Angewandte Stochastik

Dr. C.J. Luchsinger

15 Mean-Variance-Ansatz

Literatur Kapitel 15

* Uszczapowski: Kapitel 1
* Pliska: Kapitel 2.4

Der Mean Variance Ansatz im Ein-Perioden-Modell wird vorgestellt. Zuerst wird ohne risikolose Anlagemöglichkeit das optimale Verhalten entwickelt, wenn nur Varianz und Erwartungswert der Rendite des Portfolios für den Anleger relevant sind. Dann wird die risikolose Anlage mit eingebaut.

15.1 Das Umfeld

* enormer Aufschwung der Finanzmärkte in den 80er und 90er Jahren

* Massiver Einsatz schwierigster mathematischer Modelle

* Unterschiedliche Einsatz-Dauer der Modelle; einzig relevante Frage:

"Kann man damit Geld verdienen/Verluste verhindern?"

* Wissenschaftstheoretisches Problem der Wirtschaftswissenschaften und Finanzmarkttheorien:

Mathematik, Physik (?), Chemie, Biologie wird sich gleich verhalten, egal welche richtigen und vor allem falschen Theorien wir über sie aufstellen:

Theorie: Ball fliegt nach oben; Praxis: Ball fliegt nach unten!

Wirtschaft wird sich *nicht* gleich verhalten, unabhängig davon, welche richtigen und vor allem falschen Theorien wir über sie aufstellen:

Wenn eine Theorie der Wirtschaftswissenschaften besagt, dass die Aktienpreise steigen sollten, und die Theorie wird gut verkauft, dann werden die Kurse in der Tat auch eher steigen als fallen. Dies ist für die ökonomische Forschung eine methodische Schwierigkeit gewaltigen Ausmasses. Wir werden nicht weiter darauf eingehen.

Wie wird in der Ökonomie dann geforscht? Die Mathematik ist streng axiomatisch aufgebaut. Jede einzelne mathematische Aussage kann ganz genau bis auf die Axiome reduziert werden. In der Ökonomie stimmt das so nicht. Auch dort werden Axiome eingesetzt. Im Gegensatz zur Mathematik hat man aber in der Ökonomie kein Axiomensystem, auf dem *alles* aufbaut. Für Teilgebiete der Ökonomie werden hingegen Modellierungsannahmen getroffen, welche sich dann aber leider nicht zu einer gesamten, einheitlichen Ökonomie aggregieren lassen. In dem Sinne gibt es auch nicht eine allgemein akzeptierte Theorie über Finanzmärkte, sondern "nur" Modelle, welche mehr oder weniger gut wichtige (Teil-) Aspekte der Realität der Finanzmärkte beschreiben (sollten).

In Anbetracht dieser Vorbemerkungen folgt der Aufbau dieses Kapitels einem klassischen Modellierungsmuster:

* Problem formulieren in natürlicher Sprache (15.2)
* Lösungsvorschläge in natürlicher Sprache (15.3)
* Modellbildung, Annahmen (15.4)
* Berechnungen im Modell (Analyse) (15.5)
* Bemerkungen (15.6)

Damit ist aber auch gleich gesagt, weshalb diese Modelle immer ihre Gültigkeit haben werden. Sofern wir bei "Berechnungen im Modell (Analyse)" keine Rechenfehler machen, sind die Modelle als solche immerhin korrekt. Die Realität der Finanzmärkte wird sich eventuell aber derart ändern, dass das Modell, insbesondere die zu Grunde liegenden Annahmen, als weltfremd angesehen werden müssen. In dem Sinne ist es also doch möglich, dass der Ansatz, welcher jetzt gleich beschrieben wird, in 50 Jahren (eher früher) nur noch von historischem Wert ist.

Noch ein paar wichtige Bemerkungen:

Der Unterschied zwischen Theorie und Praxis ist in der Theorie kleiner als in der Praxis!

Reality is different from expected values.

