HTWD, Fakultät Informatik/Mathematik
Prof. Dr. M. Voigt

Ganzrationale Funktionen /Polynome

1. Hornerschema:

Das Hornerschema ermittelt für ein gegebenes $b \in \mathbb{R}$ die Werte $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$, so dass
$p(x) = (x-b)(c_n x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1) + c_0$

$$
\boxed{
\begin{array}{ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & \downarrow & + & + & & + & + \\
b & & c_n b & c_{n-1} b & \cdots & c_2 b & c_1 b \\
\hline
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 & c_n = a_n & c_{n-1} & c_{n-2} & & c_1 & c_0
\end{array}
}
$$

<u>Anwendung</u>:

- Funktionswertberechnung $p(b) = c_0$
- Division $\dfrac{p(x)}{x-b} = c_n x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1 + \dfrac{p(b)}{x-b}$
- Abspalten einer Nullstelle, wenn $c_0 = 0$ ist; die Koeffizienten des Restpolynoms sind dann c_n, c_{n-1}, $\ldots$, c_1

2. Nullstellen und Vielfachheit:

(a) $b \in \mathbb{C}$ ist *Nullstelle* von $p(z)$, sofern ein Polynom $g(z)$ existiert mit $p(z) = (z-b)g(z)$.

(b) $b \in \mathbb{C}$ heißt *k-fache Nullstelle* von $p(z)$, sofern ein Polynom $h(z)$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $p(z) = (z-b)^k h(z)$ und $h(b) \neq 0$. k ist dann die *Vielfachheit* der Nullstelle b.

(c) Jedes Polynom n-ten Grades besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).

3. Komplexe Faktorzerlegung:

Jedes komplexe Polynom $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ besitzt eine Faktorisierung der Form

$$\boxed{p(z) = a_n(z-w_1)^{k_1}(z-w_2)^{k_2}\ldots(z-w_r)^{k_r}}$$

mit den verschiedenen Nullstellen $w_i \in \mathbb{C}$ der Vielfachheit k_i $(i = 1, \ldots, r)$ und $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$. Diese Faktorisierung nennt man *komplexe Faktorzerlegung* von $p(z)$.

4. Reelle Faktorzerlegung:

Jedes reelle Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ kann auch als komplexes Polynom aufgefasst werden und hat damit auch eine komplexe Faktorzerlegung. Zusätzlich kann es aber auch faktorisiert werden in der Form

$$\boxed{p(x) = a_n(x-b_1)^{k_1}\ldots(x-b_r)^{k_r}(x^2+c_1x+d_1)^{l_1}\ldots(x^2+c_sx+d_s)^{l_s}}$$

mit den Nullstellen $b_i \in \mathbb{R}$ der Vielfachheit k_i $(i = 1, \ldots, r)$ und den quadratischen Polynomen $x^2 + c_i x + d_i$ der Vielfachheit l_i $(i = 1, \ldots, s)$, die in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle haben.
Diese Faktorisierung nennt man *reelle Faktorzerlegung* von $p(x)$.