HeuRekAP

Heuristische Rekonstruktion von Problemaufgaben mittels DGS-gestützter elektronischer Arbeitsblätter

Thomas Gawlick

Hans-Jürgen Elschenbroich

Dirk Brockmann-Behnsen

Leibniz Universität Hannover

Wie sucht man die Lösung? (POLYA, Schule des Denkens)

Erstens **Verstehen der Aufgabe**

Du mußt die Aufgabe *verstehen*

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!

Zweitens **Ausdenken eines Planes**

Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten.

Du mußt vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann.

Du mußt schließlich einen *Plan* der Lösung erhalten.

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
- *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?

Drittens **Ausführen des Plans**

Führe Deinen *Plan* aus.

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist?

Viertens **Rückschau**

Prüfe die erhaltene Lösung.

- Kannst Du das *Resultat kontrollieren*? Kannst Du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
- Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Polyas Liste beschreibt die **Heurismen** (also die Problemlösestrategien, Prinzipien, Hilfsmittel), die erfolgreiche Problemlöser anwenden.

Wie kann man sie den SuS verfügbar machen?

Projekt HeuRekAP:
„Polya in die Schule bringen“!

Prinzipien der Heuristischen Rekonstruktion

1) Auswahl einer zu rekonstruierenden Aufgabe.
2) Schlüsselfragen an die Aufgabe:
   a) Welche Teilziele sollen erreicht werden?
   b) Welche Heurismen können hilfreich sein?
   c) Welche Heurismen können selbst gefunden werden, für welche werden Hinweise benötigt? Sollen die Hinweise schon in der Aufgabenstellung enthalten sein oder sollen sie *an bestimmten* Stellen des Problemlöseprozesses nachgereicht werden?
   d) Welche Ressourcen werden benötigt? Welche sind schon vorhanden, welche müssen mitgeliefert werden?
3) Überarbeitung und heuristische Anreicherung der Aufgabe.
4) Beobachtung des Bearbeitungsprozesses der modifizierten Aufgabe, weitere Verbesserung der Aufgabe.

Gawlick, Th:„Click, drag, think!" Posing and Exploring Conjectures with Dynamic Geometry Software, in: Habre, S. (ed.): *Dynamical mathematical software and visualization in the learning of mathematics*. Hershey, PA: IGI Global 2012

Methodische Leitlinien zum Einsatz von Heurismen und für Lehrer- bzw. Schüleraktivität

„Wenn der Lehrer in seinen Schülern die Denkoperationen entwickeln will, die den **Fragen und Anregungen unserer Tabelle** entsprechen, so **legt er diese Fragen und Anregungen** den Schülern so oft **vor**, wie er das ungezwungen tun kann. [...]. Dank dieser Führung wird der Schüler **schließlich hinter den rechten Gebrauch dieser Fragen und Anregungen kommen**"

Implizites Training

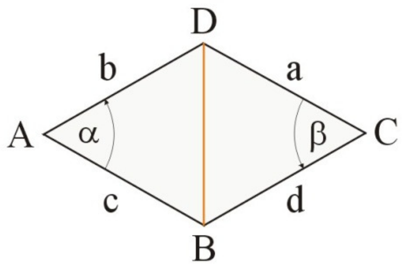
(Pólya 1949, S. 18)

„**Ausgewählte heuristische Vorgehensweisen** sollten (als eine spezielle Art von Verfahrenskenntnissen) **im Prozeß der Tätigkeit bewußt vermittelt werden**. Das heißt, es geht um ein zielgerichtetes Aneignen und Anwenden im Unterricht und um ein **explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen**. **Ein nur implizites Vermitteln etwa durch Vorbildwirkung reicht nicht aus**"

Explizites Training

(König 1992, S. 24)

Drei Stufen des heuristischen Explizitheitsgrades

Basis	Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Zeige an Hand der Skizze, dass die gegenüberliegenden Winkel betragsgleich sind: $\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$ 
IT	Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Zeige an Hand einer informativen Figur, dass gegenüberliegende Winkel in einer Raute betragsgleich sind. Führe dazu geeignete Bezeichnungen ein.
ET	Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Zeige, dass gegenüberliegende Winkel in einer Raute betragsgleich sind.

Aufgabenstellung Schulbuch

Quelle: Griesel, Postel & Suhr (2008, S. 23)

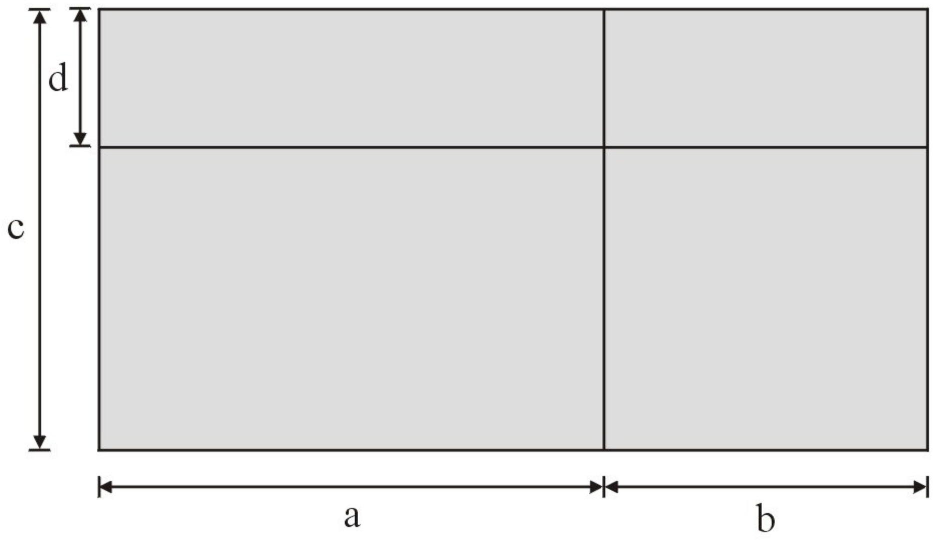
a) Erkläre am nebenstehenden Bild:

$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$

Warum ist diese Überlegung nur für positive Zahlen a, b, c, d mit $d < c$ gültig?

b) Entwirf ein ähnliches Bild zu der folgenden Gleichung:

$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$



Aspekte der heuristischen Rekonstruktion der Aufgabe

Angesprochene Polya-Fragen

1. What is the unknown?
2. What are the data?
7. Draw a figure.
8. Introduce suitable notation.
12. Do you know a related problem?
13. Do you know a theorem that could be useful?

Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it?

17. Could you use ist method?
18. Should you introduce some auxilary element in order to make ist use possible?

If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem.

23. A more special problem?
40. Can you derive the solution differently?
42. Can you use the result, or the method, for some other problem?

Rekonstruktionschritt 2c (Heurismen)
Welcher Explizitheitsgrad?

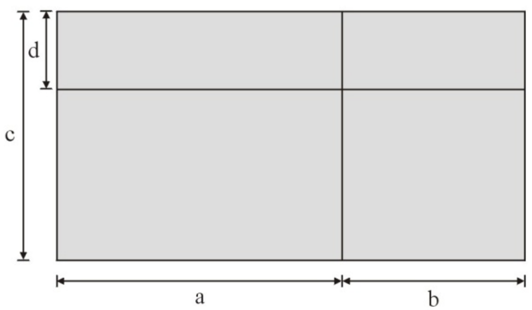
a) Erkläre am nebenstehenden Bild:

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$$

Warum ist diese Überlegung nur für positive Zahlen a, b, c, d mit d < c gültig?

b) Entwirf ein ähnliches Bild zu der folgenden Gleichung:

$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$$



Variante IT

a) Bestimme zu dem folgenden Term einen wertgleichen Term, der keine Klammern enthält:
$(a + b) \cdot (c - d)$

Fertige zu deiner Hilfe eine *informative Figur* an.

Welche Auswirkungen auf deine informative Figur hätte es, wenn eine oder mehrere Variablen negativ wären oder $d > c$ wäre?

b) Verfahre mit dem folgenden Term wie mit jenem aus a): $(a - b) \cdot (c - d)$

Variante IT

a) Bestimme zu dem folgenden Term einen wertgleichen Term, der keine Klammern enthält:
$(a + b) \cdot (c - d)$

Fertige zu deiner Hilfe eine *informative Figur* an.

Welche Auswirkungen auf deine informative Figur hätte es, wenn eine oder mehrere Variablen negativ wären oder $d > c$ wäre?

b) Verfahre mit dem folgenden Term wie mit jenem aus a): $(a - b) \cdot (c - d)$

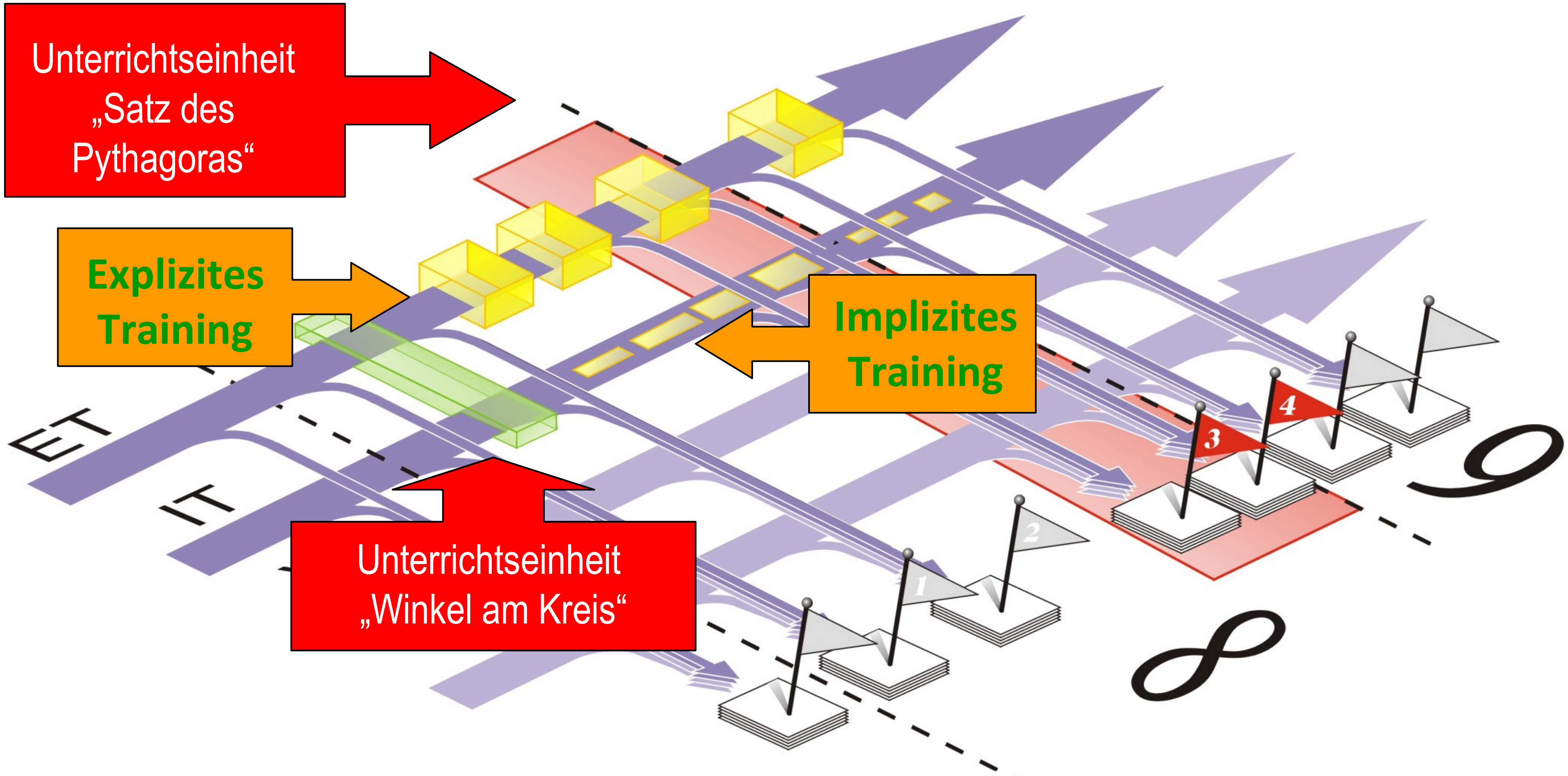
Variante ET

a) Bestimme zu dem folgenden Term einen wertgleichen Term, der keine Klammern enthält:
$(a + b) \cdot (c - d)$

Ändert es etwas an der Wertgleichheit deiner Termumformung, wenn du für die Variablen negative Zahlen einsetzt?

b) Verfahre mit dem folgenden Term wie mit jenem aus a): $(a - b) \cdot (c - d)$

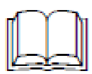
Wirksamkeitsstudie zum Heurismentraining
(Dissertationsprojekt Brockmann-Behnsen)



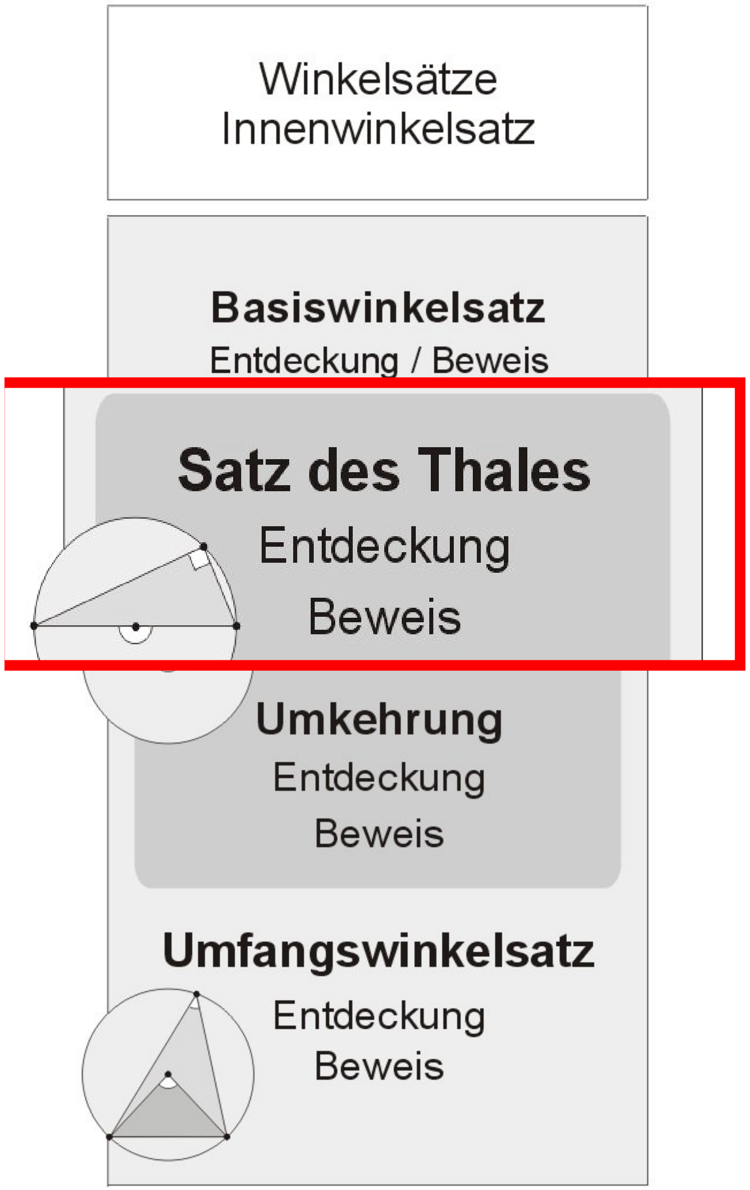
Gesucht: Kriterium der Zielerreichung

Gefunden: SuS wenden das Analogieprinzip an, um den “Pythagoras” zu verallgemeinern

Beweisphasen
(adaptiert von Zech und Boero)

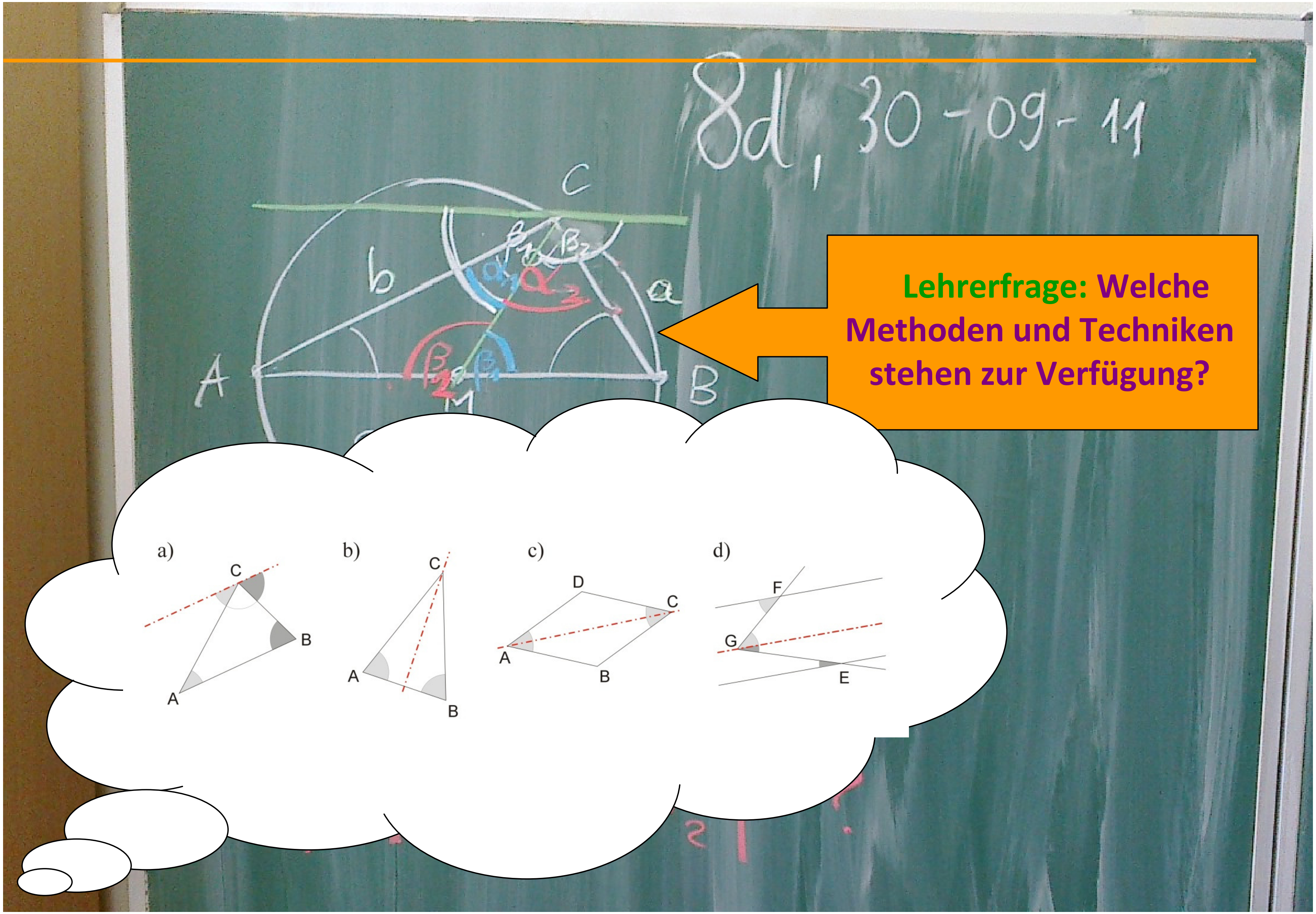
Nr	Icon	Name	Aktivität
1		Satzfindung	Aufstellen einer Vermutung
2		Satzformulierung	Trennen von Voraus-setzung und Behauptung
3		Beweisfindung	Erforschen des Umfeldes der Vermutung
4		Beweisorganisation	Auswahl und Verkettung geeigneter Argumente
5		Beweisdarstellung	Niederschrift des vollständigen Beweises

Beweisphasen beim Satz des Thales (UE „Winkel am Kreis“):



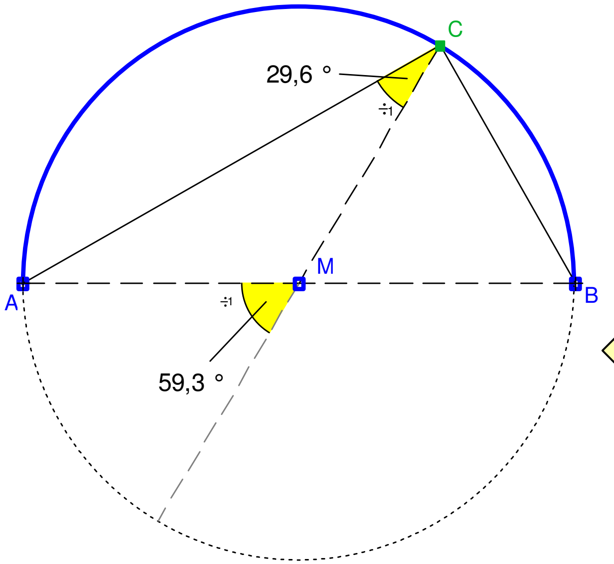
1 Satzfindung	EIWOS zur Entdeckung des SdT, Tabelle zur Unterscheidung der Fälle: C außerhalb, innerhalb und auf dem Umkreis von AB
2 Satzformulierung	Gemeinsame Formulierung des Falles: C auf dem Umkreis um AB (SdT) an der Tafel
3 Beweisfindung	Lehrerimpulse: Was wissen wir schon in Bezug auf Dreiecke, Winkel etc. Welche heuristischen Hilfsmittel sind uns bekannt? EIWOS zur Unterstützung
4 Beweisorganisation	Möglich: Beweispuzzle oder Lösungsgraph mit Lücken oder eigenständiges Erstellen eines Lösungsgraphen
5 Beweisdarstellung	Niederschrift des Beweises in einem Zweispaltenbeweis

Heurismentraining in Phase 3: Finde den „Thales“-Beweis!



