

Mathematik für Informatiker III  
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 12. Dezember 2007, 12<sup>15</sup>

1. **Konvexe Hülle, Fläche** (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Volumen der konvexen Hülle der Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Der Schwerpunkt einer Punktmenge  $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  ist durch  $S = \frac{P_1 + \dots + P_k}{k}$  definiert. Dabei ist die Summe koordinatenweise zu bilden (also als Summe der Ortsvektoren der Punkte). Wir betrachten nun den Schwerpunkt  $S$  von drei Punkten  $P_1, P_2, P_3$  in  $\mathbb{R}^2$ . Beweisen Sie, dass die Fläche des von  $P_1, P_2$  und  $S$  aufgespannten Dreiecks genau ein Drittel der Fläche des von  $P_1, P_2, P_3$  aufgespannten Dreiecks ist.

2. **Inverse einer ganzzahligen Matrix** (2 Punkte)

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen. Beweisen Sie folgende Aussage: Es gibt genau dann eine ganzzahlige  $n \times n$ -Matrix  $B$  mit  $A \cdot B = E$ , wenn  $|\det A| = 1$  ist.

3. **Erhard Schmidt** (2 Punkte)

Bestimmen Sie nach dem Erhard Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren im  $\mathbb{R}^4$  mit Standardskalarprodukt eine orthonormale Basis des Unterraums

$$U = \text{Lin}((-3, -3, 3, 3), (-5, -5, 7, 7), (4, -2, 0, 6))$$

4. **Orthogonalprojektion** (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Matrix der Orthogonalprojektion auf den folgenden Unterraum im  $\mathbb{R}^3$

$$U = \text{Lin}((-4, 0, 3), (8, 3, -6)) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Welche Winkel bilden in  $U$  die Bilder der Standardbasisvektoren miteinander?

5. **Skalarprodukt und Winkel** (4 Punkte)

Eine bekannte Formel sagt, dass für einen beliebigen (Nichtnull-) Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  und die drei Winkel  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ , die dieser Vektor mit den drei Koordinatenachsen bildet, die folgende Identität gilt:

$$\sin^2 \alpha_x + \sin^2 \alpha_y + \sin^2 \alpha_z = 2$$

Beweisen Sie diese Formel unter Benutzung der Winkeldefinition mittels Standardskalarprodukt.