Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Andreas Maletti
Gustav Grabolle
Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

# Berechenbarkeit

## Serie 3

---

### Hinweise:

- Abgabeschluss für Lösungen zu Hausaufgaben: **17.05.2018** vor der Vorlesung.
- Die Seminaraufgaben werden in den Übungen vom 08.05. bis 17.05. besprochen.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Matrikelnummer, Name, Übungsgruppe.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.

---

### Zur Wiederholung 3.1

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Wann ist eine Turingmaschine normiert?
- Was ist eine Mehrband-Turingmaschine?
- Wiederholen Sie die Definition der Transformationssemantik.
- Wann ist eine Funktion Turing-berechenbar?

### Zur Wiederholung 3.2

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Was ist ein LOOP-Programm? Wie sind Eingaben und Ausgaben realisiert?
- Was ist $f^0$, wenn $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^k$ eine totale Funktion ist?
- Wann wird eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch ein LOOP-Programm berechnet?
- Wie viele Funktionen werden durch ein LOOP-Programm berechnet?
- Gibt es ein nicht-terminierendes LOOP-Programm?

## Seminaraufgabe 3.1

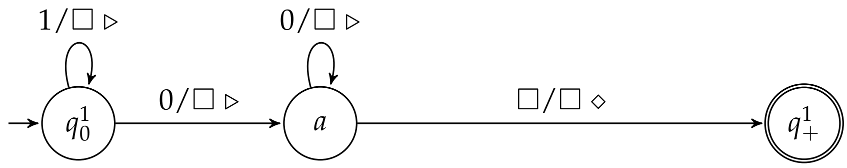
(a) Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ eine beliebige Turingmaschine.

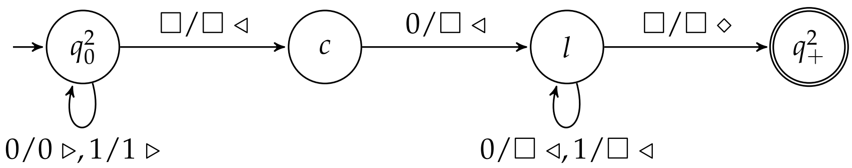
 (i) Konstruieren Sie eine **initial normalisierte** Turingmaschine $M'$ mit $T(M') = T(M)$.

 (ii) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

 *Hinweis:* Eine Turingmaschine ist initial normalisiert, falls $\Delta \subseteq (Q \setminus \{q_+, q_-\} \times \Gamma) \times (Q \setminus \{q_0\} \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright, \diamond\})$.

(b) Gegeben seien die Turingmaschinen $M^1 = (\{q_0^1, a, q_+^1, q_-^1\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \Delta^1, \Box, q_0^1, q_+^1, q_-^1)$ und $M^2 = (\{q_0^2, c, l, q_+^2, q_-^2\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \Delta^2, \Box, q_0^2, q_+^2, q_-^2)$, wobei $\Delta^1$ und $\Delta^2$ durch folgendes Diagramm gegeben sind.




 (i) Geben Sie $T(M_1)$ und $T(M_2)$ an.

 (ii) Konstruieren Sie eine Turingmaschine $M'$ mit $T(M') = T(M_1) \cup T(M_2)$. Gehen Sie hierbei wie im Beweis von Theorem 3.2 aus der Vorlesung vor.

 (iii) Geben Sie $T(M')$ an.

(c) Sei $M$ eine Turingmaschine. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$L(M) = \pi_1^{(2)}(T(M)).$$

 *Hinweis:* Wie in Vorlesung 4 bezeichnet $\pi_1^{(2)}$ die Projektion auf die erste Komponente, also gilt: $\pi_1^{(2)}(T(M)) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Gamma_M^* \text{ mit } (u, v) \in T(M)\}$.

## Seminaraufgabe 3.2

(a) Gegeben folgendes LOOP-Programm $P$:

```
x2 = x1 - 3 ;
LOOP (x2) {
    x1 = x2 + 1 ;
    x2 = 0
}
```

(i) Geben Sie $\text{var}(P)$ und $\text{maxvar}(P)$ an.

(ii) Ist $P$ ein LOOP-Programm mit strikter Syntax?

(iii) Bestimmen Sie schrittweise $||P||_2\,(5,2)$ und $||P||_2\,(2,2)$.