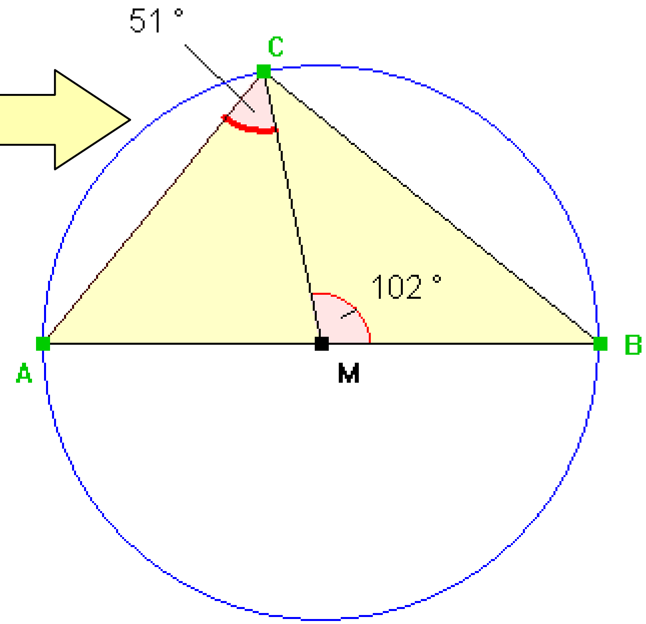
Beweisfindung mittels EiWos (Electronic interactive Worksheet)

Bitte Thales.geo öffnen!



Original
Elschenbroich
& Seebach 2002

**Rekon-
struktion**
HeuRekAP
2012

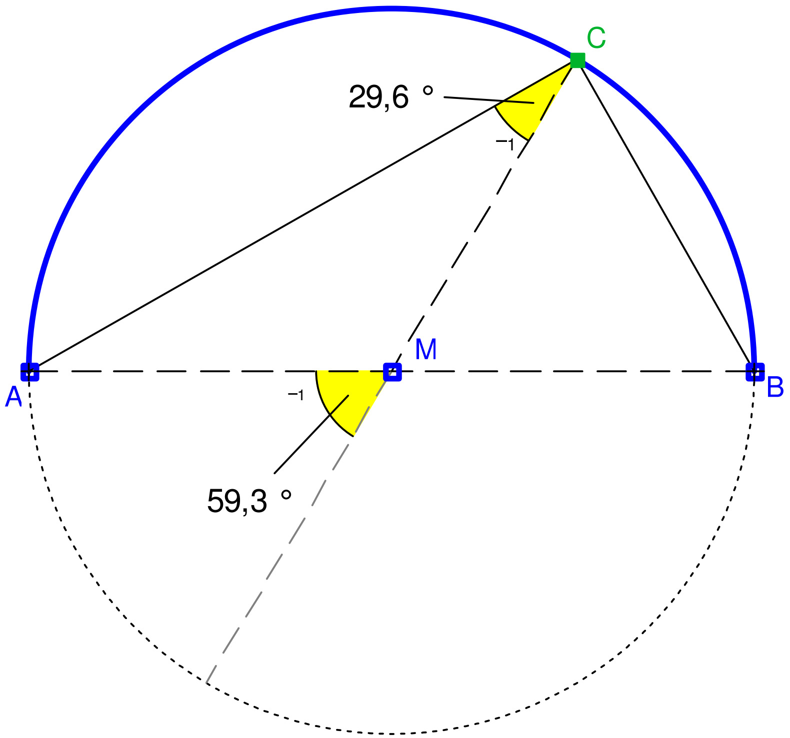


Außenwinkelsatz (Euklid, Elemente I.32)
An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich,
und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich.

Didaktische Rekonstruktion
Verwendung des Außenwinkelsatzes, um den Beweis übertragbar zu machen!

Bitte UWS.geo öffnen!

Verknüpfung von Beobachtungen zu Argumentationen



BWS

AWS

$|\alpha|=|\gamma_1|$

$|\varepsilon_1|=|\gamma_1|+|\alpha|$

$|\gamma_1|=|\varepsilon_1|/2$

$|\gamma_2|=|\varepsilon_2|/2$

$|\gamma|=|\varepsilon|/2$

Ziehe an C.

a)Was fällt dir an den eingezeichneten Winkeln auf?

b)Warum muss das so sein? Tipp: Beobachte das Dreieck AMC.

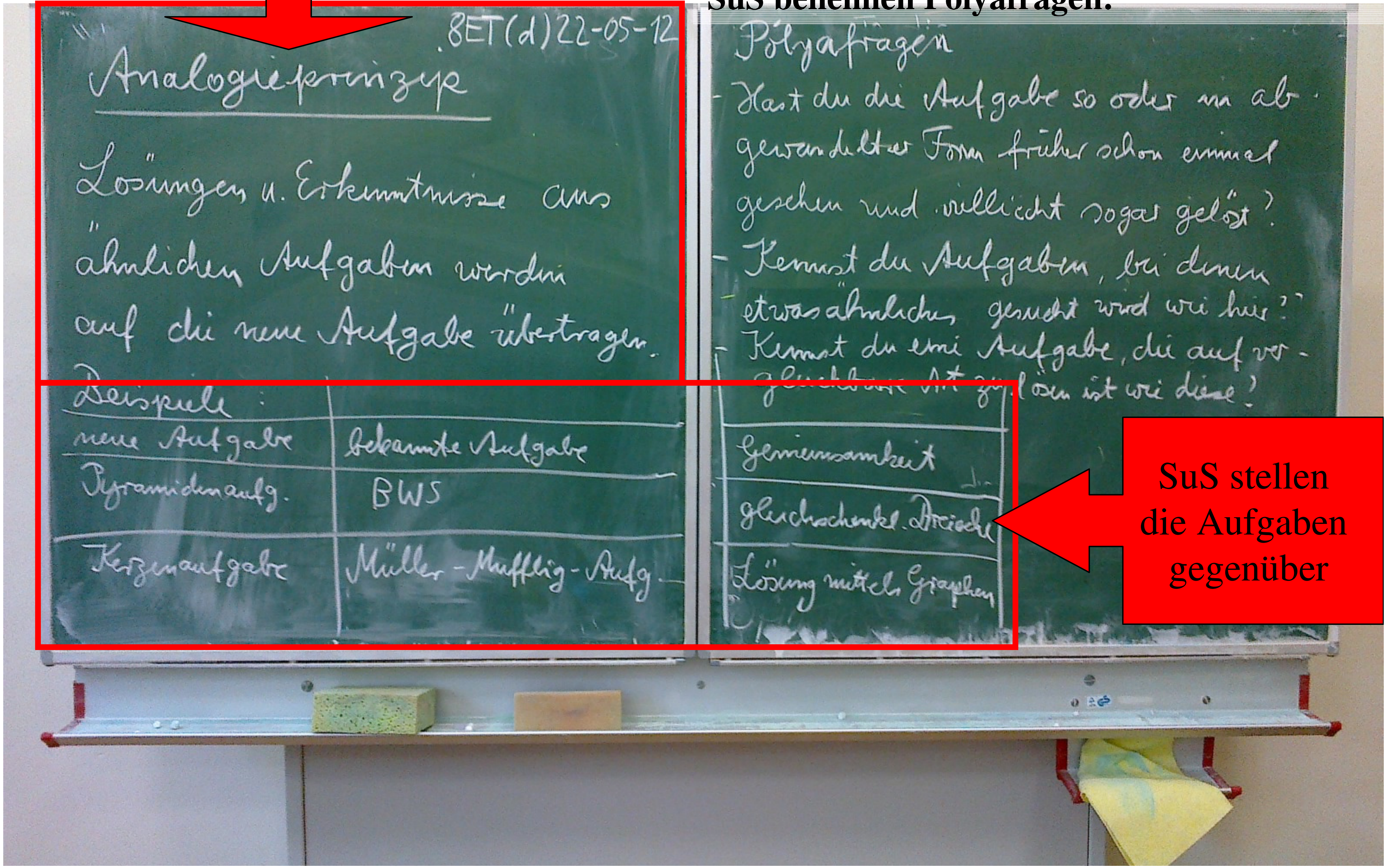
c)Verfahre entsprechend mit dem Dreieck BMC.

d)Was ergibt sich für die Größe des Winkels γ?

Der Heurismus „Analogie“

Benennung des Heurismus

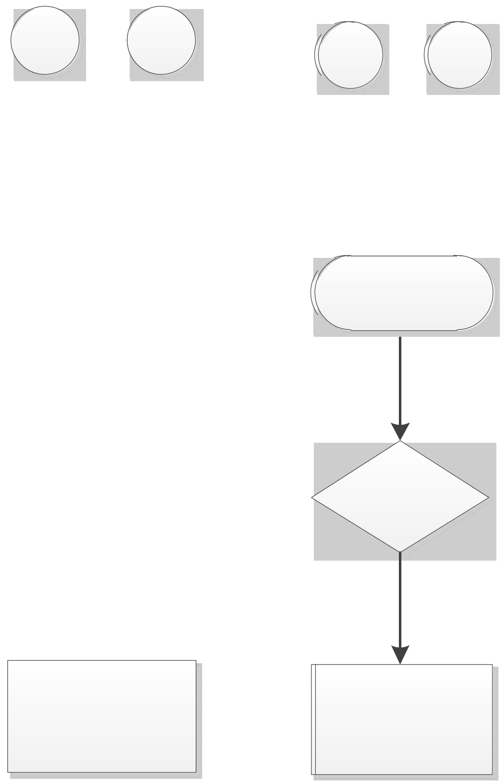
SuS benennen Pólyafragen:

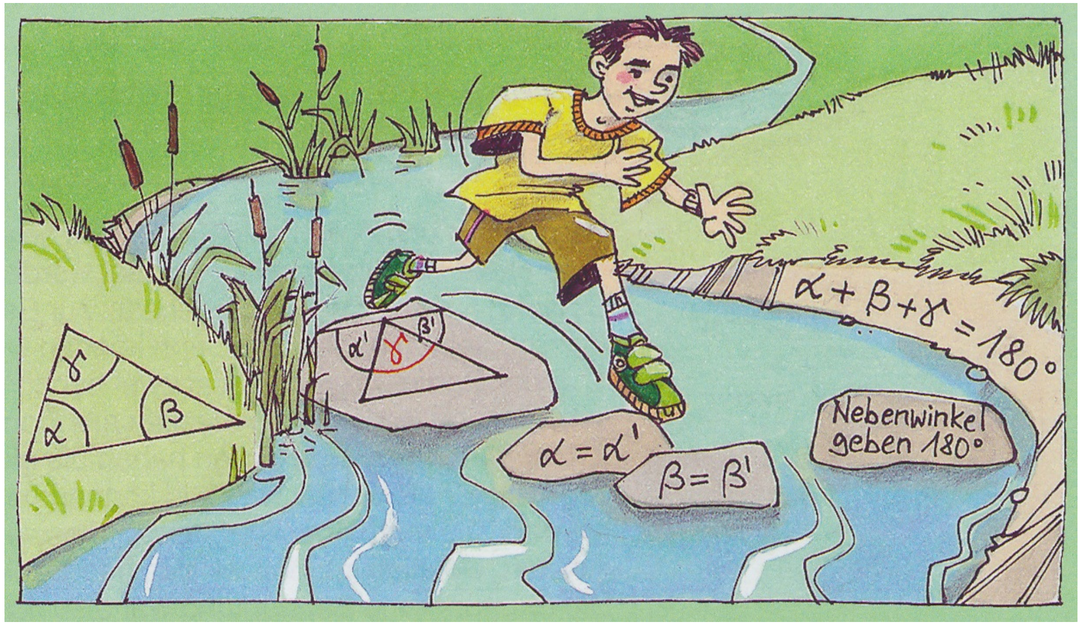


SuS stellen die Aufgaben gegenüber

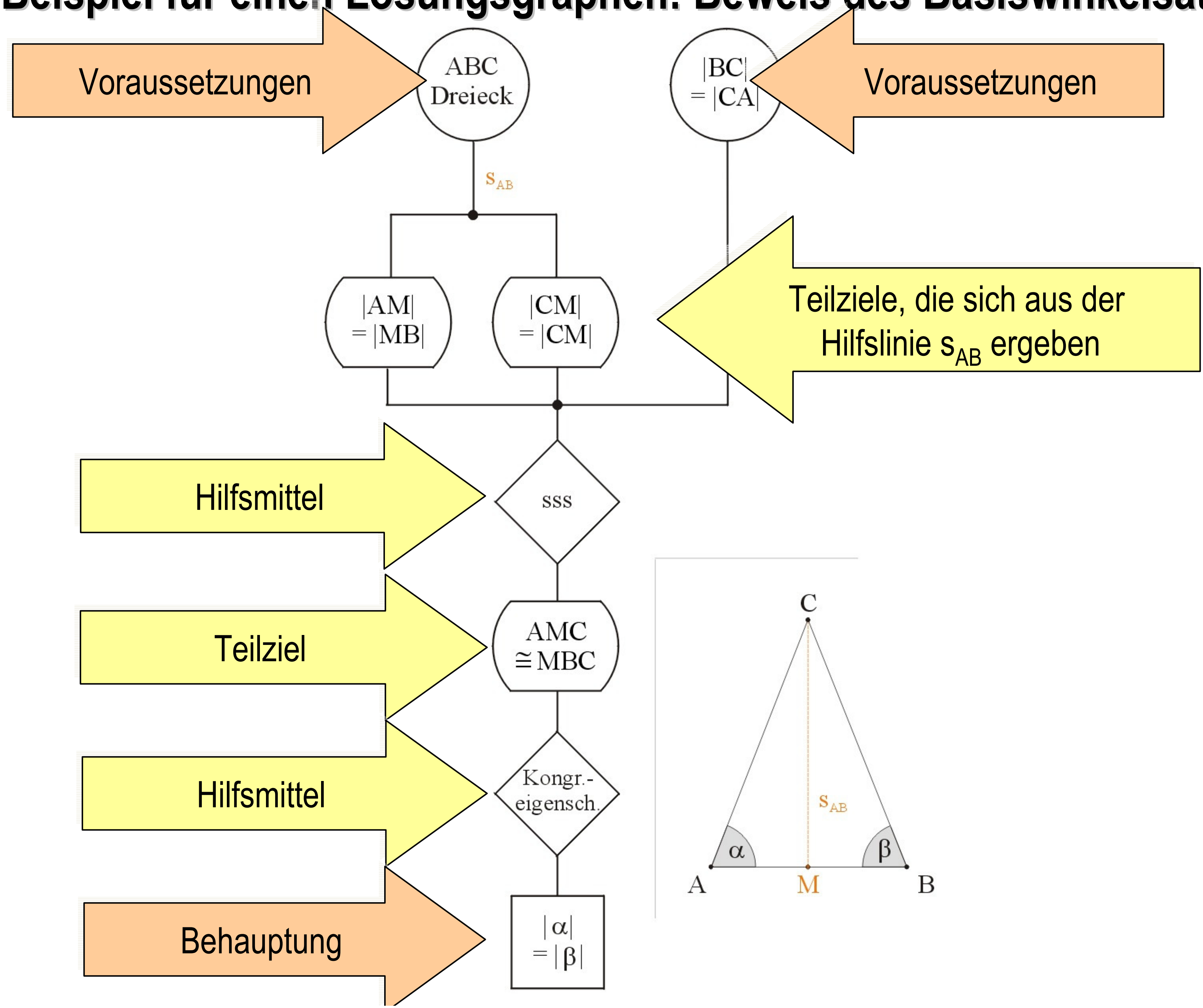
Der Lösungsgraph nach König als heuristisches Hilfsmittel

- **Lösungsgraph** repräsentiert den aktuellen Zustand der Aufgabe:
- <u>Geg</u>, <u>Ges</u>: Start- und Ziel-Knoten setzen
- <u>RA</u> und <u>VA</u>: Graph erweitern durch vorschalten/nachschalten von Knoten
  - <u>TZ</u>(Teilziel-Frage): Operat/Operand-Knoten
  - <u>HM</u>(Hilfsmittel-Frage): Operator



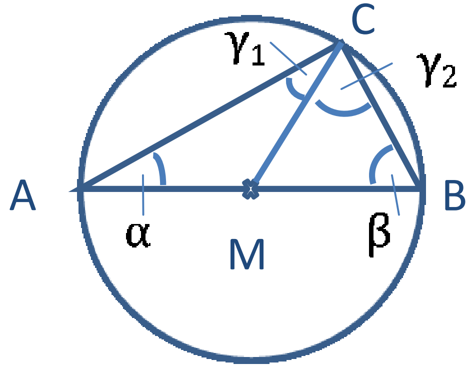


Beispiel für einen Lösungsgraphen: Beweis des Basiswinkelsatzes



PL-Prozess Thales

Ausgangszustand: ABC liegt auf k
AB ist Durchmesser von k
$|\gamma| = 90°$



Ist: Gleiche Längen
Soll: Winkelmaß = 90 ° } (UR) (ZZO)

