

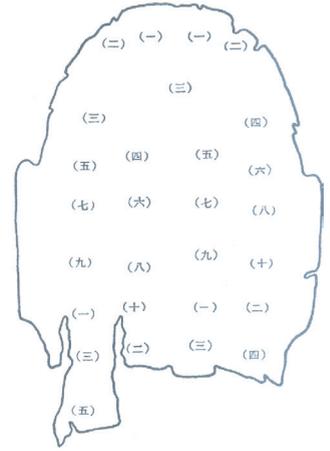
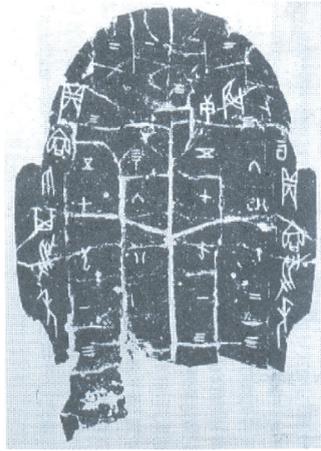
中国科学技术史

数学卷

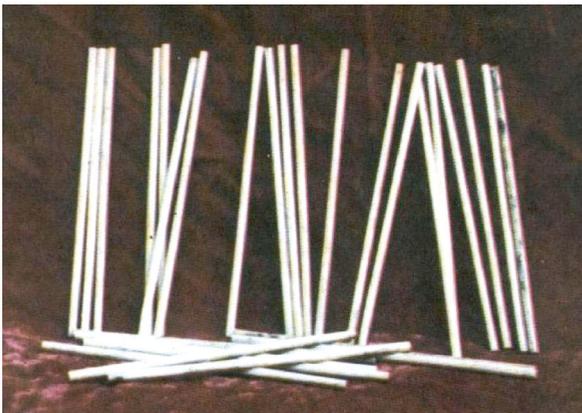
科学出版社



新疆阿斯塔那唐墓出土的彩帛
伏羲女娲持规矩图



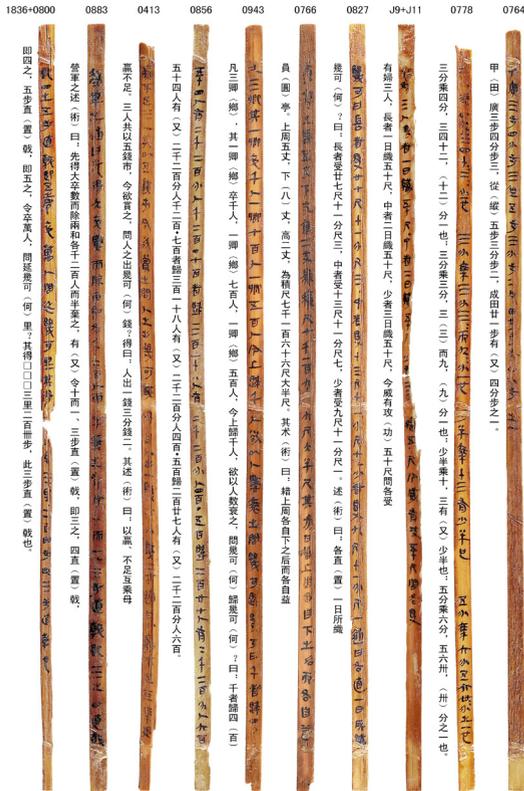
刻有数字的甲骨及其释文



陕西旬阳出土的西汉算筹



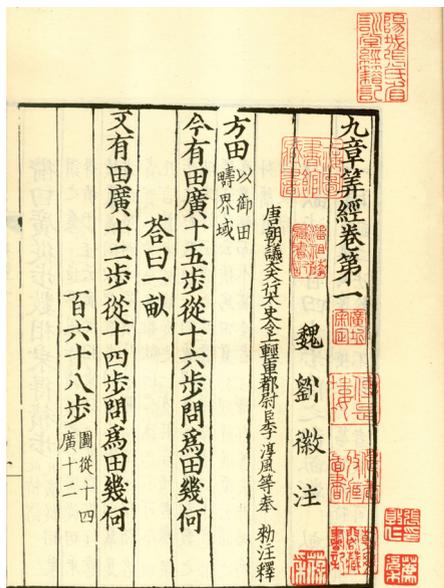
湖南里耶出土的秦九九表



秦简《数》的部分简（岳麓书院供图）



汉简《算数书》的部分简
(左起第6枚简背面有“算数书”三字)