(iv) Geben Sie alle durch $P$ berechneten Funktionen an.

(b) Es seien $P_1$ und $P_2$ LOOP-Programme. Ferner seien $n \geq \text{maxvar}(P_1; P_2) + 2$ und $i, j \leq n$. Geben Sie ein LOOP-Programm P in Abhängigkeit von $P_1$ und $P_2$ mit

$$||P||_n\,(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} ||P_1||_n\,(a_1, \dots, a_n) & \text{falls } a_i > a_j \\ ||P_2||_n\,(a_1, \dots, a_n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

an.

## Seminaraufgabe 3.3

Gegeben zwei Turingmaschinen $M_1$ und $M_2$. Existiert eine Turingmaschine $M$ mit $T(M) = T(M_1) \cap T(M_2)$?

## Hausaufgabe 3.4

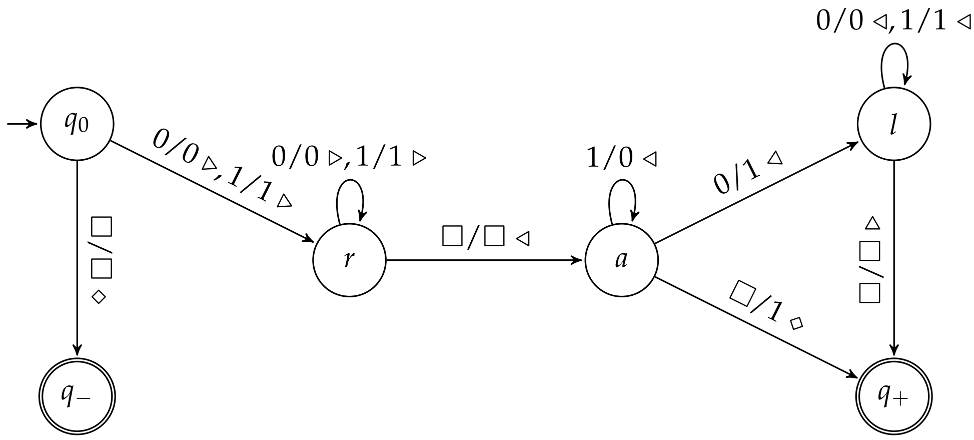
(a) Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ eine beliebige Turingmaschine so, dass für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $u, v \in \Gamma^*$ mit $\varepsilon q_0 w \Box \vdash_M^* u q_+ v$ die Bedingungen $u \in \{\Box\}^* \Gamma_M^*$ und $v \in \Gamma_M^* \{\Box\}^*$ erfüllt sind.

(i) Konstruieren Sie eine **normierte** Turingmaschine $M'$ mit $T(M') = T(M)$.

(ii) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

(iii) Gilt $L(M') = \pi_1^{(2)}(T(M))$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(b) Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_0, r, a, l, q_+, q_-\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \Box\}, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$, wobei $\Delta$ durch folgendes Diagramm gegeben ist.




(i) Geben Sie $T(M)$ an.

(ii) Konstruieren Sie eine Turingmaschine $M'$ mit $T(M') = T(M); T(M)$. Gehen Sie hierbei wie im Beweis von Theorem 3.5 aus der Vorlesung vor.

(iii) Geben Sie $T(M')$ an.

## Hausaufgabe 3.5

(a) Gegeben sei folgendes LOOP-Programm $P$.

```
x_3 = 0 ;
LOOP (x_1) {
    x_4 = x_2 · x_3 ;
    x_4 = x_4 + 1 ;
    IF (x_4 > x_1)
        x_1 = x_3
    } ELSE {
        x_3 = x_3 + 1
    }
}
```

  (i) Bestimmen Sie $||P||_6\,(5, 2, 0, 0, 0, 0)$ und $||P||_6\,(2, 0, 0, 0, 0, 0)$.

  (ii) Geben Sie die durch $P$ berechnete zweistellige Funktion $|P|_2$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\text{tower} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(k, n) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \\ n^{\text{tower}(k-1,n)} & \text{sonst} \end{cases}$$

LOOP-berechenbar ist.

## Hausaufgabe 3.6

Zeigen Sie, dass die Menge der Typ-0-Sprachen unter Schnitt abgeschlossen ist. Benutzen Sie Theorem 3.14 aus der Vorlesung.