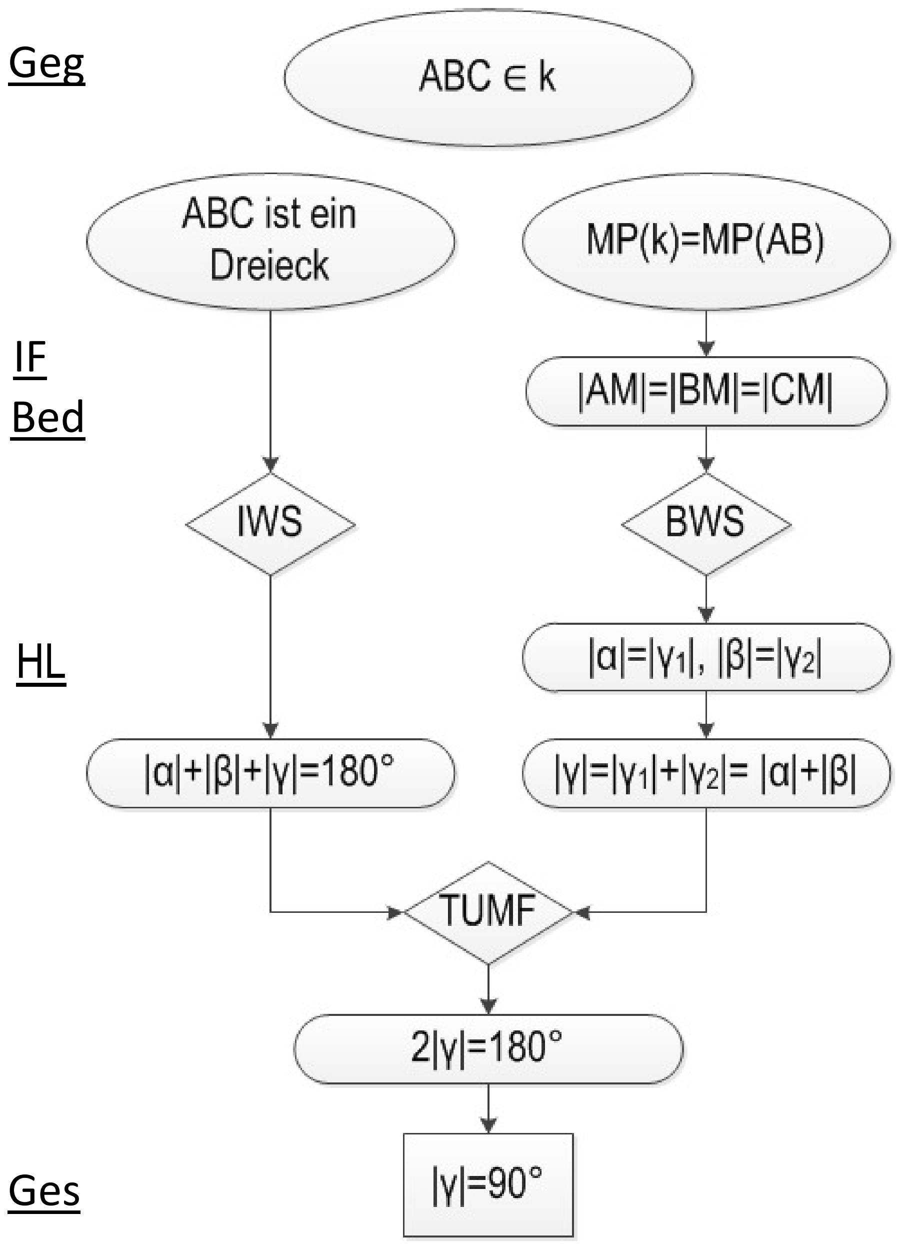
Längen — BWS — Winkel

(UR)

(ZZ): $|\alpha|, |\beta|$

Barriere:
Winkel variabel

(ZZO) Mit welchen HM/O kann man Winkelgrößen berechnen?



Heurismen

(SA)

(ZZB)

(VA)

(ZZO)/
(VA)

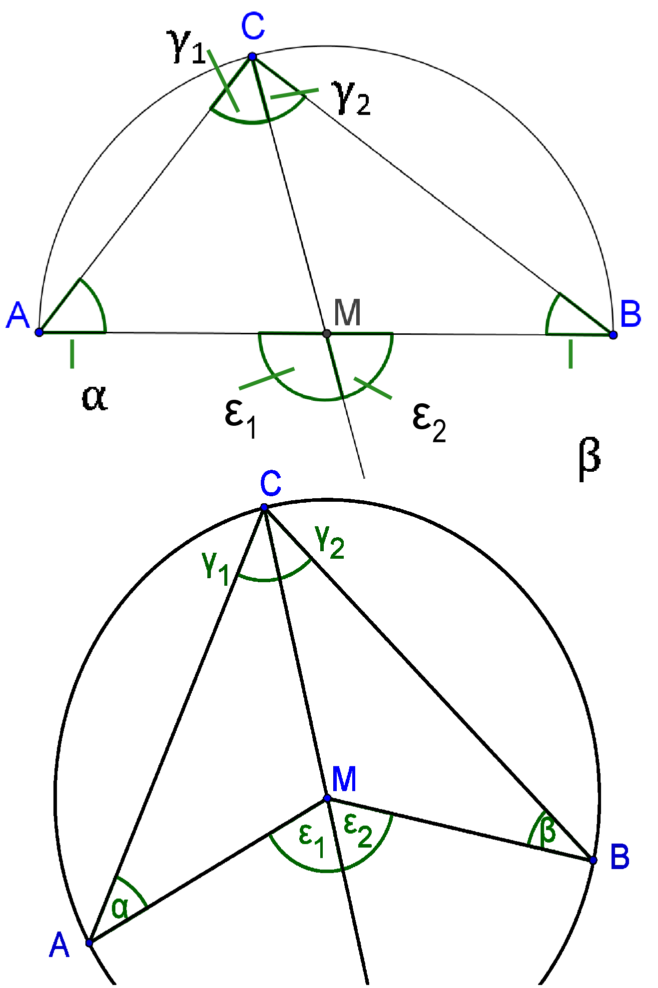
(ZZB)

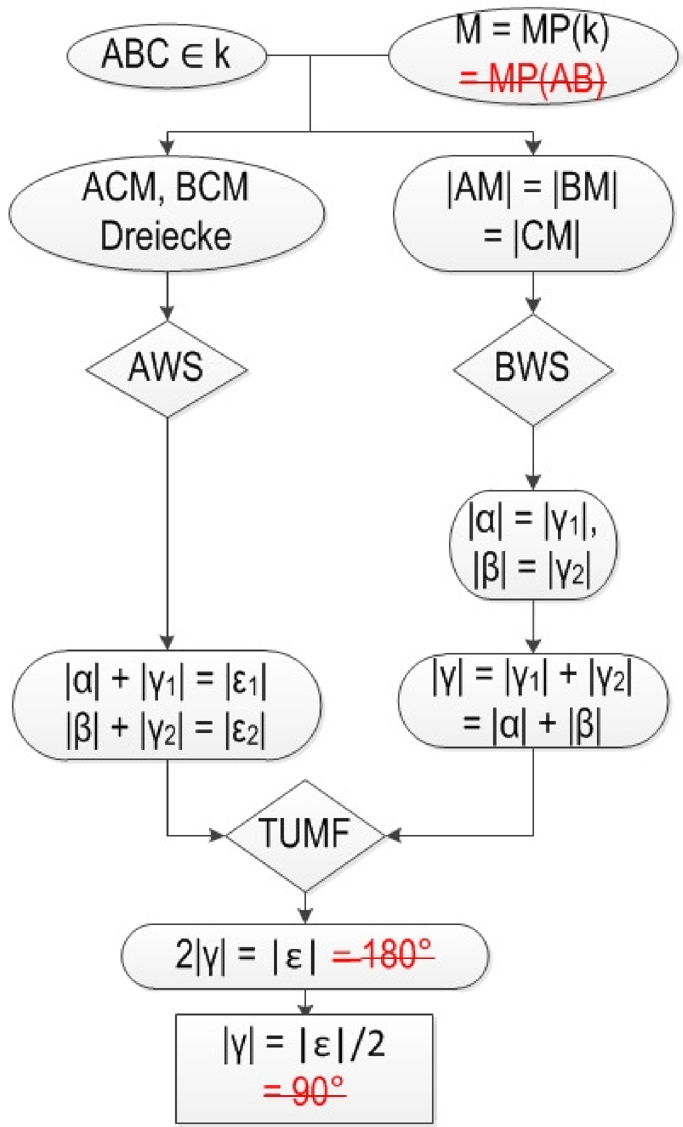
(ZA)

Vom „Thales“ zum Umfangswinkelsatz: Umstrukturierung des Beweises
Visualisierung der Analogie mit Hilfes des Graphen

Geg ABC liegt auf k
~~AB ist Durchmesser von k~~

Ges ~~$|\gamma| = 90°$~~





Ein Schlüsselelement des Trainings: Die Zwei-Tore-Regel

„Bei der Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe muss man in der Regel in mehreren Schritten vorgehen. Bei diesen Schritten kann es sich um Folgendes handeln:

a) Berechnungen
b) Term- oder Äquivalenzumformungen
c) logische Schlussfolgerungen

Für jeden dieser Schritte muss man die Zwei-Tore-Regel beachten:

Man darf einen Schritt erst durchführen, wenn man die Erlaubnis erhält, beide Tore passieren zu dürfen.

Jedes Tor wird von einem Wächter bewacht.“

Zwei-Tore-Regel

„Erstes Tor: Begründung für den geplanten Schritt

Der Wächter vom ersten Tor ist der strengere. Er fordert dazu auf, eine Begründung dafür zu nennen, warum man einen geplanten Schritt durchführen d

Hilfsmittel-Frage:
„Welches Hilfsmittel kann ich hier anwenden?“

Er fragt: **„Warum darfst du das?“**

Als Begründung akzeptiert dieser Wächter beispielsweise

a) korrekte Rechenregeln

b) logische Schlussfolgerungen aus
   - bereits bewiesenen Sätzen.
   - zuvor begründeten Schritten.
   - den Voraussetzungen der Aufgabe, die du bearbeitest.

Erst, wenn man den ersten Wächter mit einer guten Begründung von der Rechtmäßigkeit des Schrittes überzeugen konnte, darf man zum zweiten Tor weitergehen.“

Zwei-Tore-Regel

„Zweites Tor: Nutzen des geplanten Schrittes

Der Wächter an diesem Tor ist sehr viel freundlicher als der erste. Er hat von dem Wächter am ersten Tor erfahren, dass man einen mathematisch erlaubten Schritt bei der Bearbeitung der Aufgabe durchführen möchte. Nun möchte er helfen, unnötige Arbeit zu vermeiden und erkundigt sich danach, welchen Nutzen man sich [illegible]hritt erhofft.

Dieser Wächter fragt: **„Was bringt es dir?“**

Teilziel-Frage:
„Welches Teilziel kann ich erreichen?“

Als Vorteile könnte man diesem Wächter unter Anderem nennen

a) dass dadurch ein Term oder eine Gleichung vereinfacht wird.

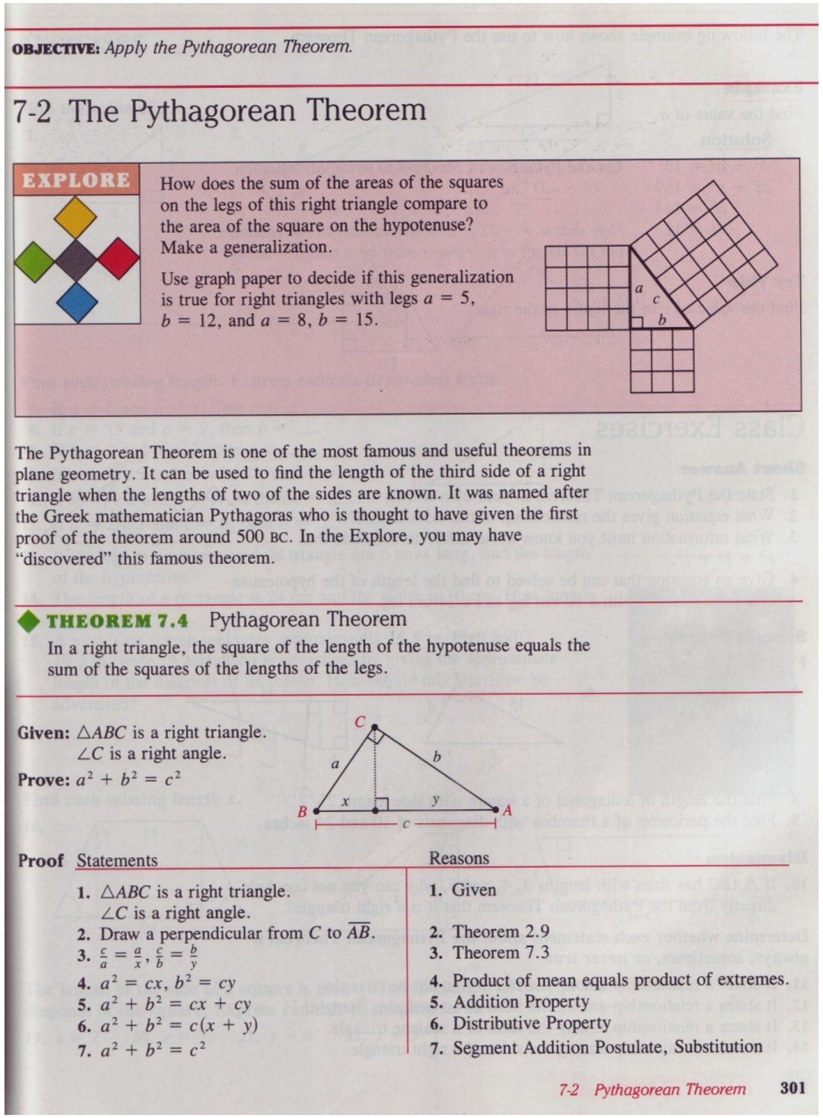
b) dass man durch den Schritt der Lösung näher kommt.

c) dass der Schritt für die Ausführung des Lösungsplanes erforderlich ist.

d) dass man sich weitere Erkenntnisse für den Lösungsplan erhofft.

e) dass man den Schritt ausprobieren möchte, um zu sehen, was passiert..“

Beispiele für Zweispaltenbeweise in Schulbüchern



OBJECTIVE: *Apply the Pythagorean Theorem.*

7-2 The Pythagorean Theorem

EXPLORE

How does the sum of the areas of the squares on the legs of this right triangle compare to the area of the square on the hypotenuse? Make a generalization.

Use graph paper to decide if this generalization is true for right triangles with legs $a = 5$, $b = 12$, and $a = 8$, $b = 15$.

The Pythagorean Theorem is one of the most famous and useful theorems in plane geometry. It can be used to find the length of the third side of a right triangle when the lengths of two of the sides are known. It was named after the Greek mathematician Pythagoras who is thought to have given the first proof of the theorem around 500 BC. In the Explore, you may have "discovered" this famous theorem.

THEOREM 7.4 Pythagorean Theorem

In a right triangle, the square of the length of the hypotenuse equals the sum of the squares of the lengths of the legs.

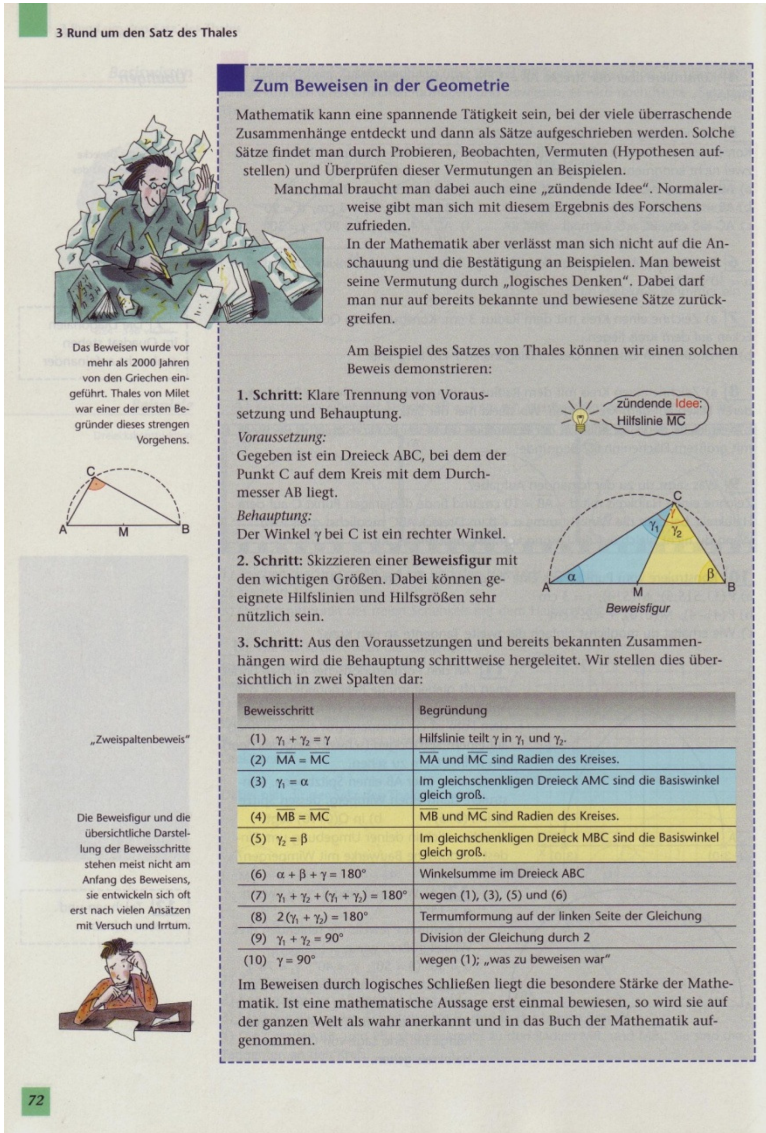
Given: $\triangle ABC$ is a right triangle. $\angle C$ is a right angle.

Prove: $a^2 + b^2 = c^2$

Proof Statements	Reasons
1. $\triangle ABC$ is a right triangle. $\angle C$ is a right angle.	1. Given
2. Draw a perpendicular from C to $\overline{AB}$.	2. Theorem 2.9
3. $\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$, $\frac{c}{b} = \frac{b}{y}$	3. Theorem 7.3
4. $a^2 = cx$, $b^2 = cy$	4. Product of mean equals product of extremes.
5. $a^2 + b^2 = cx + cy$	5. Addition Property
6. $a^2 + b^2 = c(x + y)$	6. Distributive Property
7. $a^2 + b^2 = c^2$	7. Segment Addition Postulate, Substitution

7-2 Pythagorean Theorem 301

„Geometry", Clemens et al. (1994, S. 301)



3 Rund um den Satz des Thales

Zum Beweisen in der Geometrie

Mathematik kann eine spannende Tätigkeit sein, bei der viele überraschende Zusammenhänge entdeckt und dann als Sätze aufgeschrieben werden. Solche Sätze findet man durch Probieren, Beobachten, Vermuten (Hypothesen aufstellen) und Überprüfen dieser Vermutungen an Beispielen.

Manchmal braucht man dabei auch eine „zündende Idee". Normalerweise gibt man sich mit diesem Ergebnis des Forschens zufrieden.

In der Mathematik aber verlässt man sich nicht auf die Anschauung und die Bestätigung an Beispielen. Man beweist seine Vermutung durch „logisches Denken". Dabei darf man nur auf bereits bekannte und bewiesene Sätze zurückgreifen.

Das Beweisen wurde vor mehr als 2000 Jahren von den Griechen eingeführt. Thales von Milet war einer der ersten Begründer dieses strengen Vorgehens.