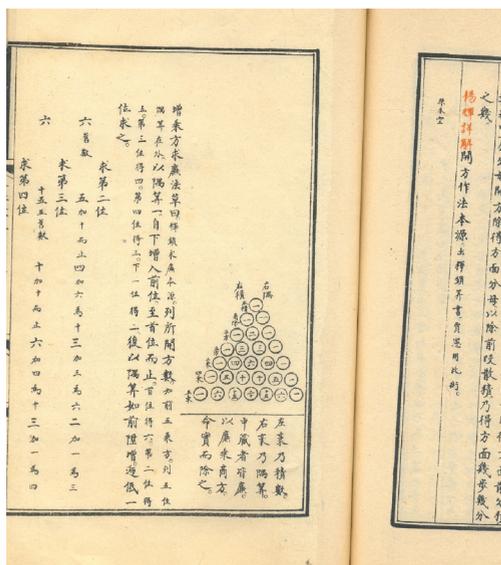


《九章算术》卷一书影（南宋本）

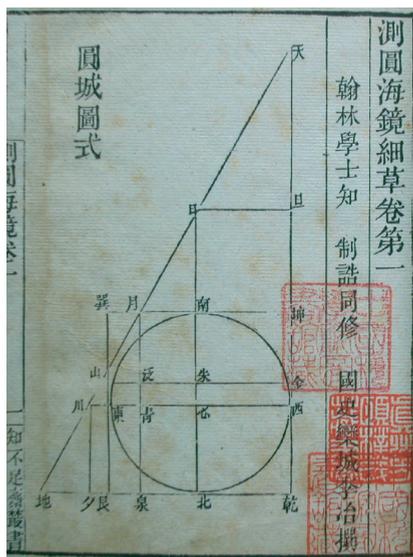
窥望海岛图（采自康熙本《算法统宗》卷十二）



现存汉唐六部算经南宋本书影



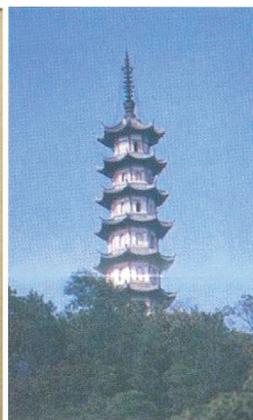
贾宪三角（《永乐大典》卷 16344）

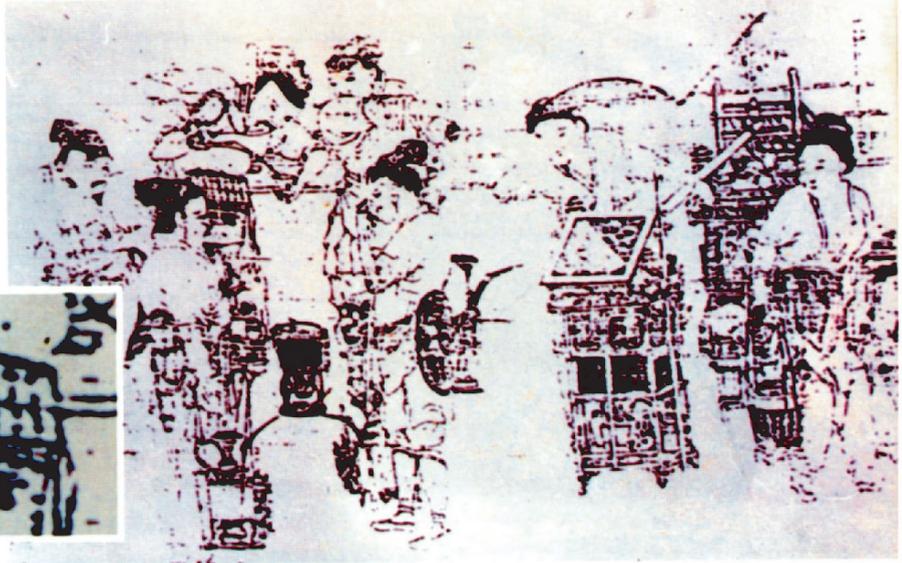


李治圆城图式（《知不足斋丛书》本《测圆海镜》卷首）

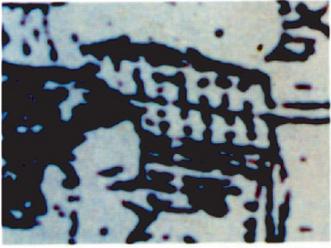


秦九韶《数书九章》望塔图（《宜稼堂丛书》本）和原型浙江湖州多宝塔

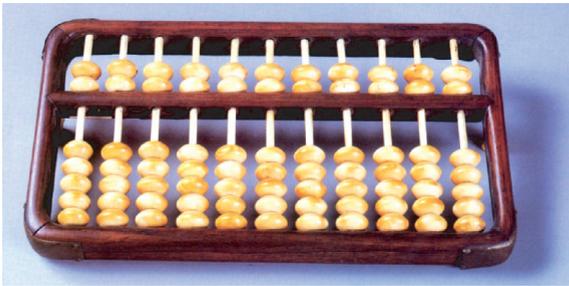




局部放大图



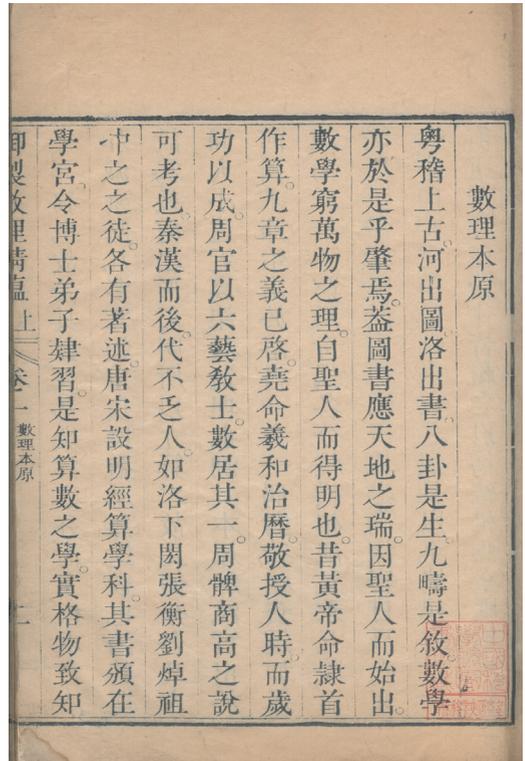
载有珠算盘的南宋茗园赌市图



明玉珠算盘



李善兰（居中坐者）与他的学生们



《数理精蕴》书影（清内府刊本）

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

卢嘉锡 总主编

中国科学技术史

数学卷

郭书春 主 编
李兆华 副主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

数学是中国古代最为发达的基础科学学科之一，约公元前3世纪至公元14世纪初领先于世界先进水平。中国传统数学是当时世界数学发展的主流。中国传统数学的思想和方法既可用于现今的中小学数学教学，也对当前的数学研究有某些启迪作用。

本书根据对原始文献的深刻研究，以重新划分的中国数学发展各阶段为序，试图系统论述远古至清末中国数学的主要成就、思想、理论贡献以及重要的数学典籍、杰出的数学家，并探讨其产生的社会经济、政治、思想和文化背景，是对截止到21世纪初中国数学史研究成果的最新全面总结。

本书既是数学史专业工作者的参考读物，也适合从事数学、历史、文化、教育工作的各界人士和爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

中国科学技术史·数学卷 / 郭书春主编. —北京: 科学出版社, 2010. 10

ISBN 978-7-03-029053-3

I. ①中… II. ①郭… III. ①自然科学史—中国②数学史—中国
IV. ①N092

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第186512号

责任编辑: 胡升华 孔国平 张 凡 卜 新 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年10月第 一 版 开本: 16

2010年10月第一次印刷 印张: 55 3/4 插页: 2

印数: 1—2 500 字数: 1 400 000

定价: 168.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《中国科学技术史》的组织机构和人员

顾问 (以姓氏笔画为序)

王大珩	王佛松	王振铎	王绶琯	白寿彝	孙 枢	孙鸿烈	师昌绪
吴文俊	汪德昭	严东生	杜石然	余志华	张存浩	张含英	武 衡
周光召	柯 俊	胡启恒	胡道静	侯仁之	俞伟超	席泽宗	涂光炽
袁翰青	徐莘芳	徐冠仁	钱三强	钱文藻	钱伟长	钱临照	梁家勉
黄汲清	章 综	曾世英	蒋顺学	路甬祥	谭其骧		

总主编 卢嘉锡

编委会委员 (以姓氏笔画为序)

马素卿	王兆春	王渝生	孔国平	艾素珍	丘光明	刘 钝	华觉明
汪子春	汪前进	宋正海	陈美东	杜石然	杨文衡	杨 熿	李家治
李家明	吴瑰琦	陆敬严	罗桂环	周魁一	周嘉华	金秋鹏	范楚玉
姚平录	柯 俊	赵匡华	赵承泽	姜丽蓉	席龙飞	席泽宗	郭书春
郭湖生	谈德颜	唐锡仁	唐寰澄	梅汝莉	韩 琦	董恺忱	傅熹年
廖育群	潘吉星	薄树人	戴念祖				

常务编委会

主 任 陈美东

委 员 (以姓氏笔画为序)

华觉明 杜石然 金秋鹏 赵匡华 唐锡仁 潘吉星 薄树人 戴念祖

编撰办公室

主 任 金秋鹏

副 主 任 周嘉华 杨文衡 廖育群

工作人员 (以姓氏笔画为序)

王扬宗 陈 晖 郑俊祥 徐凤先 康小青 曾雄生

《数学卷》编委会

主 编 郭书春

副主编 李兆华

编 委 (以姓氏汉语拼音为序)

邸利会 冯立昇 傅祚华 高红成 郭金海

郭世荣 郭书春 韩 琦 侯 钢 纪志刚

孔国平 李兆华 吕兴焕 田 淼 汪晓勤

王渝生 徐泽林 张 棋 张 升 邹大海

总 序

中国有悠久的历史 and 灿烂的文化,是世界文明不可或缺的组成部分,为世界文明做出了重要的贡献,这已是世所公认的事实。

科学技术是人类文明的重要组成部分,是支撑文明大厦的主要基干,是推动文明发展的重要动力,古今中外莫不如此。如果说中国古代文明是一棵根深叶茂的参天大树,中国古代的科学技术便是缀满枝头的奇花异果,为中国古代文明增添斑斓的色彩和浓郁的芳香,又为世界科学技术园地增添了盎然生机。这是自上世纪末、本世纪初以来,中外许多学者用现代科学方法进行认真的研究之后,为我们描绘的一幅真切可信的景象。

中国古代科学技术蕴藏在汗牛充栋的典籍之中,凝聚于物化了的、丰富多姿的文物之中,融化在至今仍具有生命力的诸多科学技术活动之中,需要下一番发掘、整理、研究的功夫,才能揭示它的博大精深的真实面貌。为此,中国学者已经发表了数百种专著和万篇以上的论文,从不同学科领域和审视角度,对中国科学技术史作了大量的、精到的阐述。国外学者亦有佳作问世,其中英国李约瑟(J. Needham)博士穷毕生精力编著的《中国科学技术史》(拟出7卷34册),日本薮内清教授主编的一套中国科学技术史著作,均为宏篇巨著。关于中国科学技术史的研究,已是硕果累累,成为世界瞩目的研究领域。

中国科学技术史的研究,包涵一系列层面:科学技术的辉煌成就及其弱点;科学家、发明家的聪明才智、优秀品德及其局限性;科学技术的内部结构与体系特征;科学思想、科学方法以及科学技术政策、教育与管理的优劣成败;中外科学技术的接触、交流与融合;中外科学技术的比较;科学技术发生、发展的历史过程;科学技术与社会政治、经济、思想、文化之间的有机联系和相互作用;科学技术发展的规律性以及经验与教训,等等。总之,要回答下列一些问题:中国古代有过什么样的科学技术?其价值、作用与影响如何?又走过怎样的发展道路?在世界科学技术史中占有怎样的地位?为什么会这样,以及给我们什么样的启示?还要论述中国科学技术的来龙去脉,前因后果,展示一幅真实可靠、有血有肉、发人深思的历史画卷。

据我所知,编著一部系统、完整的中国科学技术史的大型著作,从本世纪50年代开始,就是中国科学技术史工作者的愿望与努力目标,但由于各种原因,未能如愿,以致在这一方面显然落后于国外同行。不过,中国学者对祖国科学技术史的研究不仅具有极大的热情与兴趣,而且是作为一项事业与无可推卸的社会责任,代代相承地进行着不懈的工作。他们从业余到专业,从少数人发展到数百人,从分散研究到有组织的活动,从个别学科到科学技术的各领域,逐次发展,日臻成熟,在资料积累、研究准备、人才培养和队伍建设等方面,奠定了深厚而又广大的基础。

20世纪80年代末,中国科学院自然科学史研究所审时度势,正式提出了由中国学者编著《中国科学技术史》的宏大计划,随即得到众多中国著名科学家的热情支持和大力推动,得到中国科学院领导的高度重视。经过充分的论证和筹划,1991年这项计划被正式列为中国科学院“八五”计划的重点课题,遂使中国学者的宿愿变为现实,指日可待。作为一名科技工作者,我对此感到由衷的高兴,并能为此尽绵薄之力,感到十分荣幸。

《中国科学技术史》计分 30 卷,每卷 60 至 100 万字不等,包括以下三类:

通史类(5 卷):

