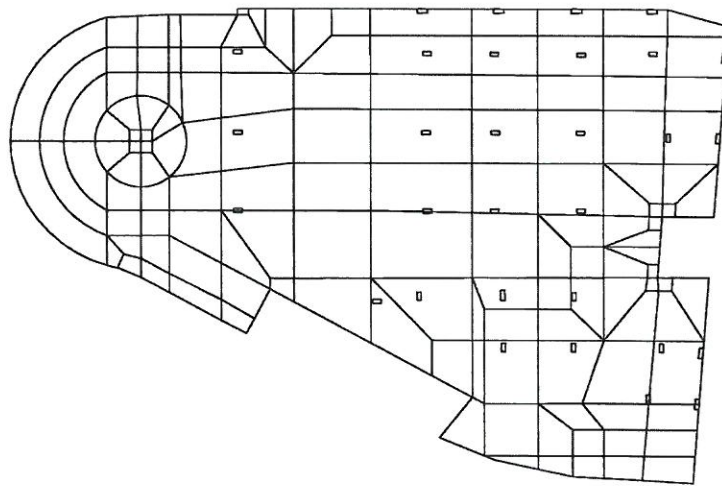


Abbildung 7: Diskretisiertes System

Ergebnisse im Schnitt A-A:

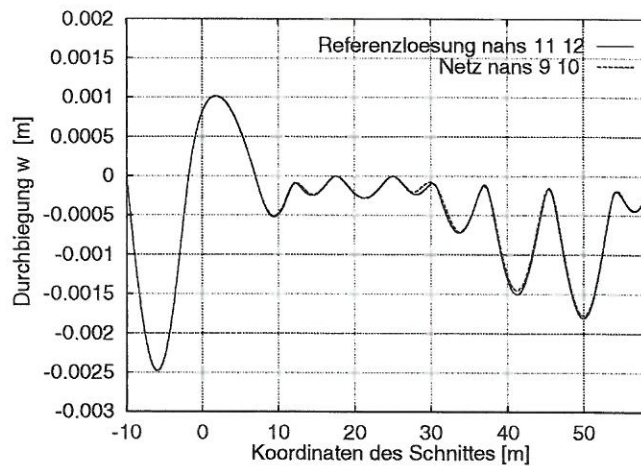


Abbildung 8: Durchbiegungsverlauf w im Schnitt A-A

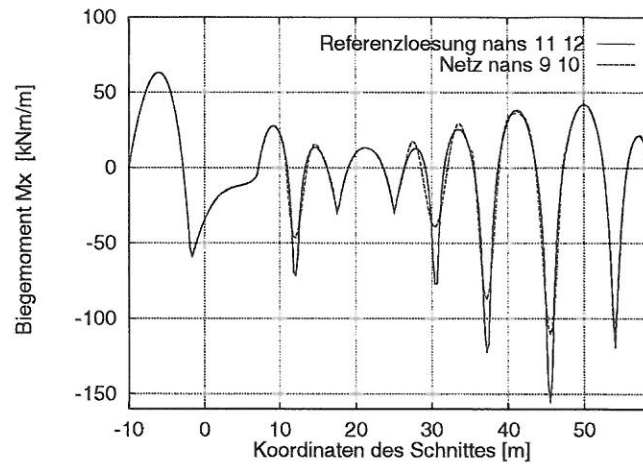


Abbildung 9: Momentenverlauf M_x im Schnitt A-A

Wie aus den Abbildungen 8 bzw. 9 zu erkennen ist, stimmen die Ergebnisse aus dem entwickelten Berechnungsverfahren sehr gut mit denen aus der Referenzlösung überein.

Literatur

- [1] S.M. Holzer, E. Rank und H. Werner. *An implementation of the hp-version of the Finite Element Method for Reissner-Mindlin plate problem*; Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 30, S. 459-471, (1990).
- [1] T. Scapolla und L.D. Croce. *On the robustness of hierarchic finite elements for Reissner-Mindlin plates*; Comp. Meth. App. Mech. Eng., Vol. 101, S. 43-60, (1992).
- [3] B. Szabó und I. Babuška. *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, (1991).
- [4] S.M. Holzer und C. Hausser. *Ergebnisverbesserung von Finite-Element-Berechnungen durch exakte Geometriemodellierung*; 56. Auflage, Forschung im Ingenieurwesen, S. 65-70, (1990).
- [5] K. Preusch. *Untersuchung von Querkräften und Flachdeckenauflagerungen bei einem Reissner-Mindlin Plattenelement*; Technischer Bericht: Universität Dortmund, Fakultät Bauwesen, Num. Methoden und Informationsverarbeitung, (1996).
- [6] R. Stenberg und M. Suri. *An hp error analysis of MITC plate elements*; Technischer Bericht: University of Maryland Baltimore, Department of Mathematics and Statistics, (1994).
- [7] H. Bröker. *Untersuchung Flachdeckenauflagerungen mit einer Reissner-Mindlin Elementformulierung*; Technischer Bericht: Universität Dortmund, Fakultät Bauwesen, Num. Methoden und Informationsverarbeitung, (1997).
- [8] E. Rank, R. Krause und K. Preusch, *On the accuracy of p-version elements for the Reissner-Mindlin plate problem*; erscheint im: Int. J. Num. Meth. Eng. (1998).