Am Beispiel des Satzes von Thales können wir einen solchen Beweis demonstrieren:

1. Schritt: Klare Trennung von Voraussetzung und Behauptung.

zündende Idee: Hilfslinie $\overline{MC}$

Voraussetzung:
Gegeben ist ein Dreieck ABC, bei dem der Punkt C auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB liegt.

Behauptung:
Der Winkel γ bei C ist ein rechter Winkel.

2. Schritt: Skizzieren einer **Beweisfigur** mit den wichtigen Größen. Dabei können geeignete Hilfslinien und Hilfsgrößen sehr nützlich sein.

Beweisfigur

3. Schritt: Aus den Voraussetzungen und bereits bekannten Zusammenhängen wird die Behauptung schrittweise hergeleitet. Wir stellen dies übersichtlich in zwei Spalten dar:

„Zweispaltenbeweis"

Beweisschritt	Begründung
(1) $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$	Hilfslinie teilt γ in γ_1 und γ_2.
(2) $\overline{MA} = \overline{MC}$	$\overline{MA}$ und $\overline{MC}$ sind Radien des Kreises.
(3) $\gamma_1 = \alpha$	Im gleichschenkligen Dreieck AMC sind die Basiswinkel gleich groß.
(4) $\overline{MB} = \overline{MC}$	$\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ sind Radien des Kreises.
(5) $\gamma_2 = \beta$	Im gleichschenkligen Dreieck MBC sind die Basiswinkel gleich groß.
(6) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$	Winkelsumme im Dreieck ABC
(7) $\gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2) = 180°$	wegen (1), (3), (5) und (6)
(8) $2(\gamma_1 + \gamma_2) = 180°$	Termumformung auf der linken Seite der Gleichung
(9) $\gamma_1 + \gamma_2 = 90°$	Division der Gleichung durch 2
(10) $\gamma = 90°$	wegen (1); „was zu beweisen war"

Die Beweisfigur und die übersichtliche Darstellung der Beweisschritte stehen meist nicht am Anfang des Beweisens, sie entwickeln sich oft erst nach vielen Ansätzen mit Versuch und Irrtum.

Im Beweisen durch logisches Schließen liegt die besondere Stärke der Mathematik. Ist eine mathematische Aussage erst einmal bewiesen, so wird sie auf der ganzen Welt als wahr anerkannt und in das Buch der Mathematik aufgenommen.

72

„Neue Wege", Lergenmüller et al. (2007, S.72)

Zwei-Tore-Regel und Zweispaltenbeweis

Voraussetzung:	
Behauptung:	
Skizze:	
Beweis:	

	Beweisschritt:	**Begründung:**
(1)		
(2)		
(3)		
(4)		
(5)		

Wächter 2

Wächter 1

Wächter 1

Wächter 1

Wächter 2

Die Wächter wirken nachhaltig!

$y = 2 \cdot x - 3$

der Gleichung $y = 2 \cdot x - 3$

„Ich weiß nicht, wie ich x wegbekomme“

Wächter 1

$y : x = 2x - 3$

$y = 2x - 3 \quad | :x$

$y : x = \frac{2x-3}{x}$

$\frac{y}{x} = \frac{2x-3}{x}$

$\frac{y}{x} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{3}{x}$

$\frac{y}{x} = 2 - \frac{3}{x}$

$\frac{4-2}{2}$

„Das bringt mir nichts“

Wächter 2

$7 = 2 \cdot 5 - 3$

C14 (04.09.2012)

Neues Bsp:

$y = 2 \cdot 4 - 3$

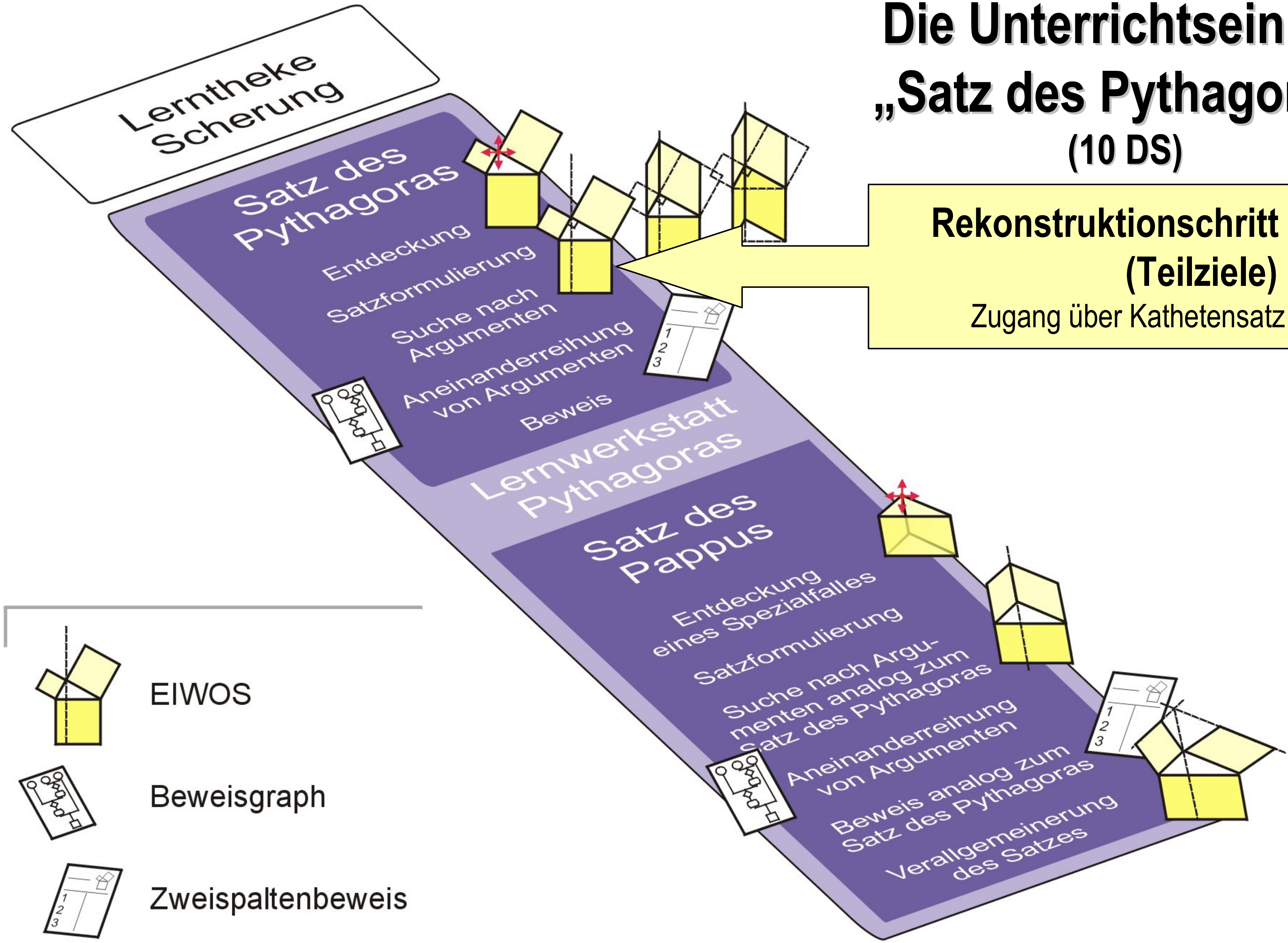
Die Unterrichtseinheit „Satz des Pythagoras“

(10 DS)

Rekonstruktionschritt 2a

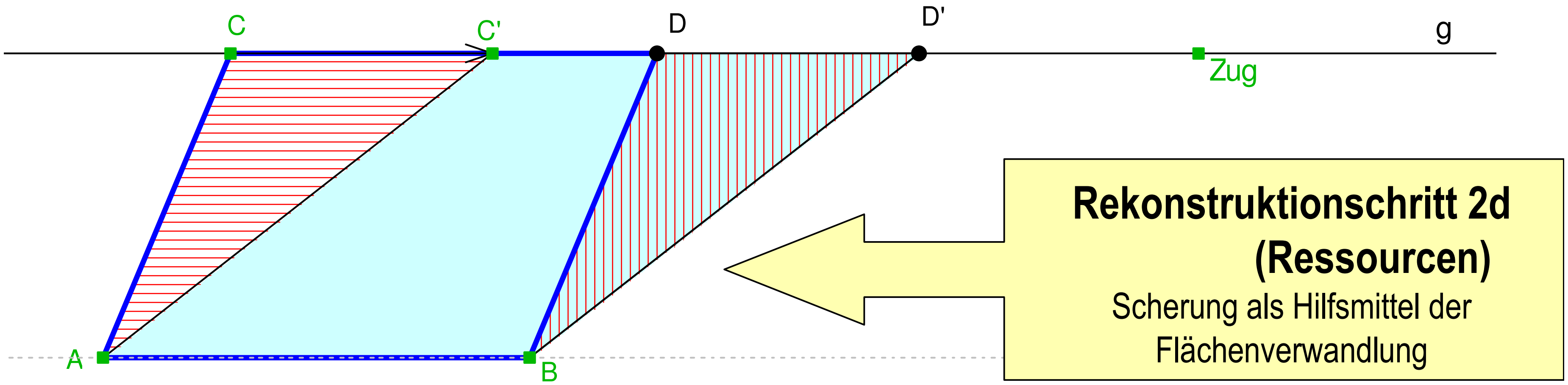
(Teilziele)

Zugang über Kathetensatz



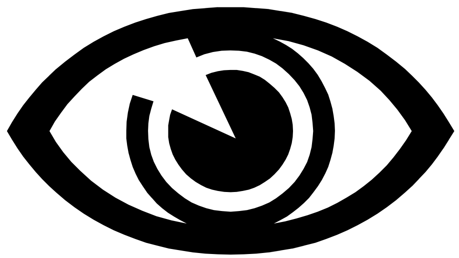
Lerntheke Scherung

Aufgabe 4a: Lies dir den folgenden Satz aufmerksam durch:



Hält man im Parallelogramm ABCD die Grundseite AB fest und verschiebt die Gegenseite CD parallel zu AB auf C'D', so ist auch ABC'D' ein Parallelogramm. Es ist flächengleich zu ABCD.

Aufgabe 4b: Beweise die Flächengleichheit von *ABCD und ABC'D'*.

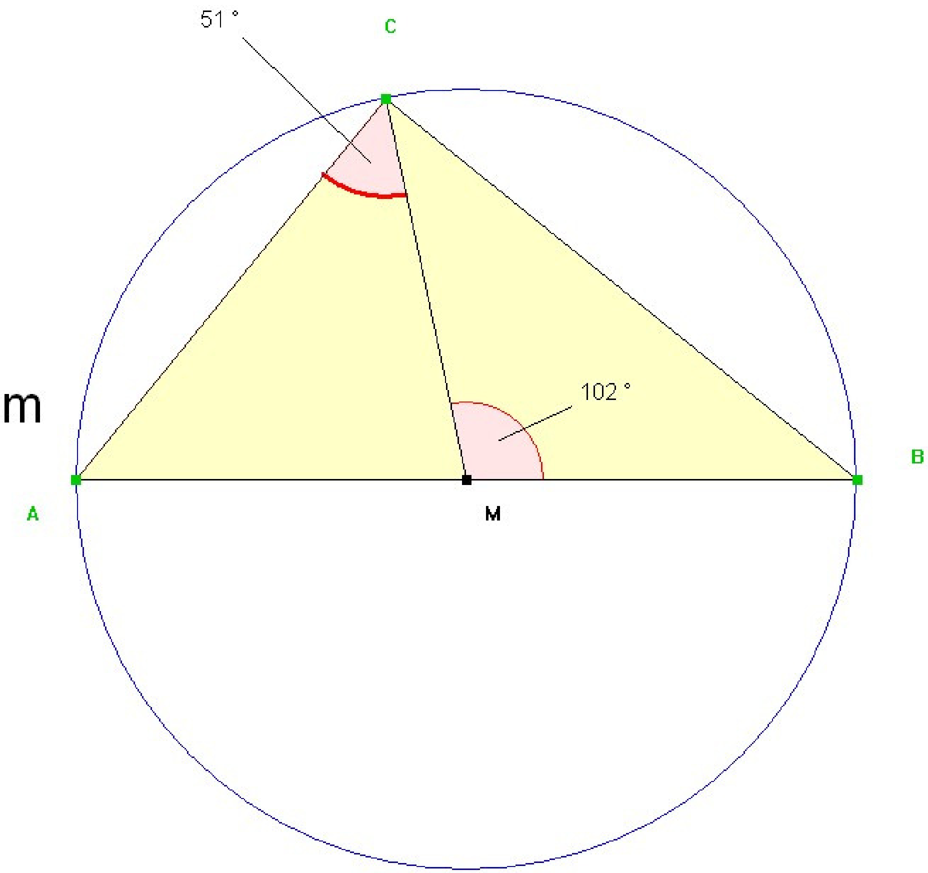


Phase 1:

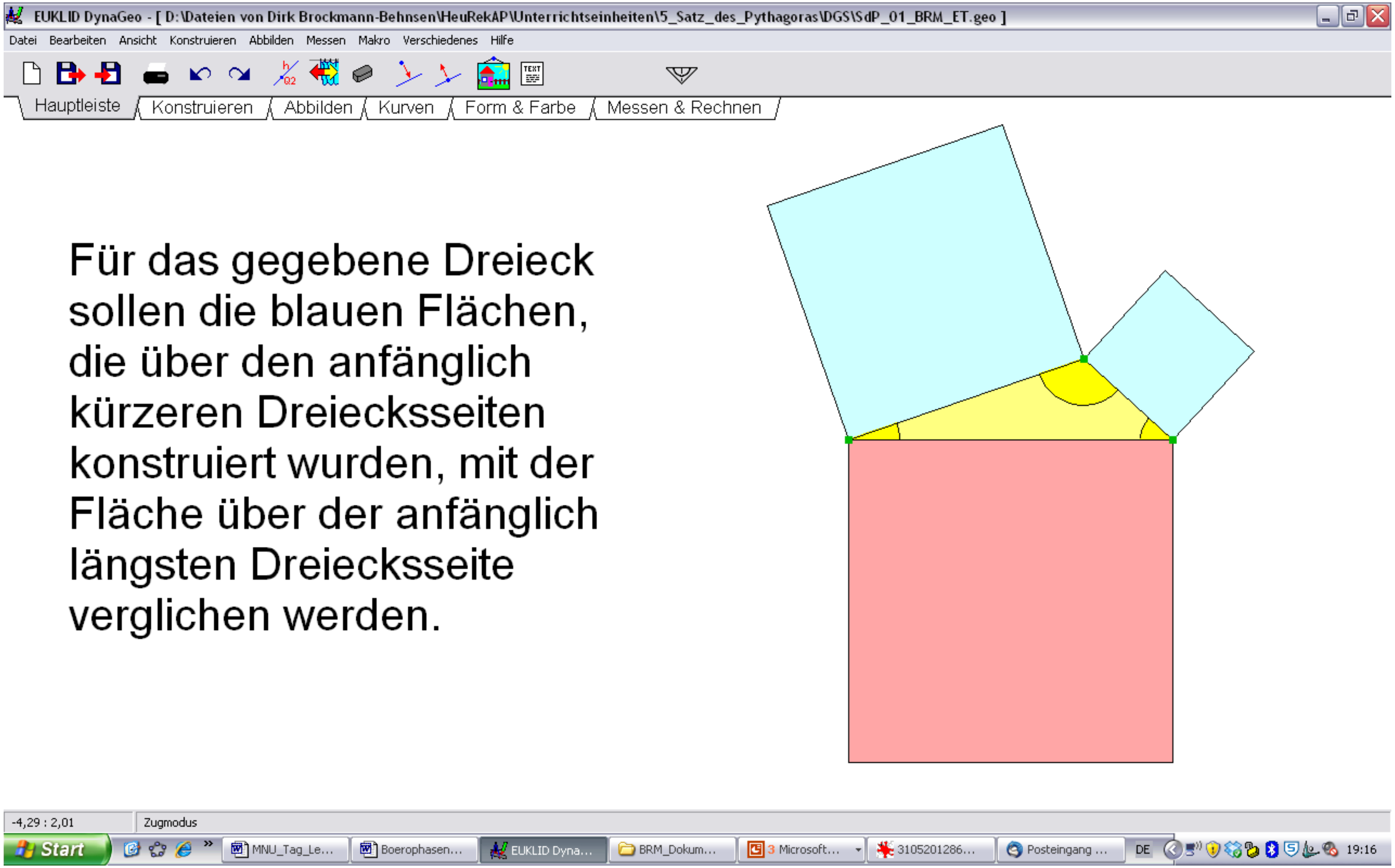
Satzfindung: *Aufstellen einer Vermutung*

Bitte EIWOS A1-02.geo öffnen

Ziehe an C.
a) Was fällt dir an den eingezeichneten Winkeln auf? (Tipp: Beobachte das Dreieck AMC)
b) Verfahre entsprechend mit dem Dreieck MBC und den anderen Teilwinkeln bei M und C.
c) Was ergibt sich aus deiner Beobachtung für die Größe des Winkels γ ?