《通史卷》、《科学思想史卷》、《中外科学技术交流史卷》、《人物卷》、《科学技术教育、机构与管理卷》。

分科专史类(19 卷):

《数学卷》、《物理学卷》、《化学卷》、《天文学卷》、《地学卷》、《生物学卷》、《农学卷》、《医学卷》、《水利卷》、《机械卷》、《建筑卷》、《桥梁技术卷》、《矿冶卷》、《纺织卷》、《陶瓷卷》、《造纸与印刷卷》、《交通卷》、《军事科学技术卷》、《计量科学卷》。

工具书类(6 卷):

《科学技术史词典卷》、《科学技术史典籍概要卷》(一)、(二)、《科学技术史图录卷》、《科学技术年表卷》、《科学技术史论著索引卷》。

这是一项全面系统的、结构合理的重大学术工程。各卷分可独立成书,合可成为一个有机的整体。其中有综合概括的整体论述,有分门别类的纵深描写,有可供检索的基本素材,经纬交错,斐然成章。这是一项基础性的文化建设工程,可以弥补中国文化史研究的不足,具有重要的现实意义。

诚如李约瑟博士在 1988 年所说:“关于中国和中国文化在古代和中世纪科学、技术和医学史上的作用,在过去 30 年间,经历过一场名副其实的新知识和新理解的爆炸”(中译本李约瑟《中国科学技术史》作者序),而 1988 年至今的情形更是如此。在 20 世纪行将结束的时候,对所有这些知识和理解作一次新的归纳、总结与提高,理应是中国科学技术史工作者义不容辞的责任。应该说,我们在启动这项重大学术工程时,是处在很高的起点上,这既是十分有利的基础条件,同时也自然面对更高的社会期望,所以这是一项充满了机遇与挑战的工作。这是中国科学界的一大盛事,有著名科学家组成的顾问团为之出谋献策,有中国科学院自然科学史研究所和全国相关单位的专家通力合作,共襄盛举,同构华章,当不会辜负社会的期望。

中国古代科学技术是祖先留给我们的一份丰厚的科学遗产,它已经表明中国人在研究自然并用于造福人类方面,很早而且在相当长的时间内就已雄居于世界先进民族之林,这当然是值得我们自豪的巨大源泉,而近三百年来,中国科学技术落后于世界科学技术发展的潮流,这也是不可否认的事实,自然是值得我们深省的重大问题。理性地认识这部兴盛与衰落、成功与失败、精华与糟粕共存的中国科学技术发展史,引以为鉴,温故知新,既不陶醉于古代的辉煌,又不沉沦于近代的落伍,克服民族沙文主义和虚无主义,清醒地、满怀热情地弘扬我国优秀的科学技术传统,自觉地和主动地缩短同国际先进科学技术的差距,攀登世界科学技术的高峰,这些就是我们从中国科学技术史全面深入的回顾与反思中引出的正确结论。

许多人曾经预言说,即将来临的 21 世纪是太平洋的世纪。中国是太平洋区域的一个国家,为迎接未来世纪的挑战,中国人应该也有能力再创辉煌,包括在科学技术领域做出更大的贡献。我们真诚地希望这一预言成真,并为此贡献我们的力量。圆满地完成这部《中国科学技术史》的编著任务,正是我们为之尽心尽力的具体工作。

卢嘉锡

1996 年 10 月 20 日

前 言

数学是中国古代最为发达的基础科学学科之一，约公元前3世纪至公元14世纪初一直领先于世界先进水平。我们常将中国古代数学称为中国传统数学，它是这一期间世界数学发展的主流。本书试图全面系统论述自远古至清末中国数学的主要成就和数学思想、作为这些成就和思想载体的数学典籍、完成这些成就和典籍的杰出数学家以及产生这些成就和思想、创作这些典籍、造就这些数学家的社会经济、政治、思想和文化背景。

关于中国数学史研究的内容、方法和意义，许多著述已经有详尽、精辟的阐释^①，在此不再赘述。在这里，我们主要就中国数学史的分期、如何概括中国古代数学著作亦即中国古代是不是存在数学家的数学、中国古代数学有没有数学证明和数学理论，或者更进一步，中国古代有没有纯数学研究、中国传统数学的特征、中国传统数学属不属于世界数学发展的主流以及在研究中尊重原始文献等问题谈一些粗浅的看法。

—

关于中国数学史的分期，学术界有不同的看法。而且这些不同主要表现在自先秦至元中叶数学的分期上，因为对元中叶至明末中国传统数学的衰落、明末至清末中西数学的会通，大家大都遵从钱宝琮的观点，在学术界是没有争议的。关于先秦至元中叶数学的分期大体有以下几种：

李俨将其分成三个时期：先秦的数学称为上古期，两汉魏晋南北朝称为中古期，隋唐宋元称为近古期。^②后来又将其列入中古期。^③

日本数内清也将其分成三个时期：古代的数学（先秦）、《九章》的世界（两汉至魏），六朝至唐宋元的数学。^④

钱宝琮考虑数学的发展与当时的社会背景的关系，打破按王朝革鼎分期的方法，分成秦统一以前、秦统一以后到唐代中期、唐代中期到明末时期几个阶段。^⑤

李迪的分期相当细致，将中国传统数学分成两个时期六个阶段，这就是：中国传统数学的形成期（自远古至西汉末期），这一时期分成三个阶段：约公元前2000年以前为中国数学的“史前期”，约公元前2000~前221年为中国数学的“积累期”，从秦汉之际至西汉末期为中国数学发展史上的第一个高峰。中国传统数学的发展期（自东汉初期至元朝前期），这一时期也分成三个阶段：从约公元1世纪初期至8世纪初亦即东汉初至唐中叶为中国数学

① 钱宝琮主编，中国数学史·序，科学出版社，1964年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998年。李迪，中国数学史大系·总论。见：吴文俊主编，中国数学史大系·第一卷，北京师范大学出版社，1998年。

② 李俨，中国算学史，商务印书馆，1930年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第一卷，辽宁教育出版社，1998年。

③ 李俨，中国数学大纲，上、下册，科学出版社，1958年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第三卷，辽宁教育出版社，1998年。

④ [日]数内清，中国数学史，郑瑞明译，南宏图书公司，1984年。

⑤ 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964年。见：李俨钱宝琮科学史全集，第五卷，辽宁教育出版社，1998年。

的“理论期”，从公元8世纪初至11世纪初即唐中叶至北宋初期为中国数学的“滞缓期”，从11世纪初至14世纪初为中国数学的高峰期。此外，李迪将1304~1936年称为中国传统数学向西方数学的“过渡期”，这一时期被分成四个阶段：1304~1606年即元中叶至明朝后期为“珠算期”，1607~1760年左右即明朝末期至清朝中期为“融合期”，约1760~约1850年即清朝中后期之间为中国数学的“复古期”，约1850~1936年为“西化完成期”。^①

还有一些别的分期方法。

我们认为，钱宝琮的分期思想是可取的。数学史的分期应以数学内部的发展为主要依据，同时考虑相应时期的社会经济、政治的变革和思想、文化背景。我们根据钱宝琮的思想，结合近30年中国数学史的研究成果，对中国数学史的分期提出以下看法：

中国有文字记载的历史相当早，然而夏、商、周三代没有任何数学著作流传到现在。不过，完成当时世界上最方便的记数制度——十进位值制记数法，创造出当时世界上最先进的计算工具——算筹，是两项具有世界意义的成就。一些文史典籍中的鸿爪雪泥说明当时人们的数学知识已经达到相当高的水平。

《九章算术》在西汉先后由张苍、耿寿昌删补成书，它奠定了中国传统数学的基本框架，在分数四则运算、比例和比例分配算法、盈不足算法、开方法、线性方程组解法、正负数加减法则、解勾股形和勾股数组等方面走在世界的前面，有的超前其他文化传统数百年，甚至上千年，是当时世界上第一流的数学著作。人们不禁要问，《九章算术》这么高深的著作是突然冒出来的吗？当然不可能。根据刘徽《九章算术注序》“九数之流，《九章》是矣”的提示和《九章算术注》所提供的资料（包括物价）的分析，《九章算术》的主体部分及主要成就在春秋战国时期已经完成了。换言之，中国传统数学的第一个高潮出现在春秋战国，西汉完成《九章算术》、《周髀算经》等著作的编纂，只是这个高潮的总结。20世纪80年代出土的竹简《算数书》虽然不是《九章算术》的前身^②，却为上述看法提供了佐证。

因此，不能将春秋战国的数学与夏、商、西周混为一谈。它们应该是两个阶段。也就是说，从远古到夏、商、西周是第一个阶段，数学在某种意义上已经形成一个学科。而春秋战国秦汉是以《九章算术》为代表的第二个阶段。西汉末年至东汉末叶，数学进展不大。