Für zu viele Leute gilt: alles was sie verstehen ist praxisrelevant und was sie nicht mehr verstehen ist blosse Theorie (das ist dann bei vielen Leuten relativ viel).

15.2 Formulierung des Problems in natürlicher Sprache

Wir gehen in der folgenden Fragestellung davon aus, dass Sie Kapital zur Verfügung haben, welches Sie heute (oder in diesem Jahr) nicht benötigen. Was werden Sie damit tun? Sie werden es irgendwie anlegen. Das kann im "Sparschwein" sein oder "unter der Matraze", in Aktien oder auf einem Bankkonto und so weiter. Was für Gedanken werden Sie sich dabei machen?

1. Wie lange kann ich ganz sicher auf dieses Geld verzichten? Oder genauer: Auf welchen Teil des Geldes kann ich bis wann verzichten?
2. Wie sicher will ich mein Geld anlegen? Dabei haben Sie mehrere Arten von Risiken im Auge: Diebstahl ("unter der Matraze"), Konkurs (Aktien und Obligationen von Firmen), Schwanken von Aktienkursen, Wechselkurse können schwanken (Anlage im Ausland, in welchem Währungsbereich will ich das Geld am Schluss ausgeben?)
3. Steuerliche Aspekte
4. Umweltfreundliche Geldanlage, Berücksichtigung von Menschenrechtslage bei Geldanlage
5. viel Zins (Rendite)
6. viele weitere mehr.

15.3 Mögliche Lösungsvorschläge in natürlicher Sprache

Sie könnten Wirtschaftsberichte über Firmen in den Zeitungen lesen und mit Analysten über die zukünftigen Aktienkurse sprechen. Vielleicht haben Sie eine besondere Gabe, aus dem bisherigen Verlauf von Aktienkursen die zukünftige Entwicklung vorherzusagen (falls das zutrifft, setzen Sie sich bitte mit mir in Verbindung). Oder Sie gehen einfach zu einem Spezialisten für die Geldanlage. Aber wie wird *er* entscheiden? Sie haben eine Unmenge von möglichen Anlagen zur Verfügung. Nach was für Grundsätzen werden Sie vorgehen? Es gibt zwei extreme "Schulen":

1. Die **Fundamentalists** analysieren anhand von politischen Überlegungen, neuen wissenschaftlichen Entdeckungen und vielen weiteren Punkten, wie sich die Preise (von Aktien zum Beispiel) mit Hilfe des Zusammenspiels von Angebot und Nachfrage einpendeln werden und begründen damit ihre Investitionsentscheide.
2. Die **Chartists** dagegen schauen die bisherige Entwicklung der Kurse an und versuchen darin Gesetzmässigkeiten zu entdecken.

Es ist offensichtlich, dass es beliebig viele Überlegungen gibt, welche potentiell in solche Investitionsentscheide einfliessen könnten. Das wäre aber sehr komplex und damit mathematisch kaum handhabbar. Politische Überlegungen, so wichtig sie auch sein könnten, sind kaum mathematisch formalisierbar. Es deutet sich hier bereits an, dass mathematische Methoden wohl eher bei den "Chartists" angesiedelt sind, wenn auch bei den "Fundamentalists" das Zusammenspiel von Angebot und Nachfrage durchaus mathematisch dargestellt werden kann. Um es klar zu sagen: Es ist *nicht* so, dass der Autor nichts von den Konzepten der Fundamentalists hält - im Gegenteil. Es ist nur so, dass wir MathematikerInnen dort unser Fachwissen nicht einbringen können; im Gegensatz zu den Methoden der Chartists.