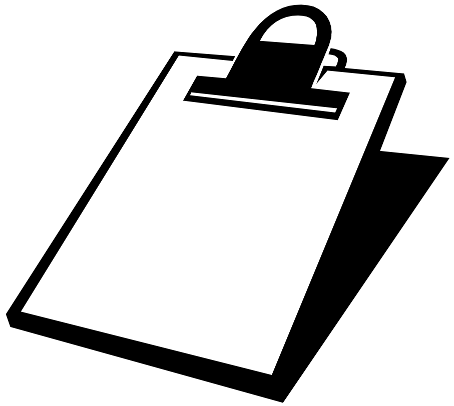


Bitte EIWOS SdP01.geo öffnen



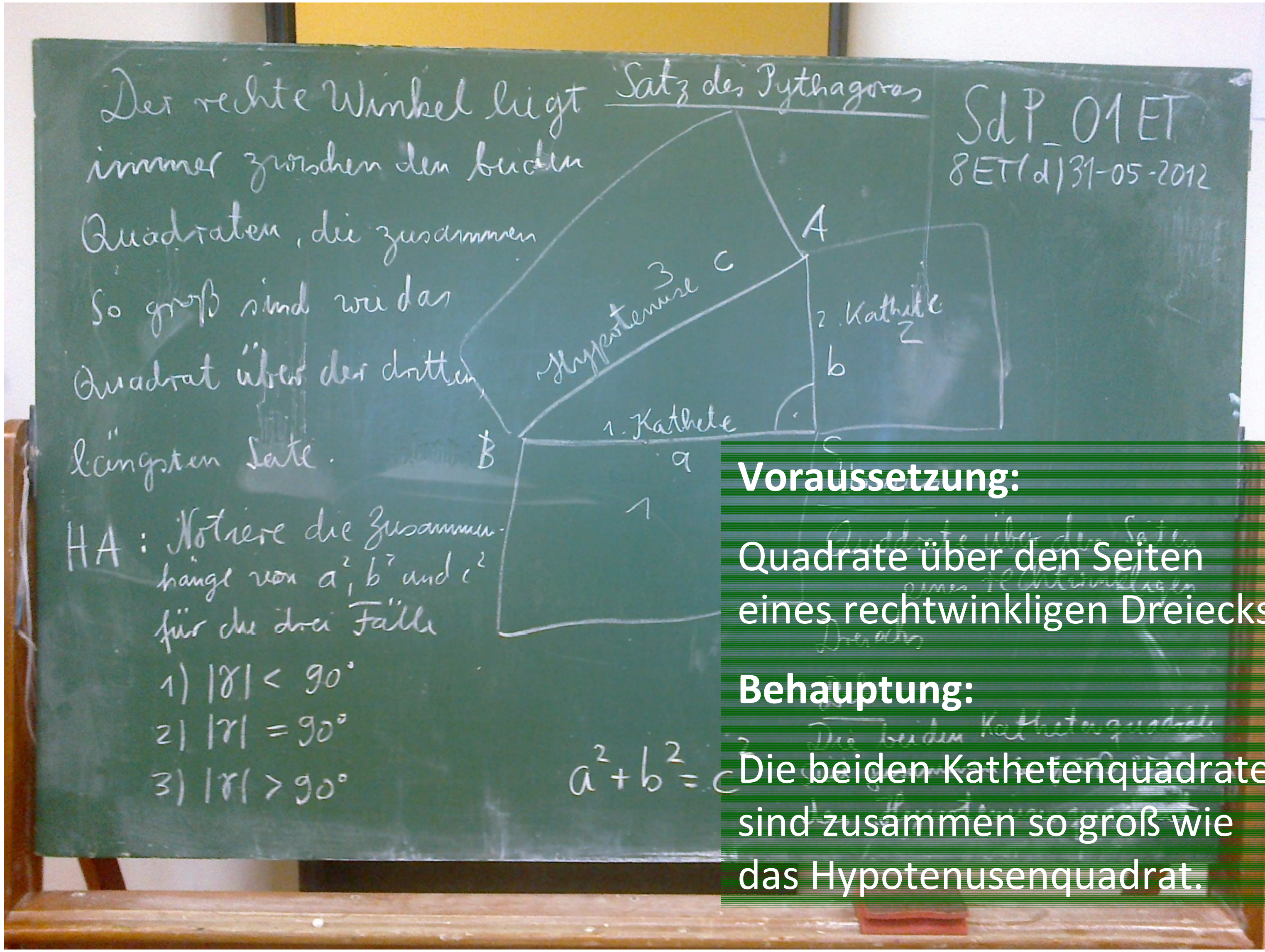
Ergebnissicherung

Lage von C	Gestalt des Dreiecks ABC	Vergleich der Quadratflächen	Betrag des Winkels γ
C liegt außerhalb von k.	ABC ist spitzwinklig in C.	$a^2+b^2>c^2$	$\gamma < 90°$
C liegt auf k.	ABC ist rechtwinklig in C.	$a^2+b^2=c^2$	$\gamma = 90°$
C liegt innerhalb von k.	ABC ist stumpfwinklig in C.	$a^2+b^2<c^2$	$\gamma > 90°$



Phase 2:

Satzformulierung: *Trennen von Voraussetzung und Behauptung*

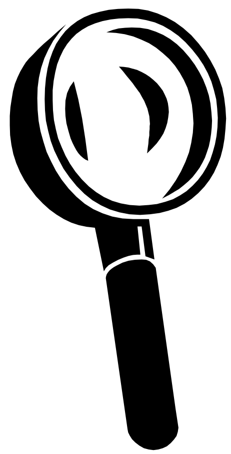


Voraussetzung:

Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks

Behauptung:

Die beiden Kathetenquadrate sind zusammen so groß wie das Hypotenusenquadrat.



Phase 3:

Beweisfindung: *Erforschen des Umfeldes der Vermutung, Identifizieren von Teilzielen und Hilfsmitteln für den Beweis*

Lehrerimpulse:

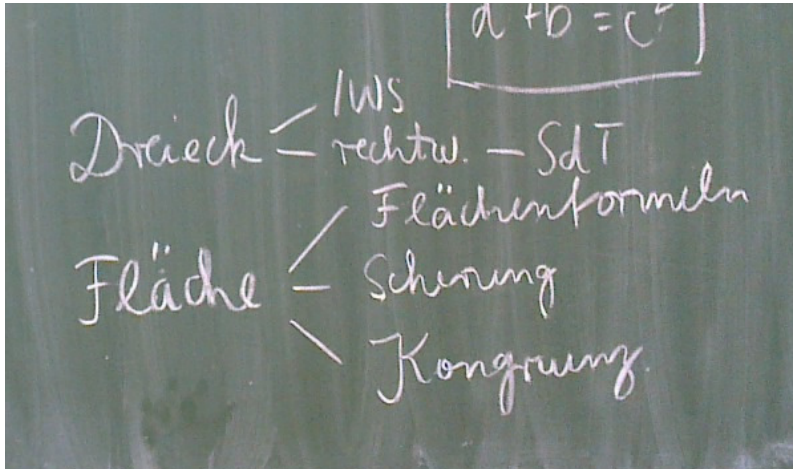
„Der SdP vergleicht die Maße quadratischer Flächen über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks miteinander. Erläutert, was diesen Vergleich so kompliziert macht!“

„Die beiden kleinen Quadrate lassen sich geometrisch nicht in das große einpassen, etwa durch Zerschneiden, Umlegen o.ä.“

„Zwei Flächen werden mit einer verglichen“

(Gedächtnisprotokoll von Schüleräußerungen)

„Erläutert, was ihr schon in Hinblick auf Dreiecke, Quadrate, Flächen etc. wisst?“



Bitte SdP03_Vierecke_IT.geo öffnen!

Betrachtet wird zunächst nur der rechte Teil der Pythagorasfigur. Eingezeichnet sind anfänglich ein Kathetenquadrat und ein rechteckiger Abschnitt des Hypotenusenquadrates. Variiere die Lage von C zunächst nicht.

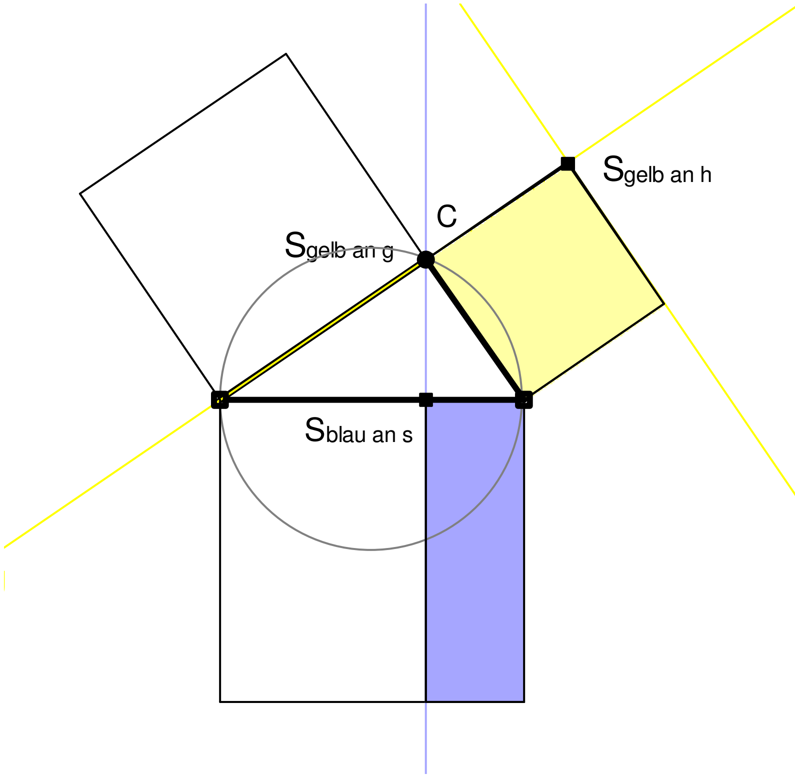
a) Schere das anfängliche, gelbe Quadrat mit $S_{\text{gelb an g}}$ und $S_{\text{gelb an h}}$ und das anfängliche, blaue Rechteck mit $S_{\text{blau an s}}$.

b) Versuche durch diese Scherungen ein gelbes und ein blaues Viereck zu erzeugen, die zueinander kongruent sind.

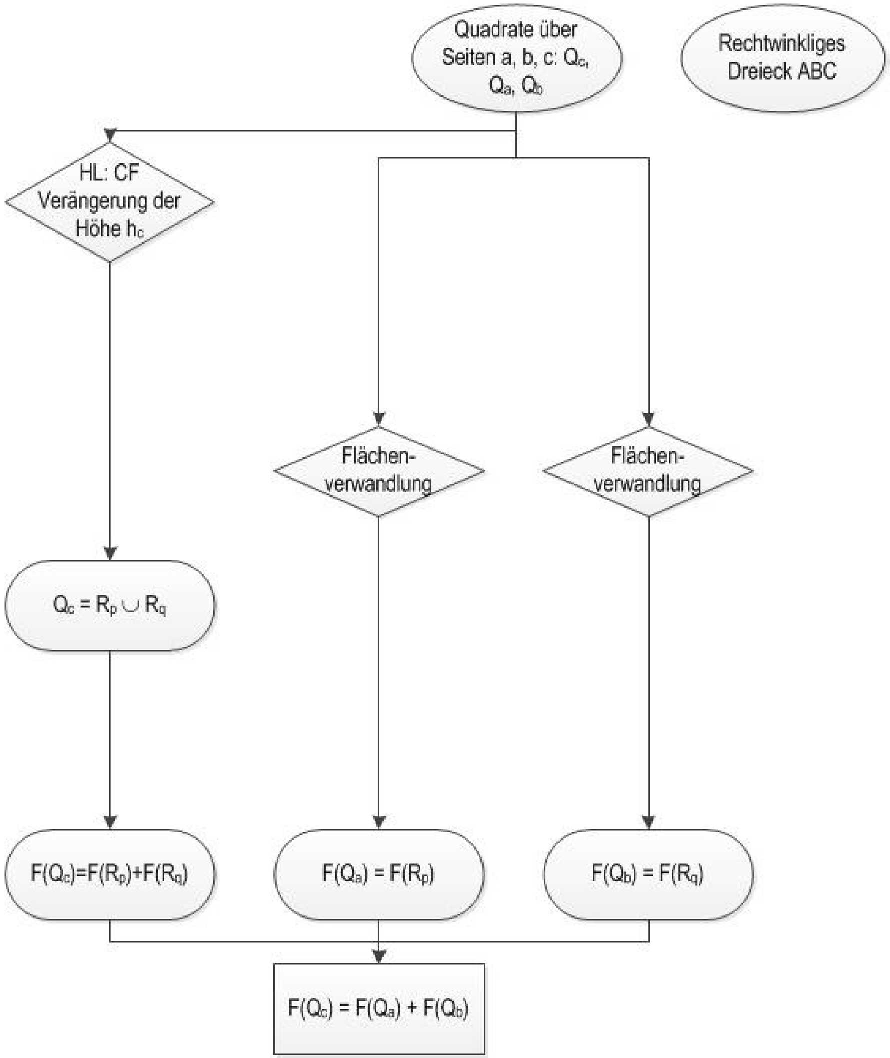
c) Begründe die Kongruenz der beiden gescherten Vierecke.

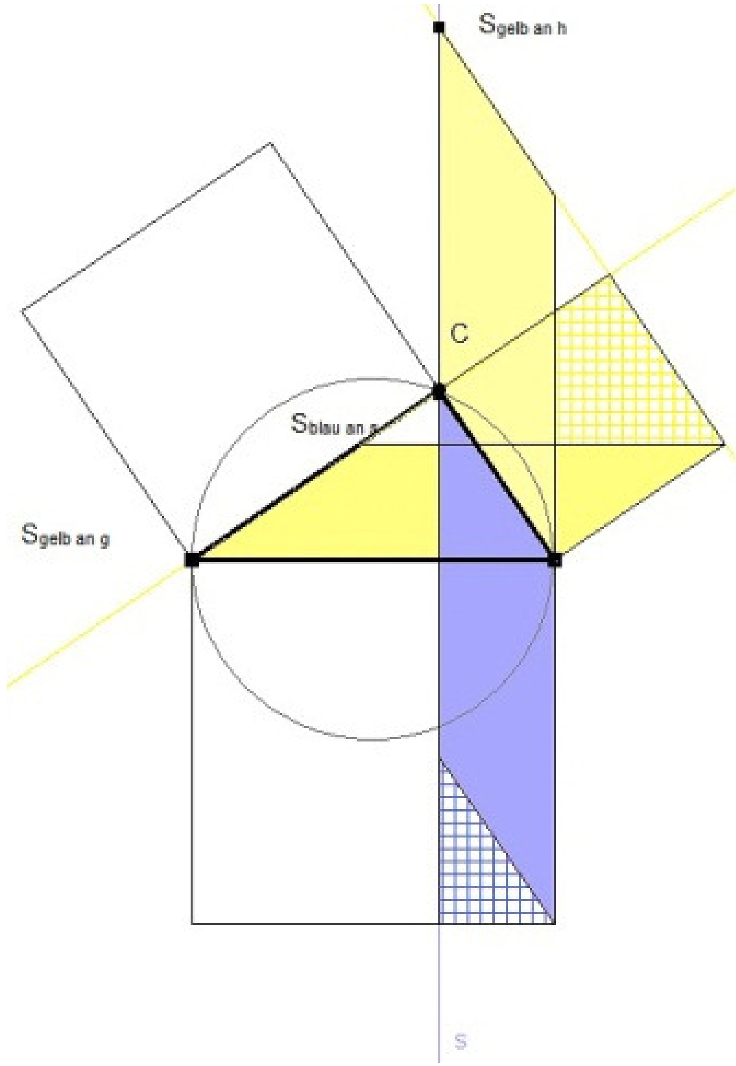
d) Was bedeutet das für die beiden anfänglichen (jetzt karierten) Vierecke?

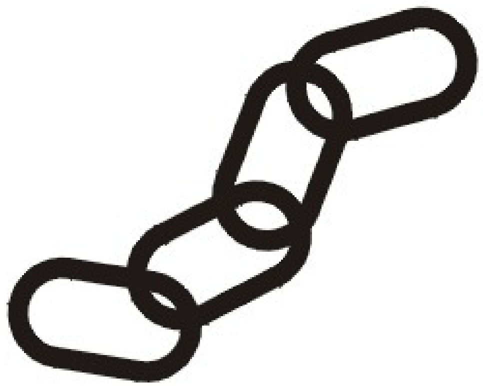
e) Übertrage deine Erkenntnisse auf den linken Teil der Figur.



Prozessdarstellung als schrittweise Erweiterung von Lösungsgraphen
1. Idee: Flächenverwandlung





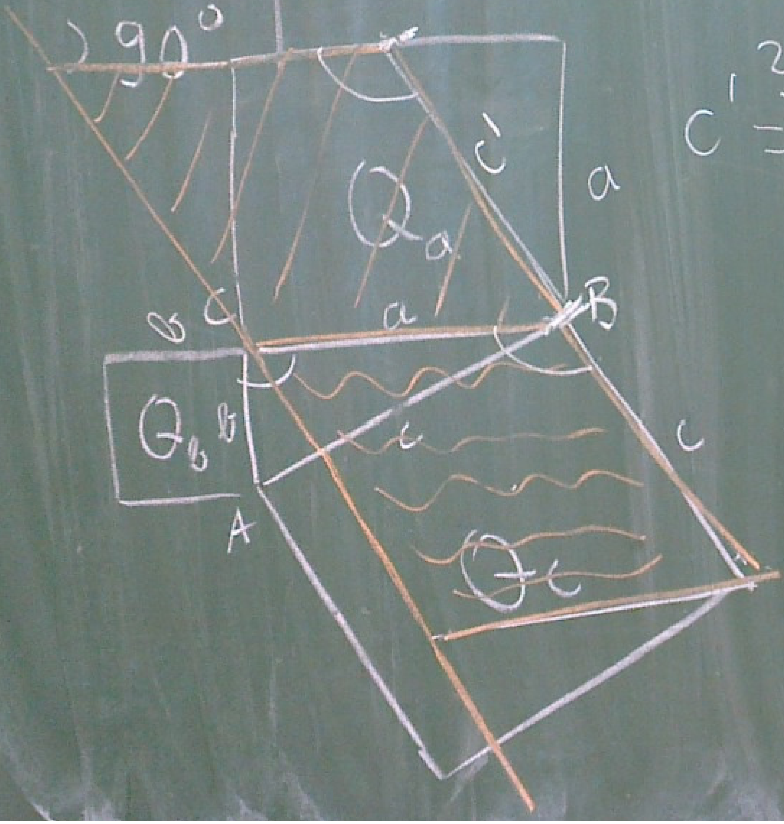


Phase 4:

Beweisorganisation: *Auswahl und Verkettung geeigneter Argumente*

8IT(C) 06-06-2012

$\lvert\gamma\rvert$	
$< 90°$	
$90°$	Die Quadrate über den Katheten sind flächengleich zum Quadrat über der Hypotenuse.
$> 90°$	



$$c' \stackrel{?}{=} c$$

ABC rechtw. Dreieck

Q_a, Q_b, Q_c Quadrate über den Dreieckseiten

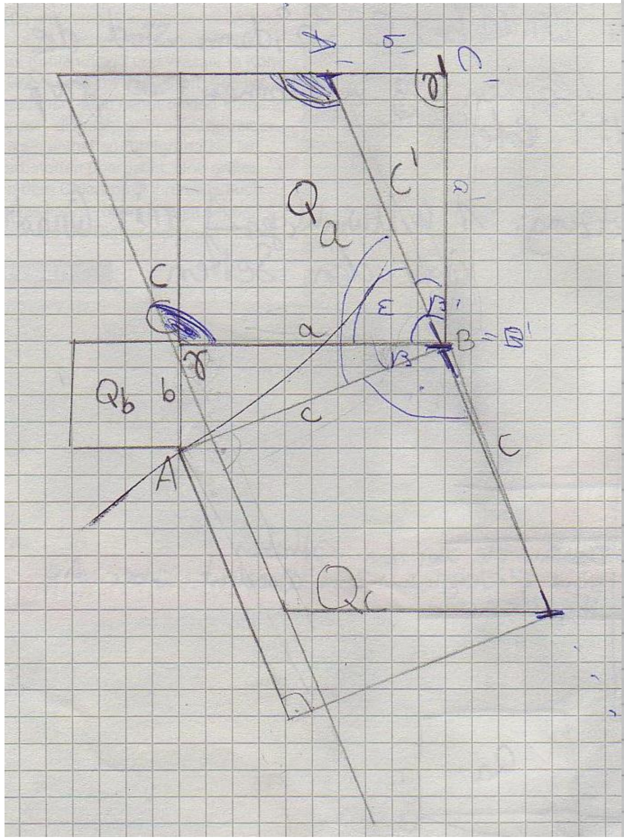
$\lvert\gamma\rvert = 90°$

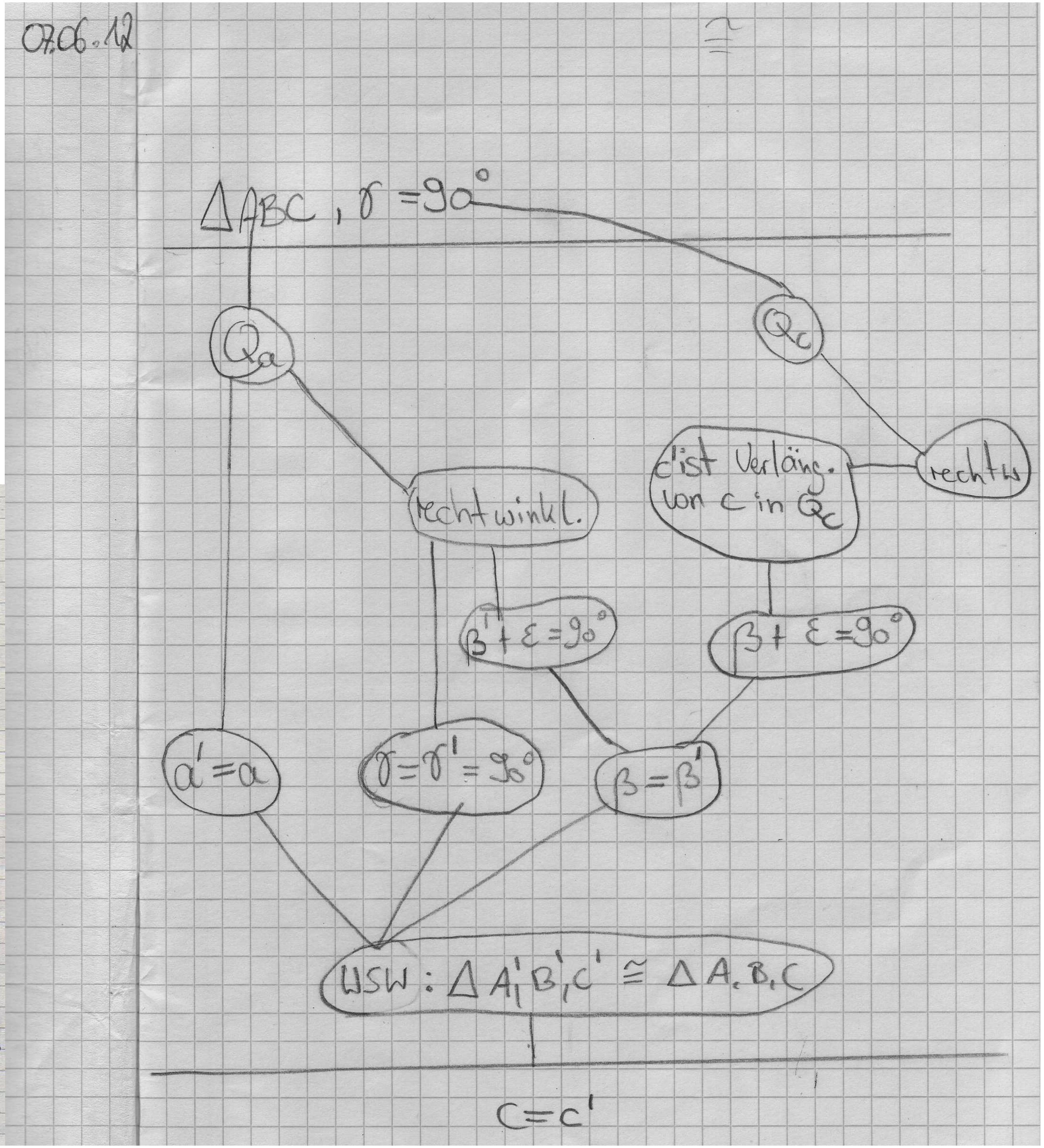
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Dreieck
- IWS
- rechtw. – SdT