东汉末年之后，一直到唐中叶，中国数学最主要的成就体现在刘徽《九章算术注》中。由于这是一部注解《九章算术》的著作，人们往往将其与《九章算术》归于一个阶段。实际上，刘徽《九章算术注》“析理以辞，解体用图”，提出了许多严格的数学定义，并以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章算术》的算法，奠定了中国传统数学的理论基础。他对圆面积公式和刘徽原理的证明在世界数学史上首次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明，其贡献主要是数学理论方面的。刘徽《九章算术注》无论是从数学的研究方向看，还是从理论高度、逻辑方法看，都与《九章算术》时代有明显的不同，应该属于另一个阶段。祖冲之父子的数学水平不会低于刘徽，可惜对他们的数学造诣，我们只知道只鳞片爪。此外，《数术记遗》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《缉古算经》等在计算工具的改进、不定方程解法、三次方程上有贡献。然而，隋唐数学明显落后于魏晋南北朝时期，对中国古代

① 李迪，中国数学史大系·总论，见：吴文俊主编，中国数学史大系·第一卷，北京师范大学出版社，1998年。

② 郭书春，关于《算数书》与《九章算术》的关系，曲阜师范大学学报，2008，34（3）：1~9。

水平最高的数学著作《缀术》，隋唐“学官莫能究其深奥，是故废而不理”^①，导致《缀术》失传。

自唐中叶起，人们简化乘除运算，创造各种口诀，导致珠算最迟在南宋诞生。北宋贾宪、刘益，南宋秦九韶、杨辉，金元李冶、朱世杰等在高次方程、高次方程组解法、一次同余方程组解法、垛积术和招差术等高深数学的许多分支取得了超前其他文化传统几个世纪的成果。这就是人们常说的宋元数学高潮。

元中叶到明末，继续改进筹算、珠算技术，珠算得到普及，并最终在明中叶之后取代筹算。除此之外，中国传统的高深数学急剧衰落。中国数学遂失去了世界领先的地位。

明末之后，西算传入中国，开始了中西数学融会贯通的阶段。这是学术界都知道的。

我们认为，数学的发展，既有数学内部的自身因素，也必然受社会经济、政治、思想和文化背景的制约。人类进入文明社会以来，世界数学研究的重心发生了几次大的变化。^②先是约公元前31世纪开始的尼罗河流域数学和约公元前24世纪开始的两河流域数学。自公元前7世纪起，希腊取代了上述地区，数学非常发达。约公元前3世纪至公元14世纪初，中国取代古希腊，成为世界数学研究的重心；公元8世纪之后，印度、阿拉伯地区的数学也发展起来。16~17世纪，欧洲数学伴随着文艺复兴，度过了中世纪的黑暗，进入变量数学时代。从此欧洲以及20世纪的苏联、美国一直占据着世界数学研究的重心位置。不难看出，世界数学的重心都发生在某一种社会形态最完备，经济、政治和思想文化最发达的地区。值得注意的是，中国传统数学发展的几个不同阶段，与当时社会经济、政治、思想和文化的变革亦即中国古代社会不同的发展阶段有某种对应关系。中国历史学界对中国古代历史的分期不管持什么观点，都认为，中国在春秋战国时期发生了领主制崩溃并向地主制过渡的激烈社会变革，思想界出现诸子林立、百家争鸣的活跃局面；东汉末至魏晋，庄园农奴制占据经济政治舞台的中心，思想界以谈“三玄”（《周易》、《老子》、《庄子》）为主的辩难之风取代了烦琐的两汉经学，中国社会进入一个新的阶段；唐中叶至宋初，庄园制逐步解体，土地可以自由买卖，地主阶级由按等级占田变成靠购买扩大土地占有，思想界也还比较宽松；元中叶之后，宗法地主制度走向没落，理学占据思想界的统治位置，思想禁锢严酷。两相对照，就会发现，在中国社会发生某种变革的初期，都给数学的发展带来新的活力，从而带来数学发展的高潮。而在某一个社会发展阶段的后期，数学不仅发展缓慢，甚至低于其前期，东汉、隋唐、元末至明末的数学就是这种情形。

由于这种原因，我们将中国古代数学的发展分成以下几个阶段：

中国数学的兴起——原始社会到西周时期的数学；中国传统数学框架的确立——春秋至东汉中期的数学；中国传统数学理论体系的完成——东汉末至唐中叶的数学；中国传统数学的高潮——唐中叶至元中叶的数学；传统数学主流的转变与珠算的发展——元中叶至明末数学；西方数学的传入与中西数学的融会——明末至清末的数学。

显然，这种分期方法是在钱宝琮基础上的修正。本书各编正是基于这种分期思想和方法设置的。本书除了论述各个阶段的数学成就和特点外，还力图探索各个时期数学的发展与当

^① 唐·李淳风，《隋书·律历志上》，见：魏征等，《隋书》，中华书局，1973年。

^② 郭书春，略谈世界数学重心的三次大转移，科学技术与辩证法，1986，（1）：44~48。又见：李文林，数学史教程，高等教育出版社，2000年，第366页。

时社会经济、政治、思想、文化的关系。

二

中国古代传统数学重视实际应用，以解决人们生产生活中产生的数学问题为主要目的，以数学理论密切联系实际为其特点。许多中国数学史著述进而将中国古代数学著作统统概括为“应用问题集”，特别将《九章算术》概括为“应用问题集”。实际上，这种概括不符合实际情况，因而并不恰当。不言而喻，“应用问题集”是以问题为中心的，而《九章算术》等著作的主体部分则是以术文为中心的。“应用问题集”这种不恰当的概括造成了许多误解。例如，许多没有读过《九章算术》或虽读过而不求甚解的人，误以为《九章算术》等中国古代所有的数学著作都是“一题、一答、一术”，其术文都是应用问题的具体解法，而不了解《九章算术》中许多术文是几道、十几道甚至是几十道题目的总术，大部分术文是非常抽象的、具有普适性的严谨算法。许多学者没有认真考察数学著作本身，而从“应用问题集”的片面概括出发，推想中国古代数学著作中的术文都是具体问题的演算细草。既然是演算细草，当然都是“一题、一答、一术”。甚至有的中国数学史著述将《九章算术》中明显属于几道题目的总术都说成是专属于某一题目的术文，并且以讹传讹，谬种流传。

实际上，中国传统数学著作之间的差别相当大。

第一，它们的体例不同。《九章算术》的主体部分是以术文为中心的，我们称之为术文（算法）统率例题的形式。在这里，术文是一类数学问题的普适性、抽象性算法，含有一道、几道、十几道甚至几十道例题，相当大的部分根本不是“一题、一答、一术”。而《孙子算经》等著作不仅是“一题、一答、一术”，而且术文都是应用问题的具体解法。

第二，它们的内容高深程度不同。《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》、《黄帝九章算经细草》、《数书九章》、《测圆海镜》、《详解九章算法》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》等是具有高深内容的著作，《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《杨辉算法》、《算法全能集》、《详明算法》、《九章算法比类大全》、《算学宝鉴》、《算法统宗》等是浅显的或普及性的著作。

第三，抽象程度不同。抽象性是数学的重要特点。中国古代数学著作的数学表达方式的抽象性也有分野。《九章算术》主体部分的术文大都是抽象性非常高的公式、算法，刘徽《九章算术注》、贾宪《黄帝九章算经细草》和杨辉《详解九章算法》等进一步抽象了《九章算术》抽象得不够的术文。《海岛算经》、《张丘建算经》、《缉古算经》、《杨辉算法》、《算学宝鉴》等的术文是关于一种数学问题的比较抽象的算法。《测圆海镜》卷一展示了全书所需的基本理论，其“圆城图式”用汉字记点，是个创举；其“识别杂记”提出 600 余条抽象命题，集中国勾股容圆知识大成；卷二在“洞渊九容”基础上以非常抽象的形式表示了勾股形与圆的十种基本关系。许多著作都有不同程度的抽象命题，而《九章算术》的一小部分以及《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《九章算法比类大全》、《算法统宗》等的术文大都是具体问题的演算细草。例如，《九章算术》和《孙子算经》都有开方术，前者是非常抽象的对任何开平方问题都适用的程序，而后者只是演算细草。

第四，严谨性不同。严谨性也是数学的一大特点，是数学著作的生命线。就算法的严谨程度而言，《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《缉古算经》、《夏侯

阳算经》、《黄帝九章算经细草》、《数书九章》、《测圆海镜》、《详解九章算法》、《杨辉算法》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》、《算学宝鉴》、《勾股算术》、《测圆海镜分类释术》、《弧矢算术》、《测圆算术》等都是算法严谨的著作。而《五曹算经》、《算法全能集》、《详明算法》、《九章算法比类大全》等错误比较多，甚至重复某些已被前人纠正了的错误……

此外，在是不是有数学推理和证明上，当然更是不同的。这在下面还要谈。

因此，起码从以上几个方面看，中国古代数学实际上存在着数学的学术研究与普及的分野。《九章算术》及其刘徽注、《海岛算经》、《黄帝九章算经细草》、《数书九章》、《测圆海镜》、《详解九章算法》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》、《算学宝鉴》、《勾股算术》、《测圆海镜分类释术》、《弧矢算术》、《测圆算术》等是数学的学术研究著作，而《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《算法全能集》、《九章算法比类大全》、《算法统宗》等是普及应用著作。

