N.4.1.
Ziel dieser Aufgabe ist es, mit dem Gesamtschrittverfahren eine Näherungslösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x - 16y + 2z &= 21 \\ -4x + y - 12z &= -17 \\ 14x - y + 4z &= 19 \end{aligned}$$

zu bestimmen.

(i) Zeigen Sie: Die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Nach einer geeigneten Vertauschung der Gleichungen läßt sich das so entstandene lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

näherungsweise mit dem Gesamtschrittverfahren lösen.
Geben Sie $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ an.

(iii) Sei $\boldsymbol{D}$ die Diagonalmatrix mit denselben Diagonalelementen wie $\boldsymbol{A}$ und

$$\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})$$

die Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens.
Berechnen Sie $\boldsymbol{J}$.

(iv) Für eine beliebige quadratische $nxn-$Matrix $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist die Zeilensummennorm definiert:

$$\|\boldsymbol{B}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,n} |b_{ij}| .$$

Zeigen Sie, daß die Matrix $\boldsymbol{J}$ das Zeilensummenkriterium erfüllt:

$$\|\boldsymbol{J}\|_\infty < 1$$

Zur Erinnerung: Das Zeilensummenkriterium ist hinreichend für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens.

(v) Stellen Sie die Iterationsschrift des Gesamtschrittverfahrens

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}^{(n)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

auf.
Wählen Sie den Startvektor

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie das Element $\boldsymbol{x}^{(1)}$ der Iterationsfolge.

(vi) Wählen Sie für die Vektoren $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ des $\boldsymbol{R}^3$ die Maximumnorm

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,3} |x_i|$$

Sei $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^3$ die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems. Die a-priori-Fehlerabschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes erlaubt es, bereits nach einer Iteration abzuschätzen wie viele Iterationen mindestens notwendig sind, um $\boldsymbol{x}^*$ bis auf eine vorgegebene Genauigkeit zu approximieren:

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^*\right\|_\infty \leq \frac{\|\boldsymbol{J}\|_\infty^n}{1 - \|\boldsymbol{J}\|\infty} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty .$$

Sie sollen nun $\boldsymbol{x}^*$ in der Matrixnorm bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-2} nähern. Schließen Sie mit der a-priori-Abschätzung auf die Zahl der Iterationen, die mindestens notwendig sind, um diese Genauigkeit zu erreichen.

(vii) Führen Sie so viele Iterationen des Gesamtschrittverfahrens durch, bis der Iterationsvektor $\boldsymbol{x}^{(n)}$ die exakte Lösung $\boldsymbol{x}^*$ in der Matrixnorm bis auf einen Fehler von 10^{-2} nähert.
Geben Sie die Elemente der Iterationsfolge auf 4 Nachkommastellen gerundet an.

N.4.2.
Das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

mit der Matrix

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

und der rechten Seite

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

soll näherungsweise, ausgehend vom Startvektor $\boldsymbol{x} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$, mit dem Einzelschrittverfahren gelöst werden.

(i) Man weise nach, daß das Zeilensummenkriterium

$$L_\infty = \max\left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \middle| 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n} \right\} < 1$$

erfüllt ist.

(ii) Mit der a-priori-Fehlerabschätzung

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^* \right\|_\infty \leq \frac{L_\infty^k}{1 - L_\infty} \left\| \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} \right\|_\infty$$

bestimme man eine ausreichende Anzahl von Iterationen, so daß der Fehler

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^* \right\|_\infty < 0.5 \cdot 10^{-6} =: \varepsilon$$

gilt.

(iii) Man führe drei Iterationsschritte mit dem Einzelschrittverfahren durch.

(iv) Mit der a-posteriori-Fehlerabschätzung

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^* \right\|_\infty \leq \frac{L_\infty}{1 - L_\infty} \left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)} \right\|_\infty$$

gebe man eine Fehlerschranke für $\boldsymbol{x}^{(3)}$.

N.4.3.
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= p \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= q \\ 5x_1 + 18x_2 + ax_3 &= r \end{aligned}$$

(i) Zunächst sei $a = 0$. Überprüfen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus, ob das System für beliebige Werte von p, q, r lösbar ist und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Lösungen des Systems.

(ii) Begründen Sie, daß das lineare Gleichungssystem für $a \neq 0$ und beliebige Werte von p, q, r genau eine Lösung besitzt.

(iii) Sei

$$a = 10^{-5}, \qquad p = \frac{1}{7}, \qquad q = \frac{2}{13}, \qquad r = \frac{757}{1300}$$

Finden Sie zunächst die exakte Lösung durch rundungsfehlerfreies Rechnen mit rationalen Zahlen.

Bestimmen Sie dann numerisch eine Näherungslösung des linearen Gleichungssystems. Rechnen Sie dazu den Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotwahl mit dem Taschenrechner durch und runden Sie alle auftretenden Zahlen auf 7 Nachkommastellen.

Vergleichen Sie das numerische Ergebnis mit dem exakten. Wie erklären Sie sich den Unterschied.

N.4.4.
Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

iterativ, ausgehend vom Startvektor $x^0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$, mit dem Gesamtschrittverfahren näherungsweise zu lösen, so daß (in der Maximumnorm) der Fehler zwischen Näherungslösung und exakter Lösung $(=: x^*)$ höchstens $\varepsilon = 0.00005$ ist.

a) Man weise nach, daß für das gegebene Gleichungssystem das Zeilensummenkriterium

$$L_\infty = \max\left\{ \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right| 1 \leq i \leq n \right\} < 1$$

erfüllt ist.

b) Mit der a-priori-Fehlerabschätzung

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*} \right\|_{\infty} \le \frac{L_{\infty}^{k}}{1 - L_{\infty}} \left\| \boldsymbol{x}^{1} - \boldsymbol{x}^{0} \right\|_{\infty}$$

ermittle man eine ausreichende Anzahl k von Iterationen, so daß sich der k-te iterierte Vektor x^k von der exakten Lösung (in der Maximumnorm) um höchstens ε unterscheidet.

c) Man führe das Gesamtschrittverfahren durch und breche die Iteration ab, falls mit der a-posteriori-Fehlerabschätzung

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*} \right\|_{\infty} \le \frac{L_{\infty}}{1 - L_{\infty}} \left\| \boldsymbol{x}^{k} - \boldsymbol{x}^{k-1} \right\|_{\infty}$$

garantiert werden kann, daß die geforderte Genauigkeit erreicht ist.