Fläche
- Flächenformeln
- Scherung
- Kongruenz

Beweisgraph von C08 für die Behauptung c = c‘





Beweispuzzle zum Kathetensatz

HL: CF Verlängerung der Höhe h_C

Rechtwinkliges Dreieck ABC

$F(Q_b) = F(P_{ACSW})$

$F(P_{BGSC}) = F(P_{B'BCC'})$

$F(Q_c) = F(R_q) + F(R_p)$

$F(Q_a) = F(P_{BGSC})$

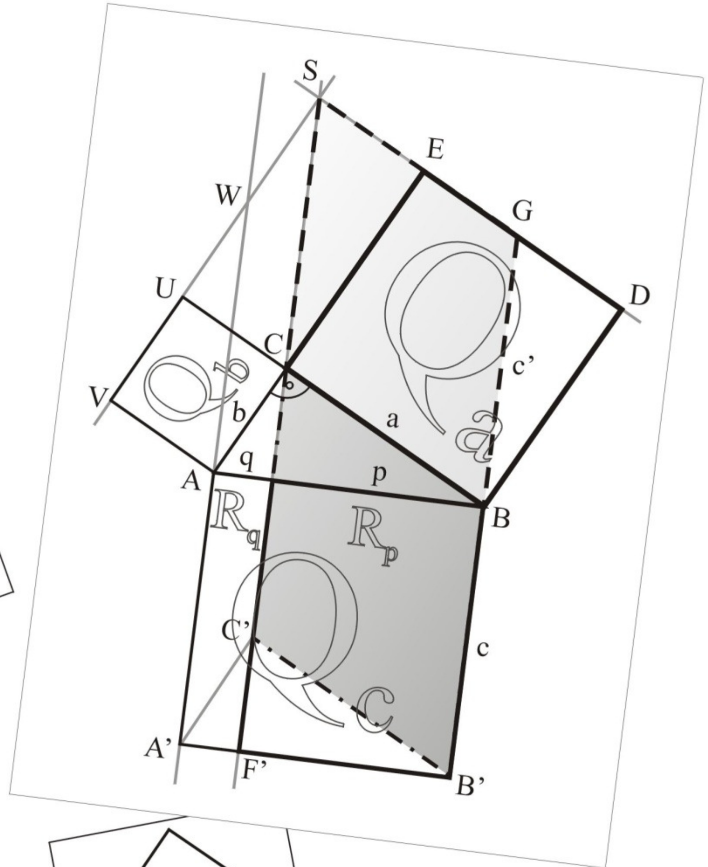
$F(P_{ACSW}) = F(P_{A'C'CA})$

$F(P_{A'C'CA}) = F(R_q)$

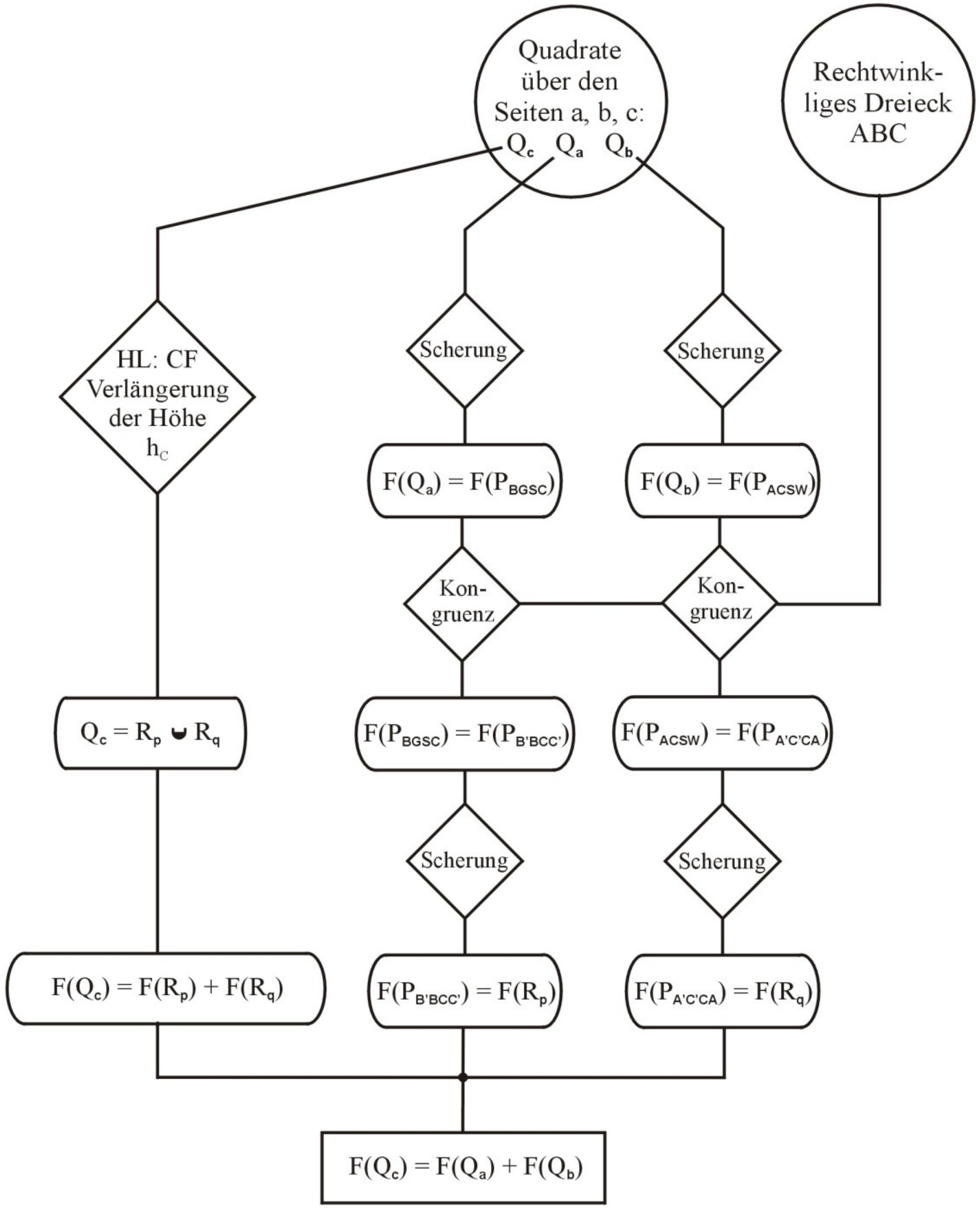
$F(Q_c) = F(Q_a) + F(Q_b)$

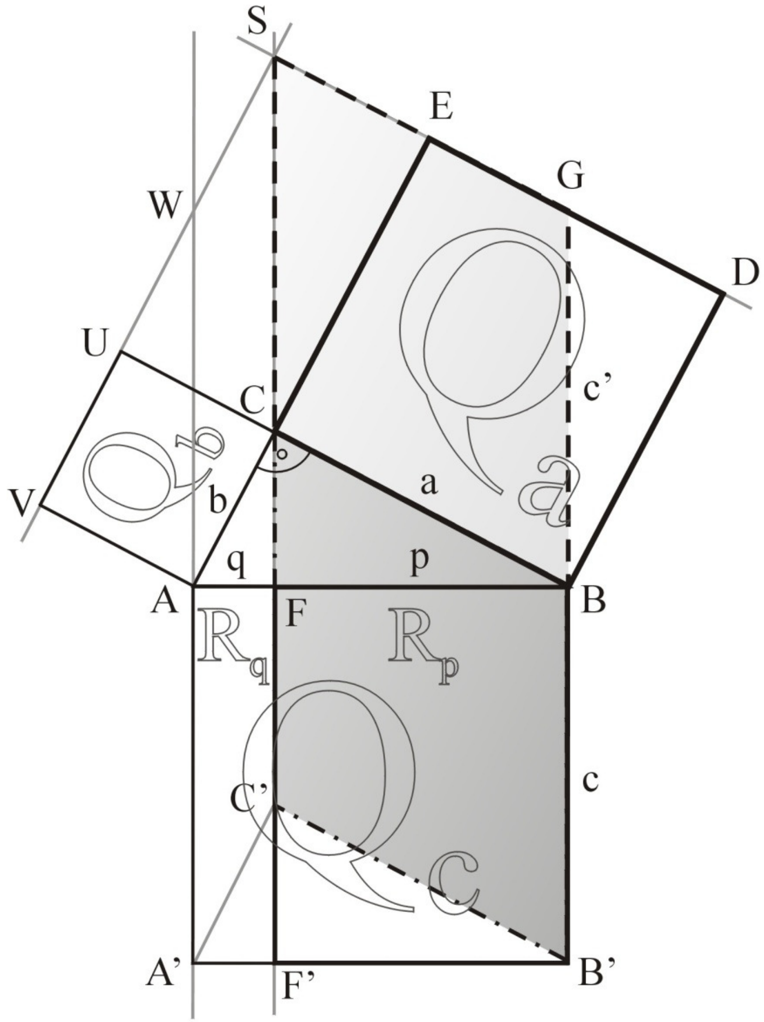
$F(P_{B'BCC'}) = F(R_p)$

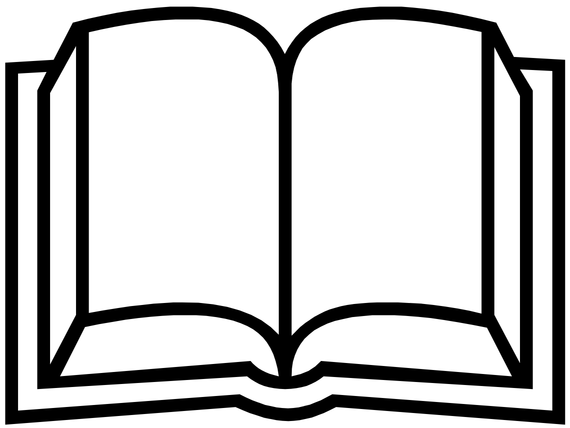
Quadrate über den Seiten a, b, c: Q_a Q_b Q_c



Beweisgraph zum Kathetensatz



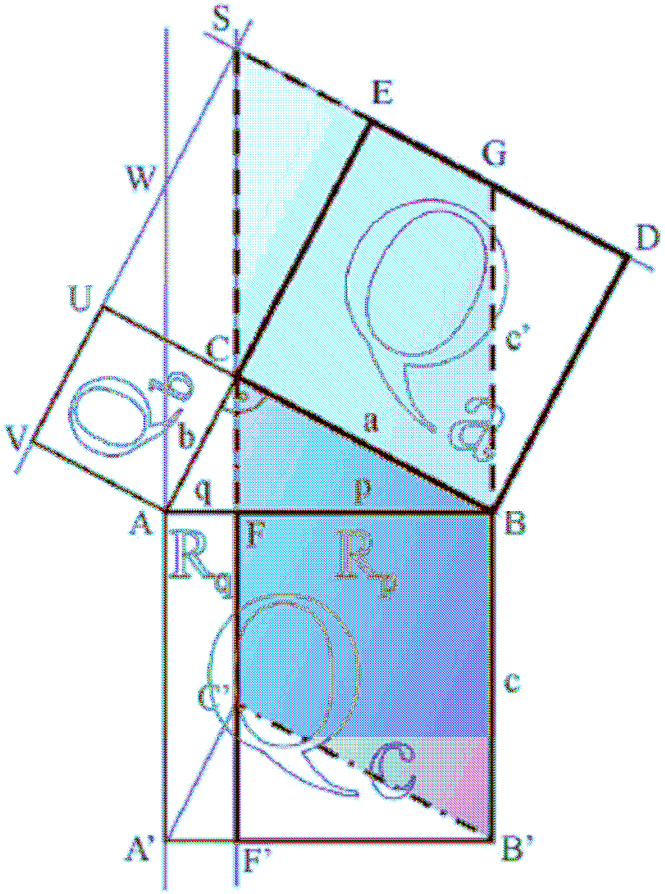




Phase 5:

Beweisdarstellung: *Niederschrift des vollständigen Beweises*

Skizze:



Zweispaltenbeweis für den Satz des Pythagoras

Voraussetzung: Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks

Behauptung: Die beiden Kathetenquadrate sind zusammen so groß wie das Hypotenusenquadrat: $F(Q_a) + F(Q_b) = F(Q_c)$

	Beweisschritt	**Begründung**
0	SF' ist die Verlängerung der Höhe h_C.	Hilfslinie
1	$F(R_p) + F(R_q) = F(Q_c)$	SF' teilt Q_c senkrecht in R_p und R_q.
2	$F(Q_a) = F(CBGS)$	Flächentreue der Scherung
3	$BC \parallel B'C'$	BCC'B' ist Scherparallelogramm
4	$\angle GBC \cong \angle BB'C'$	Stufenwinkel, 3
5	$\lvert BC \rvert = \lvert B'C' \rvert$	BCC'B' ist Scherparallelogramm
6	$\lvert c \rvert = \lvert c' \rvert$	Satz von C08 (Rechtwinkligkeit)
7	$CBGS \cong BCC'B'$	sws für Parallelogramme, 4, 5, 6
8	$F(CBGS) = F(BCC'B')$	7, Kongruenzeigenschaft
9	$F(BCC'B') = F(R_p)$	Flächentreue der Scherung
10	$F(Q_a) = F(R_p)$	2, 8, 9 (Translation)
11	$F(Q_b) = F(R_q)$	1 bis 10 analog für den linken Figurteil
12	$F(Q_a) + F(Q_b) = F(Q_c)$	1, 10, 11 q.e.d.

HeuRekAP

Rekonstruktionschritt 2c
(Heurismen)
Schritte möglichst selber findbar machen

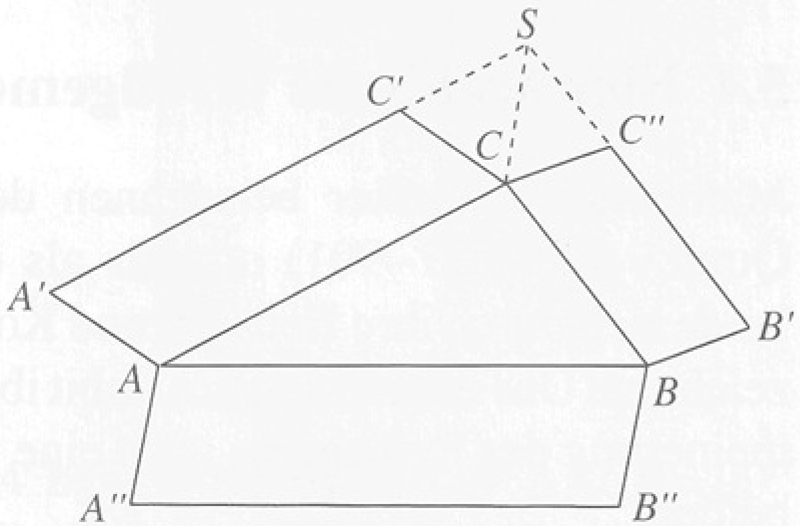
Genetische Rekonstruktion

Einige Gedanken, die ich mir über die Anfänge der Geometrie gemacht habe, ließen mich hoffen, diese Unannehmlichkeiten zu vermeiden, und zwar durch die Verbindung der beiden Vorzüge, die Anfänger zu interessieren und sie zu belehren. Ich habe mir gedacht, daß diese Wissenschaft, wie alle anderen auch, sich **Schritt für Schritt** formiert haben muß; daß wahrscheinlich aus einem gewissen **Bedürfnis** heraus die ersten Schritte unternommen wurden, und daß diese Schritte für Anfänger **nicht zu hoch** sein könnten, weil es ja Anfänger waren, die sie zuerst gemacht haben.“

Clairaut (1775), Übersetzung durch Sander

Der Flächensatz von Pappus

ABC ist ein beliebiges Dreieck und ACC'A' bzw. BB'C''C sind beliebige Parallelogramme über den Seiten [AC] bzw. [BC]. Die Geraden A'C' und B'C'' schneiden sich in S. Wir zeichnen [AA''] und [BB''] parallel zu [SC] und gleich lang wie [SC]. Dann ist die Fläche des Parallelogramms AA''B''B gleich der Summe der Flächen der Parallelogramme ACC'A' und BB'C''C.



Baptist (1997), S. 137

Schatzsuche 1

§ 65. Der Flächensatz des Pappus.

1. Führe die in § 55, 1 beschriebene Schiebung $\mathfrak{s}$ eines Dreiecks in beliebiger (statt Seiten-)Richtung in der Ebene des Dreiecks durch. Vergleiche wieder die vor und nach der Schiebung unbedeckten Teilflächen des während der Bewegung überstrichenen Gebietes. (Fig. 129.)

2. Ersetze die Zeichnung durch ein Modell mit festen Stäben AA^- und BB^- und Gummibändern AB und A^-B^-. Wie mußt du die Gummibänder bewegen, damit sie die beiden Parallelogramme ACC^-A^- und BCC^-B^- einschließen?