中国古代某些数学家实际上也发现了这一区别。刘徽在阐发了自己求“弧田密率”的方法之后说：“然于算数差繁，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳。”^① 寻究弧田密率，是学术研究；用来度田，是民间应用，用不到弧田密率。南宋初年的数学家荣棨说，当时的许多数学著作“或隐问答以欺众，或添歌彖以衒己。乖万世益人之心，为一时射利之具。以至真术淹废，伪本滋兴。学者泥于见闻，俛依然入于迷望，可胜计邪！居仁由义之士，每不平之”^②。金元大数学家李冶在批评了某些著作“惟恐学者得窥其仿佛”的错误倾向之后，接着说：“不然，则又以浅近粗俗无足观者，致使轩辕隶首之术，三五错综之妙，尽堕于市井沾沾之儿，及夫荒村下里蚩蚩之民，殊可悯悼。”^③ 荣棨、李冶这里所指责的，便是在宋元时期得到高度发展的筹算乘除捷算法，这当然是普及应用的数学。抛开荣棨、李冶等鄙视筹算乘除捷算法的错误态度不谈，显然在他们的头脑中，数学的学术研究与普及是泾渭分明的。至于就某一个数学家而言，到底是从事学术研究还是普及工作，得具体分析。像张苍、刘徽、祖冲之、王孝通、贾宪、李冶、秦九韶、顾应祥等这样的学者，当然是致力于数学的学术研究。也有一些数学家，如夔本《夏侯阳算经》的作者和唐中叶以后从事乘除简化运算的许多数学家以及丁巨、贾亨、安止斋、吴敬、程大位等，则主要关注数学知识的普及应用。但是，也有一些数学家，如杨辉、朱世杰、王文素等，则在这两方面都做了杰出的工作。

三

与“中国古代数学著作都是应用问题集”这一不恰当的概括相联系，国内外数学界和学术界，包括对中国古代数学成就十分推崇的学者在内，多认为“在古代中国的数学思想中，最大的缺点是缺少严格求证的思想”，中国古代数学没有形式逻辑，尤其没有演绎逻辑

^① 魏·刘徽，九章算术注·方田章。见：郭书春，汇校《九章算术》增补版，辽宁教育出版社，台湾九章出版社，2004年。

^② 南宋·荣棨，九章算经序，见：《详解九章算法》、《诸家算法及序记》。见：郭书春，汇校《九章算术》增补版附，辽宁教育出版社，台湾九章出版社，2004年。

^③ 元·李冶，益古演段自序，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第一册，河南教育出版社，1993年。

辑。“在从实践到纯知识领域的飞跃中，中国数学是未曾参与过的”^①，所谓成就都是经验的积累，没有推理和证明。总之，没有数学理论。这种看法是不符合实际情况的。数学理论主要有两个方面：首先是具有普适性、抽象性的正确算法。其次是关于这些算法的推理和论证以及数学定义，并且其推理和论证主要是演绎的。对前者，前已指出，在《九章算术》等著作中有大量关于一类数学问题的具有正确性、普适性和抽象性的术文，这本身就是数学理论。许多学者没有认真考察数学著作本身，而“应用问题集”的概括造成中国古代所有术文都是具体问题的演算细草的错觉，从而“顺理成章”地得出“中国古代数学没有理论”的错误看法。对后者，确实，《九章算术》等大多数中国古代数学著作都没有数学定义、推理和论证。然而，这不是中国古代数学著作的全部，只是其中一部分，尽管是大部分。即使是以大部取代全部，也是一种以偏概全，当然是不恰当的。事实上，刘徽的《九章算术注》和贾宪的《黄帝九章算经细草》、李冶的《测圆海镜》和《益古演段》、杨辉的《详解九章算法》和《杨辉算法》、王文素的《算学宝鉴》等都有不同程度的定义、推理和论证。

李约瑟已经指出，杨辉有演绎推理的倾向。^②实际上，刘徽《九章算术注》中的演绎推理和数学证明比杨辉高明得多，深刻得多。我们经过考察发现，现今形式逻辑教程中关于演绎推理的几种主要形式，刘徽都娴熟地使用过，而且没有任何循环推理。刘徽的数学证明是相当严谨的。说中国古代数学没有演绎逻辑，大约是没有读或者没有读懂刘徽的《九章算术注》。西方有远见的学者，如以研究古希腊数学著称的英国罗界（G. Lloyd）爵士多次与我讨论刘徽的证明问题，他对刘徽的评价极高。^③法国伦理与政治科学院院长 E. Poule 教授等认为，刘徽在数学证明及其意义的概念上有新的突破。

我们认为，刘徽等数学家的数学证明表明，中国古代存在着纯数学研究，也就是为数学而数学的活动。一个明显的事实是：就实际应用而言，《九章算术》和许多数学著作提出的公式、算法，只要能够无数次应用，并且在应用中表明它们正确就够了，不在数学上证明它们，根本不会影响它们的应用。刘徽的《九章算术注》对《九章算术》的公式、算法进行了全面而且基本严谨的证明，并在证明中追求逻辑的正确、推理的明晰，这显然是纯数学的活动。杨辉、王文素等的论证工作，也属于纯数学的范畴。

此外，对计算中精确度的追求，也是纯数学的工作。例如，对开方不尽的情况，在刘徽之前，人们用 $a + \frac{A-a^2}{2a+1}$ 或 $a + \frac{A-a^2}{2a}$ 表示平方根的近似值。在实际应用中，一般说来，这已经足够了。刘徽认为这不精确，提出求“微数”的思想，以十进分数逼近无理根。然而，这在实际应用中意义不大。刘徽、祖冲之将求“微数”的思想用于求圆周率，祖冲之将其精确到 8 位有效数字，更不是实际应用所需要的。实际上，祖冲之后 1000 多年间，在工艺技术和历法的计算中，人们还大多使用“周三径一”，除了数学著作中的计算外，甚至连徽率 $\frac{157}{50}$ 也未必使用。王恂、郭守敬制定明以前最精确的历法《授时历》，仍然使用圆周率 3。

① [英] 李约瑟，中国科学技术史，第 3 卷，科学出版社，1978 年，第 337 ~ 338 页。其中关于中国数学缺少“严格求证”的说法，是李约瑟转引日本的中国数学史家三上义夫的话。见：Y. Mikami（三上义夫），*The Development of Mathematics in China and Japan*（《中国和日本数学之发展》），Leipzig: Teubner, 1913.

② [英] 李约瑟，中国科学技术史·数学，科学出版社，1978 年。

③ G. Lloyd, Préface aux Neuf Chapitres: *Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*（中法对照本《九章算术》序），K. Chemla（林力娜），Guo Shuchun（郭书春）译，Dunod Paris, 2004、2005 年。

事实上，即使使用祖率 $\frac{355}{113}$ 或8位有效数字的圆周率计算出需要的数值，没有近现代的精密加工技术，古代加工技术所造成的误差，会远远超过圆周率不精确造成的误差。显然，追求圆周率的精确值，不是人们日常生产、生活的需要，而是纯数学活动。

四

20世纪70年代以前，中国数学史界一般将中国古代数学的特征概括为强烈的位值制，以计算为中心，数学理论密切联系社会实际……这是非常明显的，也是正确的。钱宝琮等前辈已经做了充分的论述。然而，进一步问，中国古代数学的算法有什么特点？提出并解决这个问题的是吴文俊。他说：“我国古代数学，总的说来就是这样一种数学，构造性与机械化，是其两大特色。”^①构造性和机械化的思想贯穿于整个中国古代数学的始终。

所谓构造性数学，是指从某些初始对象出发，通过明确规定的操作展开的数学理论。中国古代的方程术即线性方程组解法、刘徽求圆周率的程序、开方术和求高次方程正根的增乘开方法、大衍总数术即一次同余方程组解法等成就都是典型的构造性方法。

所谓机械化，就是刻板化和规格化。《九章算术》中的分数四则运算法则，开平方、开立方程序，方程术等，刘徽的求圆周率程序、解方程的互乘相消法和方程新术以及由《九章算术》的开方术发展起来的贾宪、秦九韶的增乘开方法，秦九韶的求解一次同余方程组的大衍总数术，宋元数学家设未知数列方程的天元术，元朝朱世杰等求解多元高次方程组的四元术，等等，都具有规格化的程序，是典型的机械化方法。

另外，吴文俊特别重视中国传统数学中几何问题的代数化思想特征。自《九章算术》起，勾股测望问题都要化成算术、代数问题求解。到宋元时期，数学家发明了天元术，将几何问题通过天元多项式化为一元高次方程。后来，又发展为二元术、三元术、四元术，即二元、三元、四元高次方程组。四元术的核心是四元消法，即将四元高次方程组化为三元，再化为二元，最后化为一元高次方程。这就是几何学代数化。