15.4 Modellbildung, Annahmen

Wir müssen uns jetzt entscheiden, welche Faktoren wir berücksichtigen wollen. Das folgende Modell ist den Ökonomen nicht vom Himmel gefallen. Wenn es jetzt aber so präsentiert wird, dann darf nicht vergessen werden, dass viele andere Modelle vorher ausprobiert wurden und wieder verschwanden, weil man damit kein Geld verdienen konnte (oder weniger als die Konkurrenz). Ein Modell, dessen Grundidee bis heute bei der Frage der Geldanlage relevant einfliesst, ist das Modell von Markovitz. Markovitz hatte 1952 ein Modell vorgeschlagen, in dem ein Investor sich an nur 2 Kennziffern orientiert, wenn er sich fragt, wie er sein Geld anlegen soll. Es sind dies die **erwartete Rendite** (Mean) und die **Varianz ebendieser Rendite** (Variance) - hiervon kommt der Name dieses Ansatzes: Mean Variance Ansatz. Die Varianz der Rendite steht nach diesem Modellansatz für das "Risiko". Markovitz erhielt 1990 den Nobelpreis für Nationalökonomie.

Wir werden zuerst definieren müssen, was eine **Rendite** überhaupt ist. Wenn Sie 200 Franken auf der Bank anlegen, werden Sie nach einem Jahr mehr als 200 Franken auf dem Konto haben, vielleicht 204 Franken. Bekanntlich sind dann die 4 Franken der Zins. Allgemein definieren wir:

Definition 15.1 [Rendite] *Sei S_n^i der Wert einer Geldanlage i zur Zeit n. Dann definieren wir die Rendite der Anlage i (von Periode n zu $(n+1)$) als:*

$$R_{n+1}^i := \frac{S_{n+1}^i - S_n^i}{S_n^i}.$$

Im obigen Beispiel mit der Bank haben wir die Rendite (=Zins) also folgendermassen berechnet: (204-200)/200=0.02. Die Rendite war 2 % oder eben diese 4 Franken (=2 % von 200) im konkreten Beispiel. Renditen können negativ sein.

Das Mean-Variance Modell von Markovitz macht folgende Annahmen: Es existieren d risikobehaftete Anlagenmöglichkeiten (mit "risikobehaftet" meinen wir, dass zukünftige Preise uns nicht bekannt sind, Varianzen > 0). Dies können Aktien, Obligationen, Liegenschaften und so weiter sein. Der Preis von Anlage $i, 1 \leq i \leq d$, in der handelsüblichen Form (1 Aktie) sei S_n^i zur Zeit n, $0 \leq n \leq N < \infty$. Wir werden in diesem Kapitel nur eine Periode betrachten, womit $n \in \{0, 1\}$ sein wird.

Der Preis von Gut i zur Zeit 0 ist somit S_0^i und zur Zeit 1 ist er S_1^i. Wir gehen davon aus, dass wir alle Preise zur Zeit 0 kennen. Die Preise zur Zeit 1 seien uns unbekannt. Wir modellieren sie mit nichtnegativen Zufallsgrössen. Wir können auch hier von allen Anlagen die Renditen angeben: Wir definieren dazu einen Vektor $R = (R_1, \ldots, R_d)^T$ der Renditen derart, dass

$$R_i := \frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}.$$

Da wir nur eine Periode betrachten, entfällt der Index für die Zeit; wir haben dafür den Index i, welcher die Anlage bezeichnet, unten angebracht. Die Renditen sind auch Zufallsgrössen. Wir setzen hier voraus, dass $E[R_i^2] < \infty \ \forall \ 1 \leq i \leq d$. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsgrössen sei uns bekannt; insbesondere kennen wir damit die Kovarianzen aller Zufallsgrössen miteinander. Wir definieren weiter die erwarteten Renditen $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_d)^T$ und Varianzen der Renditen $\sigma^2 := (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_d^2)^T$ folgendermassen: $\mu_i := E[R_i]$ und $\sigma_i^2 := V[R_i]$. Wir haben weiter oben von den Kovarianzen gesprochen. Wir definieren $\sigma_{ij} := Cov(R_i, R_j)$. Die Kovarianzstruktur unserer Renditen legen wir in der Kovarianzmatrix Σ derart ab, dass gilt: $\Sigma_{ii} := \sigma_i^2$ und $\Sigma_{ij} := \sigma_{ij}$. Wir fordern hier, dass die Matrix Σ positiv definit ist. Damit folgt (kleine, freiwillige Übung), dass

1. alle d Anlagemöglichkeiten damit risikobehaftet sein müssen (also $Var[R_i] > 0$ für alle i).