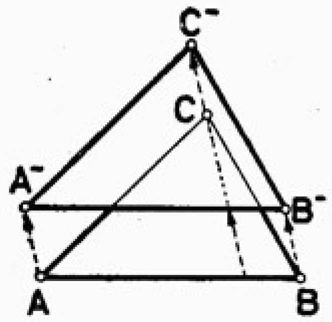


Fig. 129

Botsch (1956): Bewegungsgeometrie , S. 108

Schatzsuche 2

Eine Strecke beschreibt bei der Verschiebung längs zweier Seiten eines Dreiecks zwei Parallelogramme, deren Summe gleich dem Parallelogramm ist, das durch Verschiebung der Strecke längs der dritten Seite entsteht.

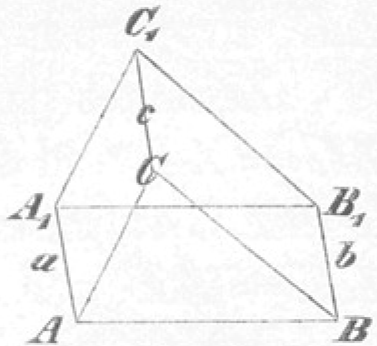


Fig. 166.

Henrici; Treutlein (1881), S. 278

Botsch bzw. *Henrici &Treutlein*:
Die (elementare) **Verschiebung** eines Dreiecks **erzeugt Flächen**.
Das gibt Anlass, über diese Flächen nachzudenken!

Schatzsuche 3

5. Verschere jedes der drei Parallelogramme beliebig in Richtung der Dreiecksseiten und klappe dabei zur besseren Übersichtlichkeit das Parallelogramm längs AB um AB um. (Fig. 134.) Welche Bedingung müssen die Parallelogramme erfüllen, damit die Fläche des einen gleich der Summe der Flächen der beiden anderen ist?

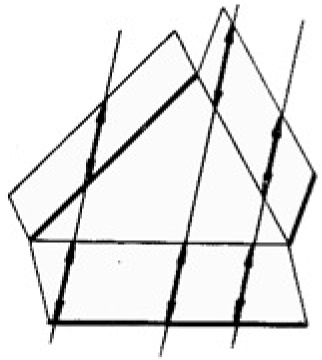


Fig. 134

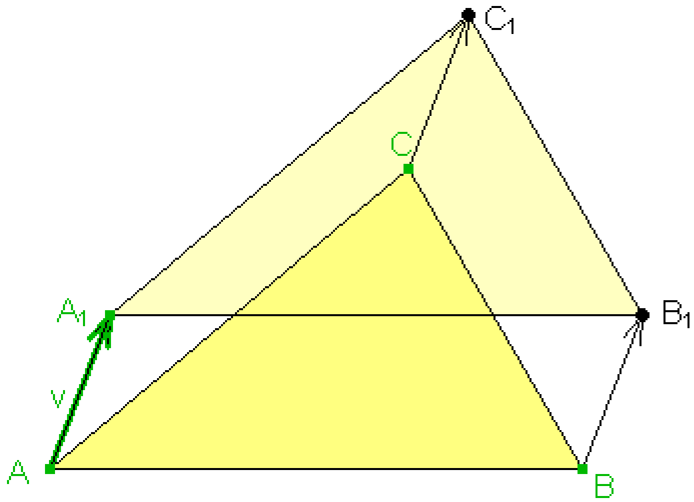
Flächensatz des Pappus.

Errichtet man über den drei Seiten eines Dreiecks Parallelogramme, die von einer Parallelenschar gleiche Strecken abschneiden, so ist die Flächensumme derjenigen beiden Parallelogramme, die keine gemeinsamen Schnittgeraden der Parallelenschar besitzen, gleich der Fläche des dritten Parallelogramms.

Botsch (1956): Bewegungsgeometrie, S. 108

Bitte Arbeitsblätter in der angegebenen Reihenfolge öffnen:

pappus-0. geo, pappus-1. geo
pappus-2. geo
pappus-3. geo
pappus-graphien. geo

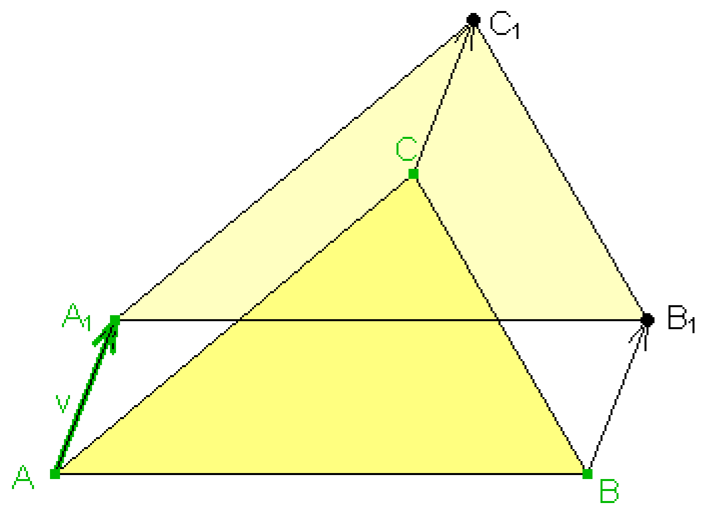


Die rekonstruierte Unterrichtseinheit

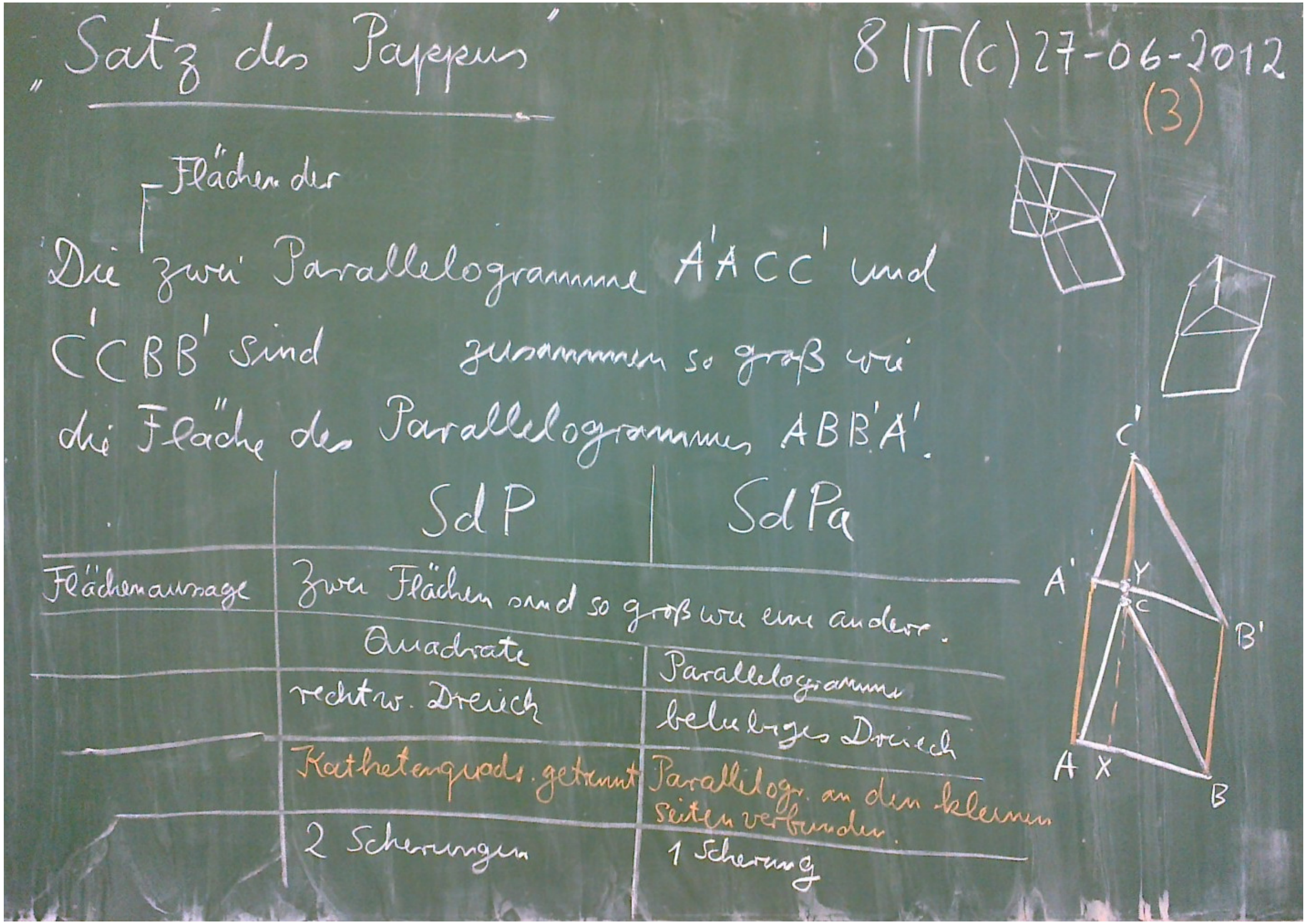
a) „Pappus“ dynamisch entdecken

EiWos 1 - Arbeitssauftrag:
Dreieck ABC wird um ***v*** verschoben. Welche Vierecke entstehen?

(Idee: H.-J. Elschenbroich nach O. Botsch (1956))



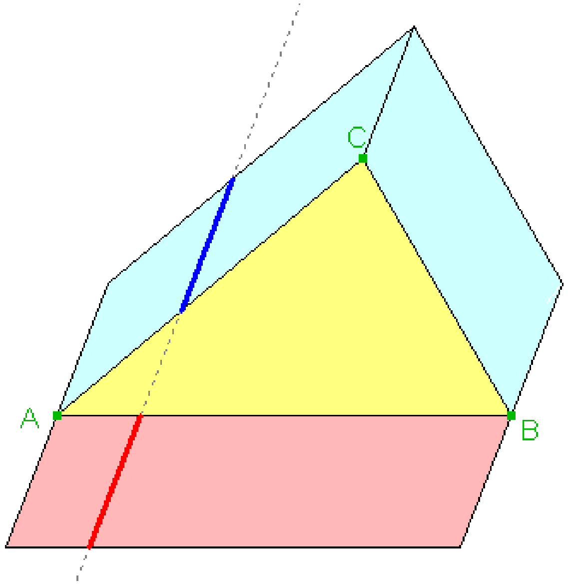
a) „Pappus“ dynamisch entdecken



- Tafelbild als Ergebnissicherung.der EiWos-Bearbeitung

b) Beweisidee dynamisch entdecken

Pappus:
Verschiebungs-
fall

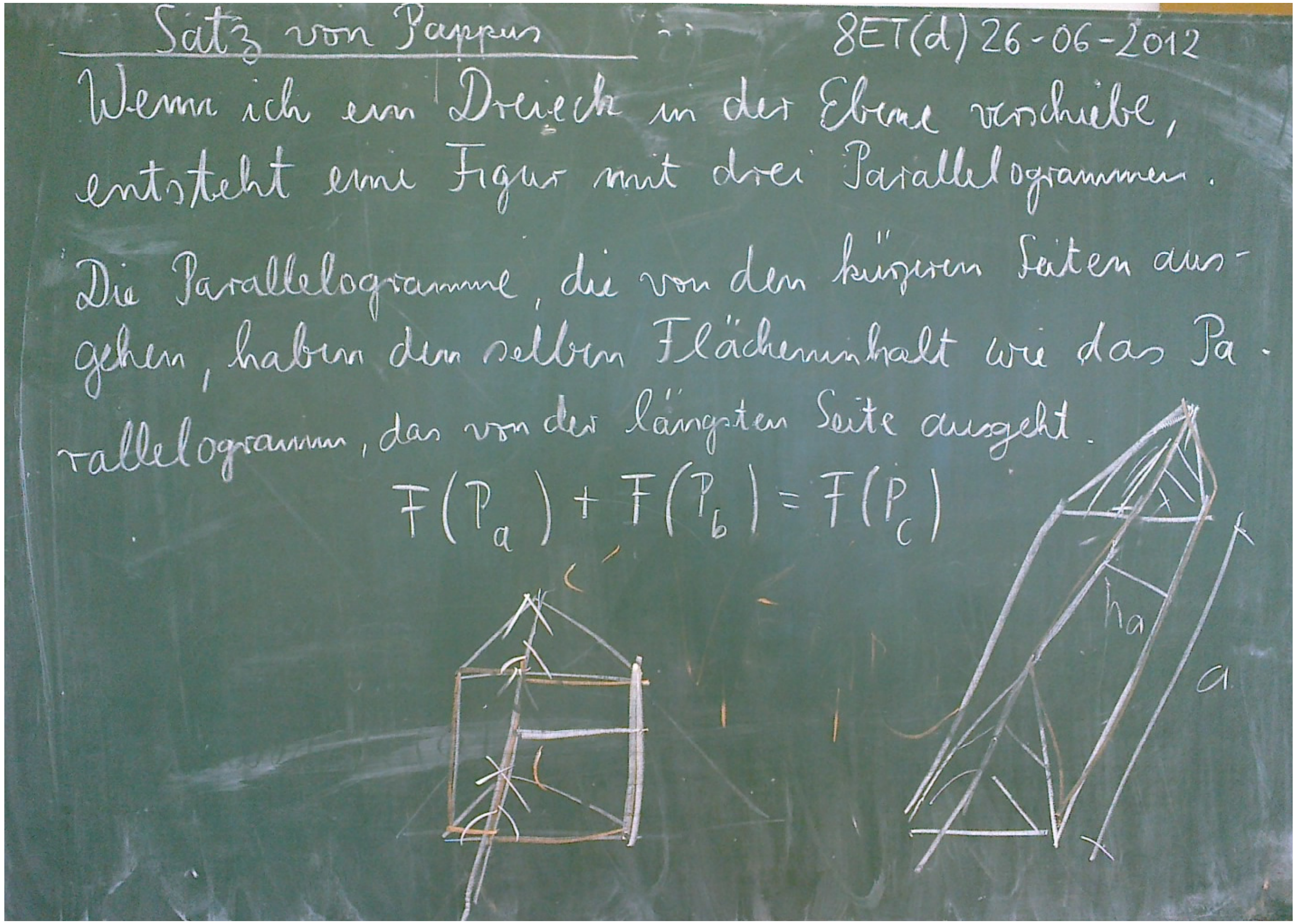


EiWos 2
Die beiden ‚blauen' Parallelogramme über der kürzeren Seiten sind zusammen so groß wie das ‚rote' Parallelogramm über der längeren Seite. Warum ist das so?

Elschenbroich: Visuell-dynamischer Beweis mit einer ***Cavalieri***-Argumentation.
HeuRekAP: Euklidischer Beweis mittels Scherung

Rekonstruktionschritt 2a (Teilziele)
Schritt wird mit diesem Hilfsmittel selbständig durchführbar (siehe Unterricht!)

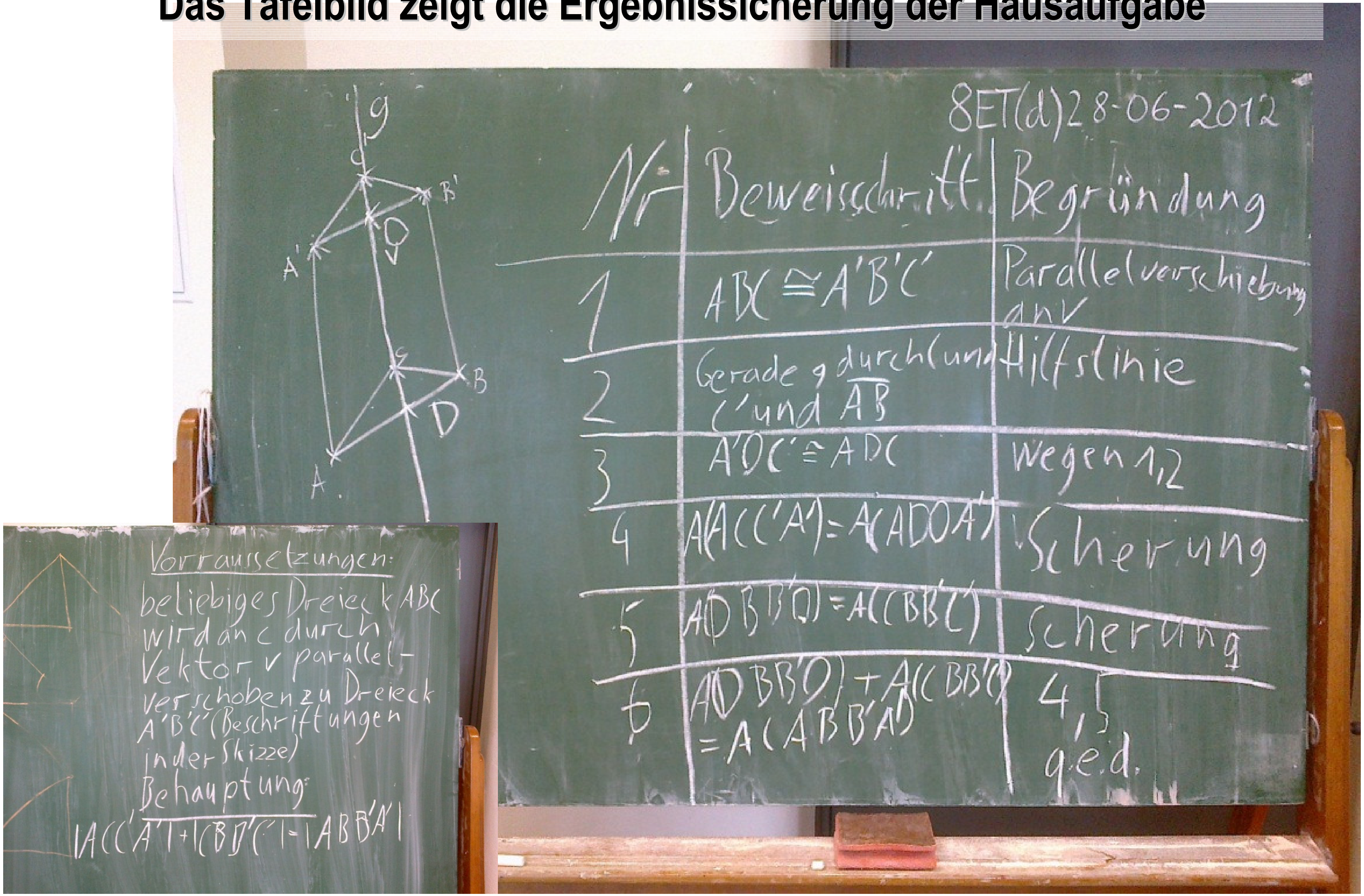
b) Beweisidee dynamisch entdecken



- Tafelbild als Ergebnissicherung.der EiWos-Bearbeitung
- Impuls zur Beweisfindung: „Wie könnte der Lösungsgraph für den Beweis aussehen?“
- SuS formulieren analog zum SdP die Ideen (Flächenteilung paarweise Scherung).
- **HA:** Zweispaltenbeweis zum SdPa