吴文俊从中国传统数学的构造性和机械化特征得到启发，开创了数学机械化理论。

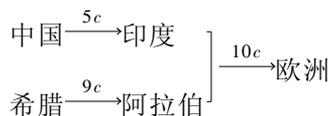
五

吴文俊关于中国传统数学特征的论述，为在理论上回答什么是世界数学发展的主流、彻底解决中国传统数学属不属于世界数学发展的主流等问题开辟了道路。文艺复兴之后，欧洲发生了资产阶级革命，跃居世界前列，并向亚非及美洲扩张，使他们养成了欧洲中心论思想，加之近代中国数学落后，西方人一般鄙视中国古代数学。当他们从日本学者三上义夫的书^②上知道了中国古代数学的许多成就时，由于他们固守根深蒂固的西方中心论或其变种，便不顾起码的编年史，也不要任何证据，就说中国数学是从巴比伦、希腊甚至比中国晚出的

^① 吴文俊，吴文俊论数学机械化，山东教育出版社，1995年。本文凡引吴文俊语，均据此。

^② [日] Y. Mikami (三上义夫)，*The Development of Mathematics in China and Japan* (《中国和日本数学之发展》)，Leipzig: Teubner, 1913。

印度等传入的。他们编著的数学史著作，大都根本不提中国古代数学，甚至将中国与日本、玛雅的数学一道列入“对于数学思想的主流没有重大的影响”而略而不论。^①英国科学史家李约瑟（1900~1995）根据自己以及李俨、钱宝琮、严敦杰等学者的中国数学史研究成果指出，在数学上，“在公元前250年到公元1250年之间，从中国传出去的东西比传入中国的东西要多得多”^②，批驳了中国古代数学源于古巴比伦、古希腊和印度的谬说。吴文俊根据钱宝琮的思想，将中世纪数学发展过程概括为：



c 表示世纪。后来，他进而指出：“贯穿在整个数学发展历史过程中有“两个中心思想”，一是公理化思想，一是机械化思想。”不久，他又将“两个中心思想”改成“两条发展路线”：“一条是从希腊欧几里得系统下来的；另一条是发源于中国，影响到印度，然后影响到世界的数学。”接着，他提出这两条发展路线互为消长：“从数学有史料为依据的几千年发展过程来看，以公理化思想为主的演绎倾向以及以机械化思想为主的算法倾向互为消长。”两年后，他更明确地指出了数学发展的主流问题：“在历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复互为消长交替成为数学发展中的主流。”这就在理论上回答了什么是世界数学发展的主流的问题。而“中国古代数学，乃是机械化体系的代表”，从而彻底解决了中国传统数学属于世界数学发展的主流，并且是主流的两个主要倾向之一的问题。这就是说，在吴文俊看来，数学发展的主流并不像以往有些西方数学史家所描述的那样——只有单一的希腊演绎模式，还有与之平行的中国式数学，而就近代数学的产生而言，后者甚至更具有决定性的（或者说是主流的）意义。^③正是以中国数学为其源头和重要组成部分的东方数学，包括数学方法和用数学解决实际问题的传统，传到欧洲，与发掘出来的古希腊数学相结合，导致数学模式和数学家的数学观改变，重视数学计算，走向几何问题的代数化，从而开辟了文艺复兴后欧洲数学的繁荣，并开辟了通向解析几何和微积分的道路。

古希腊数学与中国传统数学各有所长，厚此薄彼，褒一贬一，不是恰当的态度。正确的态度是取两者之长，兼收并蓄。如果现代数学家既能施用古希腊的抽象方法，又长于中国式的算法，便可以同时进行深入的证明和准确的计算，对当今数学的发展可能会起到无法预料的作用。这是中西数学思想的一种新的融会贯通，可以说是较明末至清末更高的、完全不同的一种融会贯通。

总之，只要了解并客观、公正地评价中国传统数学，就会发现，它是世界数学主流中极其重要的一部分。

① [美] M. Kline (克莱因), 古今数学思想·序。见: 古今数学思想, 第1册, 上海科学技术出版社, 1979年, V。

② [英] 李约瑟, 中国科学技术史·数学, 科学出版社, 1978年。

③ 李文林, 古为今用的典范——吴文俊教授的数学史研究, 见: 林东岱、李文林、虞言林主编, 数学与数学机械化, 山东教育出版社, 2001年。

六

数学史是历史学的一部分。它要求研究者站在现代数学的高度，用历史学的方法整理此前产生的数学遗产。不言而喻，反映这些遗产的载体——原始文献，是我们研究的主要对象，是数学史研究的出发点。因此，尊重并认真研读原始文献，是对数学史工作者的起码要求。这不是杞人忧天。事实上，不认真研究原始文献，以自己现有的知识理解甚至取代古文；对原始文献弃而不用，只靠自己的臆测得出某些结论；读不懂古文，便对古文乱加改窜；因原始文献的记载与自己的观点相左，便对古文进行曲解，甚至不加说明便随意删节，强古人以就我的态度……在我们的数学史研究中并不鲜见。中国数学史研究经常发生一些争论，原因当然各异。然而，不尊重原始文献，甚至有意无意地篡改古文，曲解古义，是一个重要原因。我们以清中叶以来学术界对《九章算术》的编纂、刘徽的割圆术及求圆周率的程序、对秦九韶大衍总术术的认识、李冶《测圆海镜》为何而作、对天元式的认识等问题的偏颇为例说明这个问题。

刘徽关于《九章算术》是“九数之流”，张苍、耿寿昌等在秦火遗残基础上“各称删补”而成的论述不仅是最早的，而且被对《九章算术》的结构和体例的分析^①、对《九章算术》所反映的物价的分析^②所证实，因而是最正确的。自清中叶戴震整理《九章算术》（1774）时开始否定刘徽的说法^③起，此后整整200年间，人们不再考虑刘徽的说法是不是正确，却沿着戴震的思路走下去，提出一些或者似是而非，或者毫无根据、纯属臆测的《九章算术》成书说。事实上，1983年底张家山汉墓中与《算数书》同时出土了关于“均输律”的竹简^④之后，刘徽的说法不再与任何历史事实相矛盾，是不能轻易怀疑的。

我们认为，今天的研究者不能将刘徽关于《九章算术》编纂的论述与近人、今人关于《九章算术》成书的一些猜测放在同等的位置上来考察。只有首先驳倒刘徽，才能再考虑其他说法。因为刘徽的话是在《九章算术》成书二三百年后，而戴震等的话则在2000多年之后。刘徽去古未远，他不仅能师承前辈关于《九章算术》编纂的可靠说法，而且能看到比近人、今人多得多的资料。

乾嘉学派特别是戴震等的考据功夫极深，但是，疑古倾向太严重。且不说当时大规模的文物考古发掘尚未展开，只就典籍而言，由于时代久远及各种天灾人祸，古代出现过的典籍能流传到清中叶的百无一二；有幸流传到清中叶的，一个人即使如戴震这样聪明博学的大才，能读到的亦百无一二。因此，戴震等以一己之知识，便随意否定历史文献的记载，其偏颇是显而易见的。尊重原始文献，走出疑古，这就是结论。

中国传统数学在20世纪初中断，从事中国数学史研究的学者绝大多数是受西方现代数学教育的，这就存在着一个既站在现代数学的高度，又回到中国古代的问题。然而，在研治中国数学史的时候，往往囿于自己的知识修养，离开原始文献，自觉或不自觉地用我们所熟

① 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科学技术出版社，1992年。又见：繁体字修订本，明文书局，1995年。

② [日]堀毅，秦汉物价考，见：秦汉法制史论考，法律出版社，1988年，第268~307页。

③ 清·戴震，九章算术提要，见：《武英殿聚珍版丛书》本。见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年。

④ 李学勤，中国数学史上的重大发现，文物天地，1985，（1）。

悉的希腊的或现代的方法取代中国传统的方法，从而造成误解。即使是一些造诣相当高的学者的某些严肃的论著在使用原始文献方面也会造成失误。

对刘徽割圆术及求圆周率程序的理解偏颇就是一个典型的例子。刘徽为《九章算术》圆田术写了一个很漂亮的注。这个注首先记述了前人用出入相补原理对圆田术的论证方法，当然是不严格的。接着，刘徽创造了用极限思想和无穷小分割方法严格证明圆田术的方法，其画龙点睛之处是“以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂”。这几句话清楚地表明刘徽完成了对《九章算术》圆面积公式的证明。然后，刘徽指出，《九章算术》圆田术中的周、径“谓至然之数，非周三径一之率也”。因此要求这个“至然之数”，就是圆周率。他在批评了前人沿用“周三径一之率”的错误之后，提出了求圆周率近似值的程序。他从直径为2尺的圆的内接正六边形逐步割圆，计算出314寸²作为圆面积的近似值。将其代入圆田术，反求出圆周长的近似值628寸。将其与圆直径20寸相约，便得到圆周率 $\frac{157}{50}$ 。刘徽的整个圆田术注，论点明确，论据充分，逻辑清晰，没有任何费解之处。

