1. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Semantik von Programmiersprachen SoSe 2017

Wolfgang Mulzer, Max Willert

Abgabe bis zum 27. April 2017, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Strukturelle Induktion über Boolesche Terme *10 Punkte*

Sei $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine Menge von Variablen. Ein *Boolescher Term* ist folgendermaßen definiert:

- Für alle $x \in V$ ist x ein Boolescher Term.
- Wenn t ein Boolescher Term ist, so ist auch $(\neg t)$ ein Boolescher Term.
- Wenn t_1 und t_2 Boolesche Terme sind, so sind auch $(t_1 \wedge t_2)$ und $(t_1 \vee t_2)$ Boolesche Terme.
- Ansonsten gibt es keine Booleschen Terme.

Die *Semantik* eines Booleschen Terms t, in dem n Variablen vorkommen, ist die n-stellige Boolesche Funktion $f_t : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, die durch t dargestellt wird. Zwei Boolesche Terme t_1 und t_2 heißen *äquivalent*, falls in ihnen die gleichen Variablen vorkommen und falls $f_{t_1} = f_{t_2}$ ist.

Beweisen Sie detailliert duch strukturelle Induktion: Zu jedem Booleschen Term t existiert ein äquivalenter Boolescher Term, in dem die Negationen ausschließlich direkt vor den Variablen vorkommen. Sie dürfen für Ihren Beweis bekannte Tatsachen aus der Aussagenlogik verwenden.

Aufgabe 2 Reguläre Ausdrücke *10 Punkte*

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Ein *regulärer Ausdruck* über Σ ist folgendermaßen definiert:

- $\emptyset$ und ε sind reguläre Ausdrücke.
- Für alle $\sigma \in \Sigma$ ist σ ein regulärer Ausdruck.
- Wenn r ein regulärer Ausdruck ist, so ist auch (r^*) ein regulärer Ausdruck.
- Wenn r_1 und r_2 reguläre Ausdrücke sind, so sind auch $(r_1 \circ r_2)$ und $(r_1 \cup r_2)$ reguläre Ausdrücke
- Ansonsten gibt es keine regulären Ausdrücke.

Die *Semantik* eines regulären Ausdrucks r ist die Sprache $L(r) \subseteq \Sigma^*$, welche folgendermaßen definiert ist:

- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $L(\sigma) = \{\sigma\}$, für alle $\sigma \in \Sigma$.
- $L((r^*)) = L(r)^*$, $L((r_1 \circ r_2)) = L(r_1) \circ L(r_2)$ und $L((r_1 \cup r_2)) = L(r_1) \cup L(r_2)$.

Beweisen Sie:

(a) Für alle regulären Ausdrücke r_1, r_2 gilt: $L((r_1 \cup r_2)) = L((r_2 \cup r_1))$.

(b) Für alle regulären Ausdrücke r gilt: $L((r \circ \emptyset)) = \emptyset$.

(c) Für alle regulären Ausdrücke r gilt: $L((\varepsilon \circ r)) = L(r)$.

(d) Für alle regulären Ausdrücke r_1, r_2, r_3 gilt: $L((r_1 \circ (r_2 \cup r_3))) = L((r_1 \circ r_2)) \cup L((r_1 \circ r_3))$.

(e) Für alle regulären Ausdrücke r_1, r_2 gilt: $L(r_1) \subseteq L((r_1 \cup (r_2)^*))$.

Aufgabe 3 Arithmetische Ausdrücke *10 Punkte*

Betrachten Sie die folgende kontextfreie Grammatik für arithmetische Ausdrücke:

```
Z -> 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9
E -> Z | E + E | E - E | E * E | (E)
```

(a) Geben Sie zwei verschiedene Syntaxbäume für den arithmetischen Ausdruck `2+5*6-2-4` an.

(b) Geben Sie eine eindeutige Grammatik für arithmetische Ausdrücke an. Begründen Sie kurz, warum Ihre Grammatik eindeutig ist (es ist kein formaler Beweis nötig).

(c) Definieren Sie formal eine Semantik für Ihre Grammatik aus (b), d.h., beschreiben Sie eine Funktion f, die jedem gültigen arithmetischen Ausdruck sinnvoll eine natürliche Zahl zuordnet.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Definiton aus (c) die Semantik des arithmetischen Ausdrucks `2+5*6-2-4`.