HA: Beweisdarstellung

Das Tafelbild zeigt die Ergebnissicherung der Hausaufgabe



Vereinfachung der Lösung im UG

Satz des Pappus

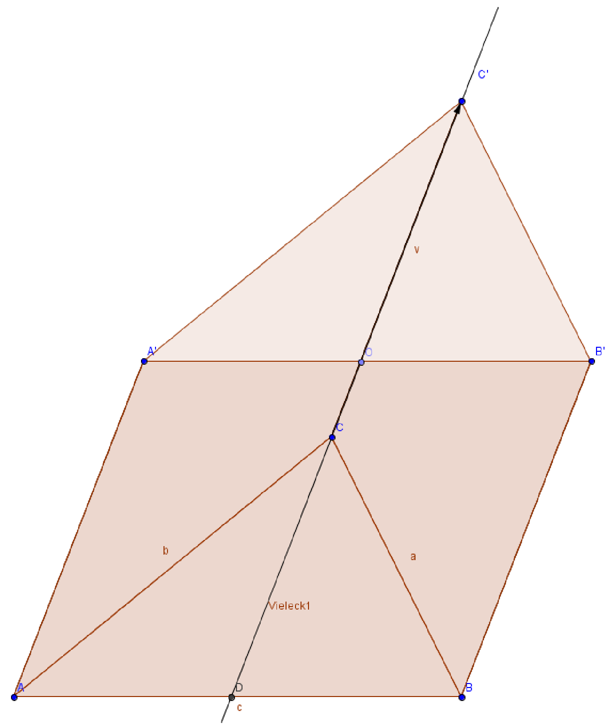
Voraussetzungen:

Dreieck ABC wird an C, durch Vektor v parallelverschoben und bildet Dreieck A’B’C‘

Behauptung:

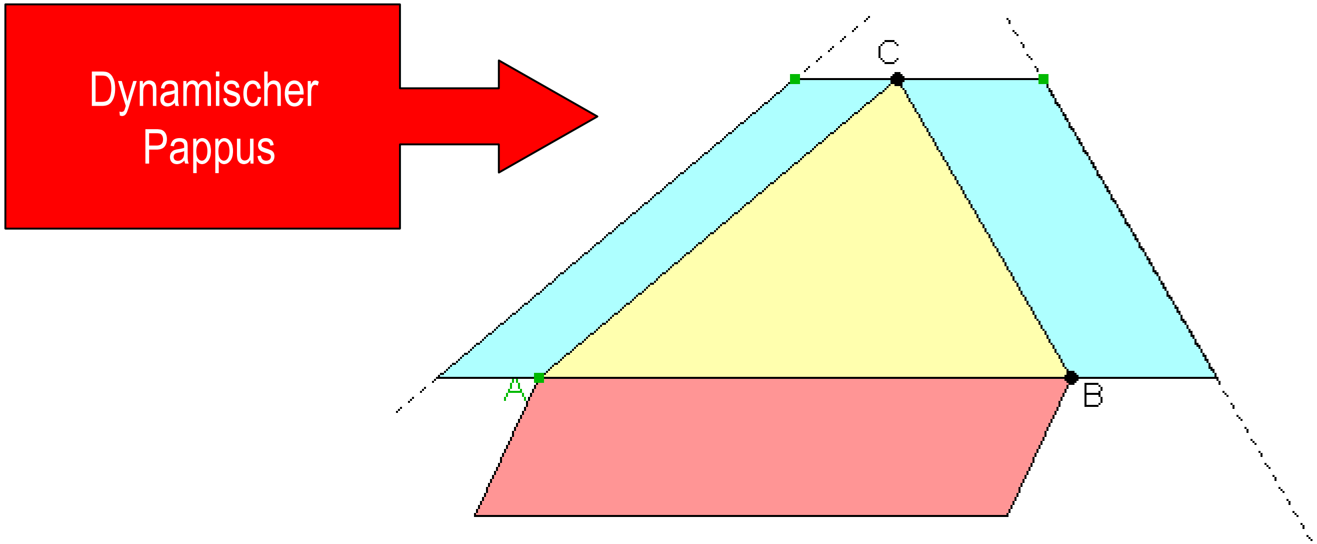
ACC’A‘ und CBB’C‘ haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie ABB’A‘

Skizze:



Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	ABC ist kongruent zu A’B’C‘	Parallelverschiebung an Vektor v
2	ACC’A ist schergleich mit ADOA‘	AOC‘ ist kongruent zu ADC, wegen 1
3	DBB’O ist schergleich zu CBB‘C	DBC ist kongruent zu OB’C‘, wegen 1
4	DBB’O und ACC’A haben zusammen den selben Flächeninhalt wie ABB’A‘	Wegen 2,3,1

c) „Pappus“ dynamisch verallgemeinern



EiWos 3

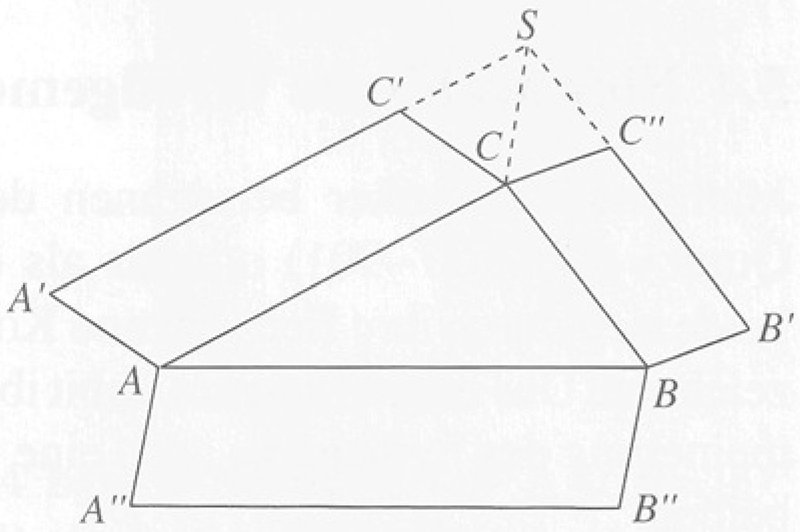
Erkundung: Die Parallelogramme lassen sich bei einer Pappus-Figur flächenerhaltend scheren und besondere Lagen erzeugen.

Dabei werden die zunächst zusammenhängenden Parallelogramme getrennt. Wie beschreibt man die Lagebeziehung eines Paralellogramm-Tripels, für das die Flächenaussage gilt?

Statischer Pappus

d) Der Flächensatz von Pappus

ABC ist ein beliebiges Dreieck und ACC'A' bzw. BB'C"C sind beliebige Parallelogramme über den Seiten [AC] bzw. [BC]. Die Geraden A'C' und B'C" schneiden sich in S. Wir zeichnen [AA"] und [BB"] parallel zu [SC] und gleich lang wie [SC]. Dann ist die Fläche des Parallelogramms AA"B"B gleich der Summe der Flächen der Parallelogramme ACC'A' und BB'C"C.



Baptist (1997), S. 137

Forschungsfrage: Finden die SuS eine entsprechende Formulierung?

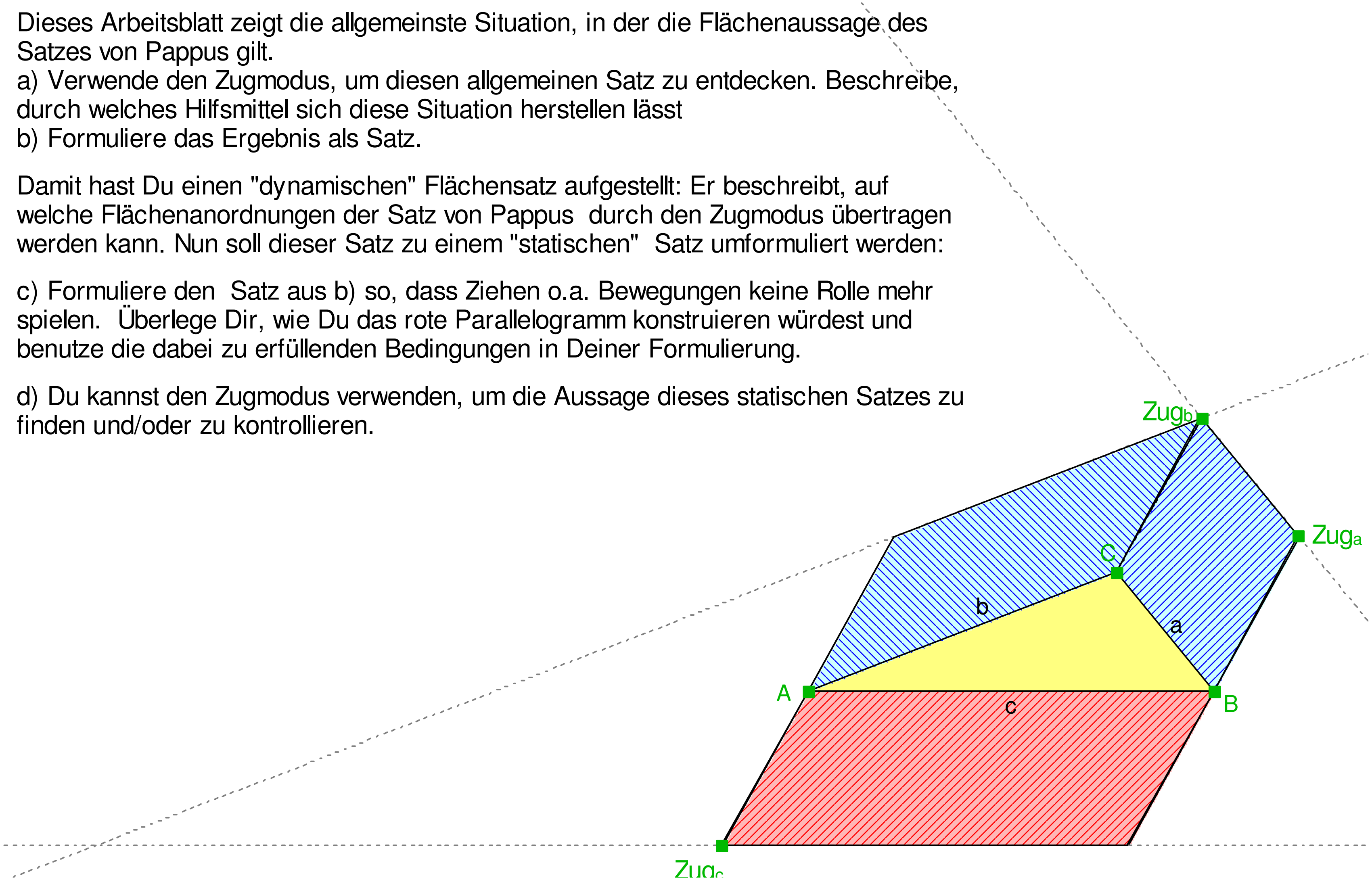
d) Satzfindung für den statischen Pappus

Dieses Arbeitsblatt zeigt die allgemeinste Situation, in der die Flächenaussage des Satzes von Pappus gilt.
a) Verwende den Zugmodus, um diesen allgemeinen Satz zu entdecken. Beschreibe, durch welches Hilfsmittel sich diese Situation herstellen lässt
b) Formuliere das Ergebnis als Satz.

Damit hast Du einen "dynamischen" Flächensatz aufgestellt: Er beschreibt, auf welche Flächenanordnungen der Satz von Pappus durch den Zugmodus übertragen werden kann. Nun soll dieser Satz zu einem "statischen" Satz umformuliert werden:

c) Formuliere den Satz aus b) so, dass Ziehen o.a. Bewegungen keine Rolle mehr spielen. Überlege Dir, wie Du das rote Parallelogramm konstruieren würdest und benutze die dabei zu erfüllenden Bedingungen in Deiner Formulierung.

d) Du kannst den Zugmodus verwenden, um die Aussage dieses statischen Satzes zu finden und/oder zu kontrollieren.



d) Der Flächensatz von Pappus (statisch)

D13 8d 04.07.2012

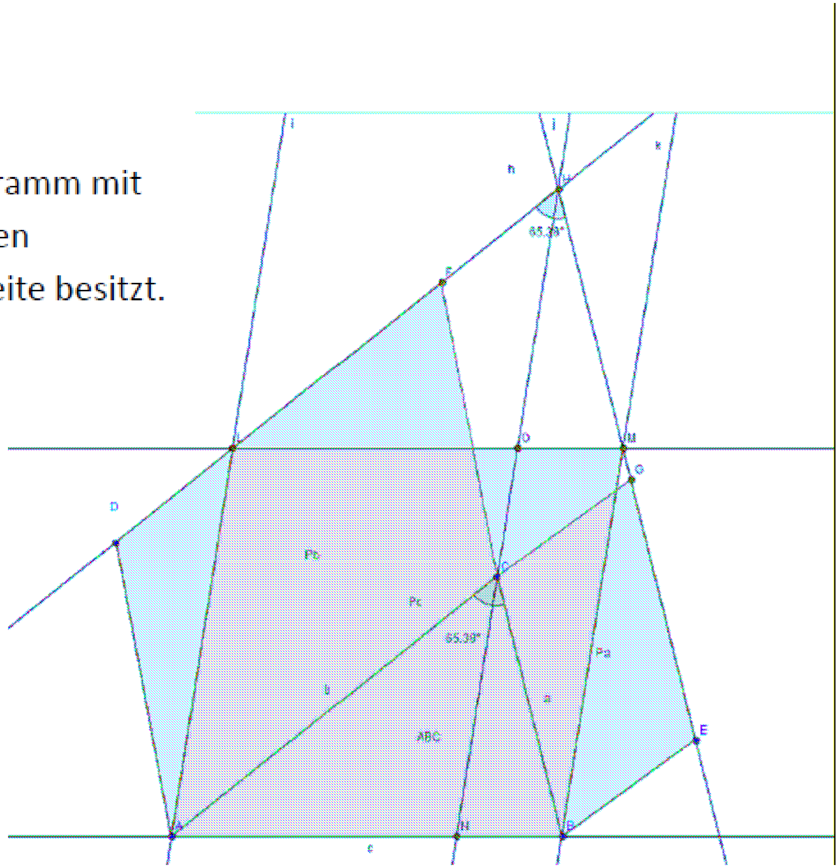
Satz des Pappus – statischer Beweis

<u>Voraussetzungen:</u>

Gegeben sei ein gewöhnliches Dreieck ABC mit beliebigen Parallelogrammen über den beiden kürzeren Seiten a und b, genannt P_a und P_b. (weitere Bezeichnungen siehe Skizze)

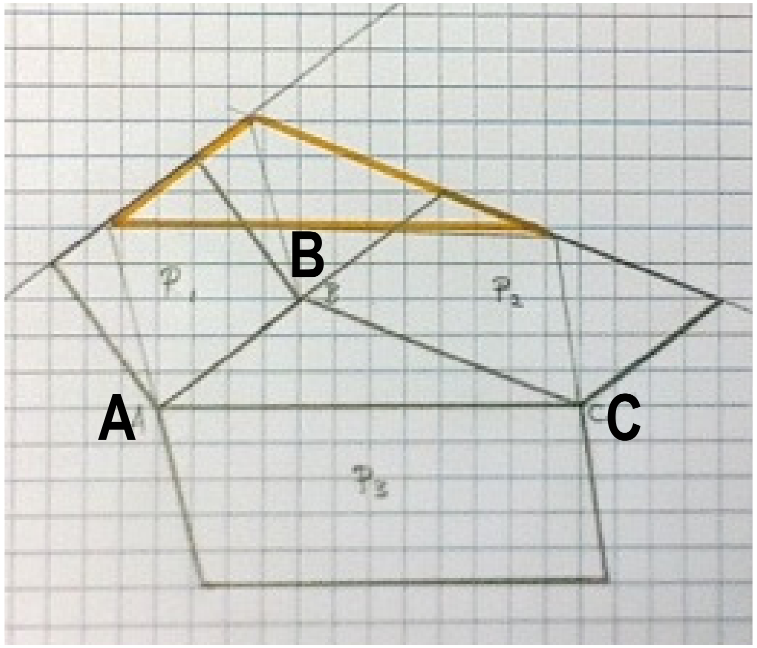
<u>Behauptung:</u>

Es ist möglich durch geometrische Konstruktionen ein Parallelogramm mit gleichem Flächeninhalt beider Parallelogramme über den kürzeren Dreiecksseiten zu finden, welches als Seite die längste Dreiecksseite besitzt.



d) Der Flächensatz von Pappus (statisch)

“Wir haben uns eben überlegt, wie wir aus dem Parallelogramm 1 und dem Parallelogramm 2 das Parallelogramm 3 herausfinden und dann hab’ ich mir so überlegt, dass ich erst [...] zwei Parallelen zu BC und zu AB mache und dann hab’ ich geguckt, wo diese Parallelen sich schneiden an dem Punkt und dann hab ich das Parallelogramm 1 so weit hochgeschert, bis dieser obere Punkt zu diesem Schneidepunkt der beiden Parallelen kommt und das hab ich bei Parallelogramm 2 auch so gemacht. Und dann hab ich halt gesehen, wo sich die Scherungsseite mit der Parallelseite schneidet an diesem Punkt und auf der anderen Seite auch und dann ist mir aufgefallen, dass diese orangene Seite genauso lang ist wie AC und dann hab ich aber diesen Abstand dieser Scherung auf beiden Seiten und dann muss ich das nur noch herunterklappen dieses Parallelogramm und dann komm’ ich auf Parallelogramm 3.”



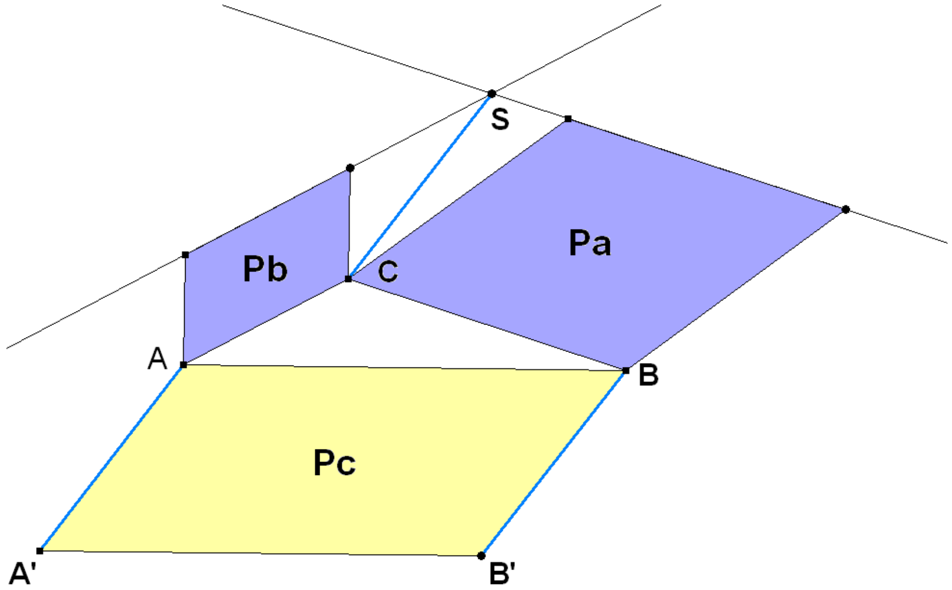
C36, Lerntagebuch und Transkript

Ergebnissicherung

Satz („Statischer Pappus“)

Voraussetzung: *Gegeben sind ein Dreieck ABC und Parallelogramme Pa, Pb und Pc = AA‘B‘B über den Seiten. Die Verlängerung der Außenkanten von Pa und Pb schneiden sich in S. Die Strecke* $\overline{AA'}$ *und die Strecke* $\overline{BB'}$ *sind beide parallel zu und gleichlang wie* $\overline{SC}$.

Behauptung: *F(Pc) = F(Pa)+F(Pb)*



Hausaufgabe: Konstruiere zu gegebenem Pa und Pb zwei Möglichkeiten für Pc, so dass *F(Pc)=F(Pa)+F(Pb)* gilt. Eine davon soll ein Rechteck sein.

Rückschau: Verallgemeinern als Umstrukturieren des Beweisgraphs