显然，刘徽割圆术的主旨和他的几个极限过程是为了证明《九章算术》的圆田术。可是，“文化大革命”前约半个世纪，几乎所有关于刘徽割圆术的文章都没有认识到这一点。甚至一篇逐字逐句用现代汉语翻译圆田术注的文章^①对上面提到的画龙点睛的几句话，竟然略而不译。并且由于这个失误，人们对刘徽求圆周率的程序也统统搞错了。首先，误以为整个割圆术，特别是几个极限过程，就是为了求圆周率。实际上，求圆周率是极限思想在近似计算中的应用，用不到极限过程。其次，误以为求出圆面积近似值314寸²之后，使用现今中学数学教科书中的圆面积公式 $S = \pi r^2$ 求圆周率。这不仅背离了刘徽注，而且还会把刘徽置于他从未犯过的循环推理错误的境地。

对刘徽割圆术的误解延续时间之长，涉及范围之广，是罕见的。究其原因，除了离开原文并囿于自己的知识结构外，对许多作者而言，是犯了“天下文章一大抄”的错误。研究数学史，认真研读原著是第一要务。在这里，没有捷径可走。

人们常把南宋数学家秦九韶《数书九章》中求解一次同余方程组的方法称为“大衍求一术”。实际上，这是一个误解。秦九韶求解一次同余方程组的方法是“大衍总术”，它包括四个部分：诸问数的定义、将不两两互素的问题化为相当于两两互素的定数的程序、求乘率的程序即“大衍求一术”、求率数即答案的程序。“大衍求一术”只是其中一部分，尽管是其相当重要甚或核心的一部分，但不是一次同余方程组解法的全部。自清中叶以来，许多推演秦九韶方法的著作^②及20世纪的数学史著述^③大都将“大衍求一术”说成是秦九韶的一次同余方程组解法，这是不恰当的。

自清阮元（1764～1849）提出“《测圆海镜》何为而作也？所以发挥立天元一之术也”^④的说法之后，许多中国数学史著述便将《测圆海镜》说成是一部研究天元术的著作，

① 励乃骥，《九章算经》圆田题和刘徽注的今释，数学教学，1957，（6）：1～11。

② 清中叶之后推演秦九韶求解一次同余方程组方法的著作几乎全部冠以“求一术”之名，如张敦仁的《求一算术》、焦循的《大衍求一术》、时曰醇的《求一术指》、黄宗宪的《求一术通解》等。

③ 钱宝琮，秦九韶《数书九章》研究，见：钱宝琮等，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年，第67～77页。

④ 清·阮元，重刻《测圆海镜细草》序，见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷，第1册，河南教育出版社，1993年。

而李冶的《益古演段》是一部普及天元术的著作。诚然，《测圆海镜》和《益古演段》是现存使用天元术的最早的两部著作，人们重视它们关于天元术的内容，这是完全正确的。但是，说它们是李冶为天元术而写的，是不符合历史事实的。实际上，李冶自序已经说明他的《测圆海镜》是为了阐释洞渊九容，而《益古演段》是在《益古集》上“移补条段，细翻图式”，为了使初学数学者能看懂。在李冶自序中，没有一个字谈到天元术。在他的朋友和子侄辈为他的两部书写的序跋中，也都没有一个字谈到天元术。可见，《测圆海镜》是阐释勾股容圆的著作，《益古演段》是阐发《益古集》中田亩问题的著作，二者都不是以阐述天元术为目的的著作。天元术只是李冶在这两部著作中使用的主要方法，当时业已成熟。

对天元式的表示自清中叶以来也有一些模糊认识。应当指出，天元式主要是指含有“天元”的多项式或单项式，而不是指开方式。许多数学史著述说，在天元术中，开方式也称为天元式，甚至称为“天元开方式”，说“‘天元开方式’就是一元高次方程”，并在开方式中以“元”字或“太”字表示一次项或常数项。这是不恰当的。一般说来，在天元术中，经过“如积相消”，得出的开方式中的常数项或天元的一次项便不再标以“太”或“元”。有的学者在引用开方式时加上原文没有的“元”字，是上述误解所致。

经过李俨、钱宝琮等中国数学史学科奠基者和历代数学史工作者的努力，中国数学史研究有相当深厚的基础和成就。在这种情况下，更应该力求准确地表述这些成就，既不夸大，也不缩小。为此，除了尊重原始文献之外，别无他途。

同时，中国传统数学成就虽然辉煌，然而历史上产生的尤其是元中叶以前的大量数学著作，流传到现今的只是极少一部分。就是说，我们实际上只知道中国数学史的几个“点”。如何将这些“点”串联成“线”、“面”或“体”，成为一部完整的中国数学史，是数学史工作者的任务。

李俨、钱宝琮、严敦杰等前辈站在现代数学的高度，用历史学的方法研究中国古代数学的辉煌成就，为中国数学史奠定了实事求是的研究方法。吴文俊进而提出了“古证复原”的“三原则”：

原则之一，证明应符合当时本地区数学发展的实际情况，而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法。

原则之二，证明应有史实史料上的依据，不能凭空臆造。

原则之三，证明应自然地导致所求证的结果或公式，而不应为了达到预知结果以致出现不合情理的人为雕琢痕迹。

这里虽然讲的是复原古证的问题，但对数学史研究的其他问题也是适用的。我们认为，这“三原则”的核心是尊重历史，尊重原始文献。

只有尊重原始文献，深入研究这些“点”，才有可能做好串联成“线”、“面”或“体”的工作，形成完整、准确的中国数学史。这是本书力求达到的目标。正因为如此，本书凡是阐述重大成就或重要观点，必定引征古文献的原文为佐证。

郭书春

己丑年（2009）雨水定稿

目 录

总序	卢嘉锡	i
前言		iii

第一编 中国数学从兴起到形成一门学科 ——原始社会到西周时期的数学

第一章 中国数学的兴起——原始社会的数学	3
第一节 图形观念的形成	3
一 图形观念的产生	3
二 从方位观念看图形观念	5
三 原始的作图工具——规矩准绳	6
第二节 数概念的形成与原始的记数方法	7
一 数概念的产生	7
二 原始的记数方法	8
第三节 传说中的数学人物	12
一 伏羲	12
二 黄帝和隶首	12
三 尧、舜、禹和桎	13
第四节 从原始社会晚期的社会结构看当时数学的发展	14
第二章 数学形成一门学科——夏、商、西周三代的数学	16
第一节 十进位值制记数法的形成	16
一 甲骨文和金文中的数字	16
二 十进位值制记数法	21
第二节 数学成为一门学科	22
一 社会管理和工作的需要与数学的发展	22
二 数学进入教学科目	24
三 商高及其所掌握的数学知识	24

第二编 中国传统数学框架的确立 ——春秋至东汉中期的数学

第三章 春秋至汉代数学概论	29
第一节 春秋战国秦汉数学与社会及文化背景	29
一 春秋战国数学与社会及文化背景	29
二 秦汉数学与社会及文化背景	30
第二节 算法式数学在春秋战国时期达到高峰	32
一 整数四则运算在春秋时期的普及	32

二	分数、比和比例的广泛使用	36
三	从先秦文献看春秋战国时代的算法化数学——“九数”	38
四	先秦时期的其他数学知识	44
第三节	理论思辨倾向——春秋战国数学的新动向	49
一	墨家与数学	50
二	名家的数学思想	59
三	先秦道家等学派的无限思想	63
四	春秋战国时期的理性思辨与数学	64
第四节	秦简《数》与汉简《算数书》	65
一	秦简《数》	65
二	《算数书》的体例、表达方式及特点	66
三	《算数书》的编纂	71
四	《算数书》的内容及其在中国数学史上的地位	72
第五节	《周髀算经》和陈子	73
一	《周髀算经》	73
二	陈子	76
第六节	《九章算术》和张苍、耿寿昌	77
一	《九章算术》的内容	77
二	《九章算术》的体例和编纂	77
三	《算数书》与《九章算术》	84
四	《九章算术》的特点与弱点及其在世界数学史上的地位	86
五	《九章算术》的版本	87
六	张苍和耿寿昌	93
第七节	其他数学家和数学著作	95
一	许商和《许商算术》、《杜忠算术》	95
二	尹咸和刘歆	95
三	张衡和马续	96
第四章	分数、率与盈不足	98
第一节	分数及其四则运算法则	98
一	分数及其表示	98
二	分数四则运算法则	99
第二节	今有术与衰分术、均输术	106
一	今有术	106
二	衰分术	108
三	均输术	111
第三节	盈不足术	112
一	盈不足诸术	113
二	盈不足术在一般数学问题中的应用	115
第五章	面积、体积、勾股与测望	119
第一节	面积	119
一	直线形面积	119