2. keine Rendite eine Linearkombination der anderen Renditen sein darf.

Wegen der zweiten Schlussfolgerung sind insbesondere Anlagefonds als Anlage ausgeschlossen. Will man einen Anlagefond mit einbeziehen, so bilden wir ihn einfach selber nach!

Normal ist übrigens (leider!), dass diese Renditen meist stark positiv korreliert sind.

Wir führen bereits jetzt die sogenannte "risikolose" Anlage (das Bankkonto) S^0 ein. Sie wird ohne Risiko (Varianz=0) eine sichere Rendite von r abwerfen. Im ersten Teil werden wir diese Anlage ausschliessen.

Die Struktur des Marktes kann also graphisch folgendermassen dargestellt werden:

Wir haben 1 Geldeinheit zur Verfügung, welche wir anlegen wollen. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass wir beliebig kleine Einheiten von Anlage i, $1 \leq i \leq d$, kaufen können (stellen Sie sich einfach vor, bei der Geldeinheit handelt es sich um eine Milliarde Schweizerfranken); des weiteren nehmen wir an, dass keine Steuern oder Transaktionskosten anfallen (the market is "frictionless"). Wenn wir eine Geldeinheit anlegen wollen, werden wir einen Anteil von a_i in Anlagemöglichkeit i investieren. Den Vektor $a := (a_1, \ldots, a_d)$ nennen wir unser Portfolio. Wir fordern, dass $\sum_{l=1}^{d} a_l = 1$.

Wir fordern *nicht*, dass $a_i \geq 0$: Wenn wir unser Geld derart anlegen, dass ein i existiert, sodass $a_i < 0$, so sagt man, dass wir einen "Leerverkauf" getätigt haben, oder dass wir Anlage i "short" sind. Wieso ist so etwas möglich (es sei unterstrichen, dass es die heutige Finanzmathematik in dieser Form ohne solche Mechanismen gar nicht geben könnte)? Man stelle sich dazu vor, dass ein Bankkunde der Bank Aktien anvertraut. Sie gehören dem Kunden der Bank (die Bank übt eventuell aber an der GV der AG das Stimmrecht aus). Wenn der Kurs der Aktie steigt, so hat der Kunde den Gewinn daraus, wenn er die Aktie dann verkauft. Die Bank kann aber die Aktie zwischendurch verkaufen. Wenn der Kunde die Aktie später selber haben will oder verkaufen will, so muss die Bank die Aktie zum aktuellen Preis am Markt zurückkaufen. Ist der Preis der Aktie gestiegen, so hat die Bank dabei einen Verlust gemacht. Die Rendite der Bank bei diesem Geschäft ist dabei exakt das Negative der Rendite, welche der Bankkunde hat. Die Bank hat die Aktie dabei verkauft, obschon sie gar nie selber im Besitz der Aktie war. Dies kann man als Bank machen, wenn man vielleicht einen Fall der Aktie erwartet, oder weil andere Bankgeschäfte ein solches Geschäft als durchaus sinnvoll erscheinen lassen. Ein Normalbürger darf so etwas nicht einfach machen - grossen Banken ist dies bis zu einem gewissen Limit erlaubt.

Wir konzentrieren uns wie oben angekündigt in diesem Modell auf nur 2 Kennziffern: die erwartete Rendite und die Varianz ebendieser Rendite. Wir wollen natürlich eine möglichst hohe Rendite und eine möglichst kleine Varianz unserer gesamten Geldanlage haben. Wir haben damit wieder eine Annahme gemacht; nämlich, dass sich Personen bei Anlageentscheiden sogenannt "risiko*avers*" verhalten: Bei gleicher erwarteter Rendite werden Sie diejenige Anlagemöglichkeit wählen, welche die kleinere Varianz besitzt - ebenso wird man bei gegebener Varianz diejenige Anlagemöglichkeit wählen, welche die höchste erwartete Rendite erzielt.

