Mathematik für Informatiker I **WS 12/13**

8. Übung Abgabe: 14.12.2012 bis 10:00 Uhr (17.12.2012 bis 10:00 Uhr für die Mittwochs- und Donnerstagstutorien)

Aufgabe 1: **Bijektionen** $2+2+2$ Punkte

Geben Sie konkrete Beschreibungen von bijektiven Funktionen für die folgenden Mengenpaare an:

a) $A = \mathbb{N}$ und $B = \{6, 8, 10, \dots\}$ die Menge aller geraden Zahlen ≥ 6 (Funktionen f und f^{-1}).

b) $C_k = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ und $D = \{1, 2, \dots n-1\}$ für ein $n \geq 2$ und ein $1 \leq k \leq n$ (Funktionen f_k und f_k^{-1})

c) $E = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n-1\}$ und die Menge F aller injektiven Funktionen φ von $X = \{a, b\}$ nach $Y = \{1, 2, \dots, n\}$ (Funktionen g und g^{-1}).

Aufgabe 2: **Doppeltes Abzählen** 6 Punkte

Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $q(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n und $t(n)$ die Anzahl der Faktoren in der Primzahlzerlegung von n (für $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ist $q(12) = 2$ und $t(12) = 3$). Wir setzen $q(1) = t(1) = 0$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie $\sum_{n=1}^{40} q(n)$ mit doppelter Abzählung bestimmt werden kann.
Modifizieren Sie diesen Ansatz zur Bestimmung der folgenden Summen:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{30} q(3n) \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=1}^{30} q(12n) \qquad\qquad c) \quad \sum_{n=1}^{30} t(n)$$

Aufgabe 3: **Binomialkoeffizienten** $1+2+2$ Punkte

Eine fundamentale Eigenschaft der Binomialkoeffizienten ist die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$.

a) Beweisen Sie diese Identität an Hand der geschlossenen Formel!

b) Führen Sie einen kombinatorischen Beweis dieser Identität durch Konstruktion einer Bijektion (zwischen welchen Mengen?).

c) Beweisen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{n-k} + \binom{n-2}{n-k-1} + \binom{n-2}{n-k-2}$ für beliebige $n \geq 3$ und $1 \leq k \leq n-2$ gilt.

Aufgabe 4: **Partitionen** $3+2$ Punkte

a) Geben Sie eine kombinatorische Begründung dafür, dass für alle $n \geq 2$ die Gleichung $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Anzahl (die Zahl, keine Formel) der geordneten Partitionen der Zahl $n = 100$ in 8 Summanden $a_i \geq 12$.