二 曲线形面积	121
三 圆方与方圆	123
四 曲面形面积	124
第二节 体积	125
一 多面体体积	125
二 圆体体积	135
第三节 勾股定理与解勾股形	137
一 勾股定理	137
二 解勾股形	138
三 勾股数组	140
第四节 勾股容方、容圆	142
一 勾股容方	142
二 勾股容圆	142
第五节 测望	142
一 一次测望	143
二 重差的萌芽	143
第六章 开方术、正负术、方程术与数列	145
第一节 开方术	145
一 开平方术	146
二 开立方术	149
第二节 方程术与正负术	151
一 方程和方程术	151
二 损益术	154
三 正负术	156
第三节 数列	160

第三编 中国传统数学理论体系的完成 ——东汉末至唐中叶的数学

第七章 东汉末至唐中叶数学概论	165
第一节 汉末魏晋开始的社会变革与汉末至唐中叶的数学	165
一 汉末魏晋的社会变革与传统数学理论的奠基	165
二 南北朝的社会与数学	170
三 隋至唐中叶的社会与数学	171
第二节 徐岳《数术记遗》和赵爽《周髀算经注》	172
一 刘洪、徐岳与《数术记遗》	172
二 赵爽与《周髀算经注》	177
第三节 刘徽与《九章算术注》、《海岛算经》	178
一 刘徽	178
二 《九章算术注》	180

三 《海岛算经》	183
第四节 南北朝的数学著作和数学家	184
一 关于《九章算术》的研究	184
二 《孙子算经》	185
三 《夏侯阳算经》	188
四 《张丘建算经》	189
五 祖冲之、祖暅之与《缀术》	191
六 甄鸾及其数学著作	194
七 其他数学家	198
第五节 隋至唐中叶的数学著作和数学家	200
一 刘焯	200
二 王孝通与《缉古算经》	201
三 李淳风等整理十部算经	203
四 一行与《大衍历》	205
五 边冈	206
第六节 隋唐算学馆和明算科	206
一 算学馆	206
二 明算科	207
第七节 大数进法和改进计算工具的尝试	208
一 大数进法	208
二 改进计算工具的尝试	209
第八章 率与齐同原理	210
第一节 率的定义和性质	210
一 率的定义	210
二 率的求法和性质	210
第二节 今有术的推广与齐同原理	211
一 今有术的推广	211
二 齐同原理	213
第三节 算术趣题和最小公倍数	216
一 算术趣题	217
二 直接求解数学难题	218
三 最大公约数与最小公倍数的应用	219
第九章 勾股、测望和重差	220
第一节 解勾股形诸公式的证明	220
一 赵爽、刘徽对勾股定理的证明	220
二 赵爽、刘徽对解勾股形诸公式的证明	221
三 刘徽对勾股数组公式的证明	226
四 王孝通对解勾股形问题的拓展	226
第二节 勾股容方、容圆公式的证明	228
一 借助出入相补原理的证明	228
二 借助勾股相与之势不失本率原理的证明	229

第三节 重差术	230
一 重差诸术	230
二 制图六体与数学	234
第四节 其他测望问题	235
一 《张丘建算经》中的测望问题	235
二 《数术记遗注》中的测望问题	236
第十章 开方术、方程术的改进、不定问题和数列	238
第一节 开方术的几何解释和改进	238
一 刘徽关于开方术的几何解释	238
二 刘徽和王孝通关于开方式的造术	240
三 开方术的改进	242
四 刘徽“求微数”与根的近似值	245
五 祖冲之的开差幂和开差立	246
六 一行的求根公式	247
第二节 方程术的进展	247
一 刘徽的方程术理论	247
二 互乘相消法	248
三 方程新术	249
四 《孙子算经》和《张丘建算经》中的方程术	251
第三节 不定问题	253
一 五家共井	253
二 物不知数问题	254
三 百鸡术	255
第四节 等差数列和等比数列	256
一 等差数列	256
二 等比数列	258
第十一章 无穷小分割和极限思想	259
第一节 割圆术	259
第二节 刘徽原理	260
第三节 祖暅之原理与圆体体积	263
一 祖暅之原理	263
二 牟合方盖与球体积	265
第四节 极限思想在近似计算中的应用	267
一 圆周率	267
二 圆率和方率	271
三 弧田密率	271
第五节 刘徽的面积、体积的推导系统	273
一 刘徽的面积推导系统	273
二 对多面体体积公式的证明	275
三 刘徽的体积推导系统	279
第六节 刘徽的极限思想在数学史上的地位	281

一	刘徽的无穷小分割思想与先秦墨家、名家、道家	281
二	刘徽的极限和无穷小分割思想与古希腊的比较	282
第十二章	刘徽的逻辑思想和数学理论体系	284
第一节	刘徽的辞与理、类、故	284
一	理	284
二	类	285
三	故	285
第二节	定义	286
第三节	类比和归纳	287
一	类比	287
二	归纳推理	287
第四节	刘徽的演绎推理	288
一	三段论和关系推理	289
二	假言推理、选言推理、联言推理和二难推理	290
三	数学归纳法的雏形	292
第五节	数学证明	293
一	综合法	293
二	分析法与综合法相结合	294
三	反驳及刘徽的失误	294
第六节	刘徽的数学理论体系	295
第十三章	隋唐历法中的数学方法	298
第一节	隋唐历法的创造性转变	298
一	张子信的发现及其意义	298
二	隋唐历法计算结构的数学化	299
第二节	二次内插算法	300
一	《皇极历》	300
二	刘焯二次内插算法及其算理分析	301
三	唐代历法对二次内插算法的改进与发展	304
四	相减相乘法	307
第三节	隋唐历法中若干典型数学方法	309
一	刘焯《皇极历》定朔算法	309
二	李淳风《麟德历》晷影算法	313
三	一行《大衍历》的九服晷影算法	316
四	边冈《崇玄历》对黄赤道差与月亮黄纬的计算	317
第十四章	隋唐时期中国和朝鲜、日本、印度的数学交流	322
第一节	中国和朝鲜的数学交流	322
第二节	中国和日本的数学交流	324
一	中国历算传入日本	324
二	早期算学教育制度的引进	326
三	隋唐时期传入日本的中算书与日本古代算学内容的遗存	329
第三节	中国和印度的数学交流	334

一 印度数学传入中国	334
二 中国数学对印度的影响	338

第四编 中国传统数学的高潮 ——唐中叶至元中叶的数学

第十五章 唐中叶至元中叶数学概论	341
第一节 传统数学的高潮与唐中叶开始的社会变革	341
一 唐中叶开始的社会变革和数学的发展	341
二 思想宽松是数学发展的必要条件	342
三 社会需要是数学发展的强大动力	343
四 宋元统治者重视数学	344
五 宋元数学的特点	348
第二节 传本《夏侯阳算经》	351
一 传本《夏侯阳算经》的年代与内容	351
二 《夏侯阳算经》的版本	353
第三节 贾宪和《黄帝九章算经细草》	354
一 贾宪和他的老师楚衍	354
二 《黄帝九章算经细草》大部存世考	355
三 《黄帝九章算经细草》的数学成就和数学思想	357
第四节 刘益和《议古根源》	358
一 刘益	358
二 《议古根源》	358
第五节 秦九韶和《数书九章》	359
一 秦九韶的生平	360
二 秦九韶人品辨	361
三 《数书九章》	363
第六节 李冶和《测圆海镜》、《益古演段》	364
一 李冶	364
二 洞渊九容和《测圆海镜》	367
三 《益古集》和《益古演段》	370
第七节 杨辉和《详解九章算法》、《杨辉算法》	372
一 杨辉	372
二 《详解九章算法》	374
三 《日用算法》和《杨辉算法》	375
第八节 朱世杰和《算学启蒙》、《四元玉鉴》	379
一 朱世杰	379
二 《算学启蒙》	379
三 《四元玉鉴》	380
第九节 其他数学家和数学著作	382

一	李籍和《九章算术音义》、《周髀算经音义》	382
二	《谢察微算经》	384
三	沈括和《梦溪笔谈》的数学成就	384
四	王恂、郭守敬和《授时历草》	386
五	赵友钦和《革象新书》	388
六	沙克什和《河防通议·算法门》	389
七	其他数学家和数学著作	390
第十六章	计算技术的改进和珠算的发明	394
第一节	○和十进小数	394
一	○和数码	394
二	十进小数	396
第二节	计算技术的改进	400
一	重因法、以加减代乘除与求一法	401
二	留头乘法与九归、归除	404
第三节	珠算的产生	406
一	珠算产生诸说	406
二	珠算最迟产生于宋代	408
第十七章	勾股容圆和割圆术	409
第一节	勾股容圆	409
一	洞渊九容	409
二	圆城图式	411
三	识别杂记	412
第二节	割圆术	417
一	沈括的会圆术	417
二	《授时历》的弧矢割圆术	417
三	赵友钦的割圆术	419
第十八章	高次方程数值解法与天元术、四元术	422
第一节	高次方程数值解法	422
一	立成释锁法	422
二	贾宪三角	422
三	增乘开方法	424
四	益积术和减纵术	426
五	正负开方术	427
第二节	天元术	435
一	天元术的历史	435
二	天元术的完善和应用	444
第三节	四元术	447
一	四元术的历史发展	447
二	四元消法	448
三	二元术	449
四	三元术	451