Wir müssen uns jetzt darüber unterhalten, was denn die erwartete Rendite und die Varianz der gesamten Geldanlage, des Portfolios, ist. Wir *definieren* die Rendite R des Portfolios a als mit den a_i gewichtetes Mittel der Renditen R_i der einzelnen Anlagemöglichkeiten:

$$R(a) = \sum_{i=1}^{d} a_i R_i, \qquad \text{(Rendite des Portfolios)}$$

Man kann auch nachrechnen, dass diese Definition durchaus dem entspricht, was wir unter der Rendite des gesamten Portfolios verstehen wollen.

Lemma 15.2 [Rendite und Varianz eines Portfeuilles] *Mit obigen Bezeichnungen gelten für die erwartete Rendite m und die Varianz σ^2 der gesamten Geldanlage (wir investieren einen Betrag a_i in Anlage i für $1 \leq i \leq d$) folgende Formeln:*
a) $m = a^T \mu$ und
b) $\sigma^2 = a^T \Sigma a$.

Beweis von Lemma 15.2

a) ist in der Stunde zu lösen:

b)

$$\sigma^2 := V[R(a)] = E[(R(a) - E[R(a)])^2] = E[(\sum_{l=1}^{d} a_l(R_l - \mu_l))^2]$$
$$= E[\sum_{l=1}^{d}\sum_{v=1}^{d} a_l a_v (R_l - \mu_l)(R_v - \mu_v)] = \sum_{l=1}^{d}\sum_{v=1}^{d} a_l a_v E[(R_l - \mu_l)(R_v - \mu_v)]$$
$$= \sum_{l=1}^{d}\sum_{v=1}^{d} a_l a_v \sigma_{lv} = a^T \Sigma a.$$

□

Aussage a) lässt sich intuitiv nachvollziehen: wir haben ein gewichtetes Mittel. Wenn wir einen Anteil von 0.4 unseres Kapital in eine Anlage mit erwarteter Rendite von 10 % investieren und 0.6 in eine Anlage mit 8 %, so wird die erwartete Rendite unseres Portfolios der beiden Anlagen (4+4.8)=8.8 Prozent sein. Die Formel für die Varianz ist schwieriger zu fassen.

Das zentrale Problem, welches wir im Folgenden lösen werden, ist folgendes: Welches Portfolio werden wir zusammenstellen um entweder bei gegebener erwarteter Rendite (m) die Varianz (σ^2) zu minimieren oder um bei vorgegebener Varianz (σ^2) die erwartete Rendite (m) zu maximieren?

15.5 Berechnungen im Modell (Analyse)

Wir werden uns in diesem Kapitel nicht mehr weiter bei jedem Schritt fragen, wie realistisch die Annahmen waren und was dieses und jenes in der Realität bedeutet. Das kommt dann in 15.6.

15.5.1 Ohne risikolose Anlage S^0

Wir werden zuerst die obige Problemstellung ("Maximierung der Rendite, Minimierung des Risikos") formalisieren. Dazu führen wir die beiden Begriffe "Effizientes Portfolio" und "Grenzportfolio" ein:

Definition 15.3 [Effizientes Portfolio, Grenzportfolio] *Ein Portfolio a^* heisst effizient, wenn kein Portfolio $\hat{a}$ existiert, so dass*

$$E[R(a^*)] \leq E[R(\hat{a})]$$

und

$$V[R(a^*)] > V[R(\hat{a})].$$

Ein Portfolio a^* heisst Grenzportfolio, wenn kein Portfolio $\hat{a}$ existiert, so dass

$$E[R(a^*)] = E[R(\hat{a})]$$

und

$$V[R(a^*)] > V[R(\hat{a})].$$

Ein effizientes Portfolio ist somit immer auch ein Grenzportfolio; die Umkehrung gilt nicht! Wir werden versuchen, die Menge der Grenzportfolios zu finden. Dazu müssen wir folgendes Optimierungsproblem lösen:

Erstes Optimierungsproblem [ohne risikolose Anlage S^0] *Finde a, so dass $\sigma^2 := V(R(a))$ minimiert wird und folgende Nebenbedingungen eingehalten werden:*

1. $a^T\mathbf{1} = 1$
2. $a^T\mu = m$ *(=konstant, gegeben!)*

Wir setzen zudem voraus, dass $d > 2$ und μ kein Vielfaches von $\mathbf{1}$ ist (unrealistisch). Diese Optimierungsaufgabe ist als Übung dem/der Leser/in überlassen. Man erhält dann für das Portfolio a folgenden Ausdruck:

$$a = \frac{C - Bm}{D}\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \frac{Am - B}{D}\Sigma^{-1}\mu, \tag{15.1}$$

wenn wir definieren: $A := \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$, $B := \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mu$, $C := \mu^T\Sigma^{-1}\mu$ und $D := AC - B^2$. Man kann auch zeigen, dass A, C, D alle positiv sind. Wir müssen noch überprüfen, ob es sich dabei tatsächlich um Grenzportfolios handelt; die Optimierung liefert nur einen *Kandidaten* für ein Optimum. Dazu drücken wir σ^2 als Funktion von m aus:

$$\sigma^2 = a^T\Sigma a = \frac{C - Bm}{D} + \frac{Am - B}{D}m.$$

Dies kann derart umgeformt werden, dass man sieht, dass dies die Gleichung für eine *Parabel* ist:

$$\sigma^2 = \frac{A}{D}(m - \frac{B}{A})^2 + \frac{1}{A}.$$

Der Scheitelpunkt ist $(m, \sigma^2) = (\frac{B}{A}, \frac{1}{A})$. In der (σ, μ)-Ebene haben wir mit der Gleichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{A}{D}(m - \frac{B}{A})^2 + \frac{1}{A}}$$

eine *Hyperbel*.

Wir sehen jetzt, dass wir in der Tat die Grenzportfolios gefunden haben. Wir haben pro m immer nur einen Kandidaten gefunden; zudem kann die Varianz nie kleiner als Null werden und andererseits beliebig gross. Die effizienten Portfolios sind diejenigen mit $m \geq \frac{B}{A}$.

Gleichzeitig haben wir sofort ein ganz spezielles, sogenanntes "Global Minimum Variance Portfolio" a_{min} erhalten: es ist dasjenige im Scheitelpunkt: $m = B/A$ und $\sigma^2 = 1/A$. Wenn wir dies in (15.1) einsetzen, erhalten wir

$$a_{min} = \frac{1}{A}\Sigma^{-1}\mathbf{1} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1^T}\Sigma^{-1}\mathbf{1}}.$$

15.5.2 Mit risikoloser Anlage S^0

Wir haben bereits am Anfang bei der Modellbildung die sogenannte "risikolose" Anlage S^0 eingeführt. Diese generiert uns eine sichere Rendite von $R_0 := r > 0$. Wir erlauben in diesem Teil auch Investitionen ("Long" und "Short") in diese risikolose Anlage; zudem sei auch der Kreditzins gleich r. Wir fügen unserem Portfolio a noch eine nullte Komponente hinzu: $p := (1 - \alpha, a)$. α ist dann der Anteil des Vermögens, welcher in risikobehaftete Anlagen investiert wird. Jetzt muss $\mathbf{1}^T a = \alpha$ erfüllt sein, damit unser gesamtes Portfolio p auf 1 summiert. Für die Rendite haben wir jetzt die Formel

$$R(p) = (1 - \alpha)r + \sum_{l=1}^{d} a_l R_l.$$

Die erwartete Rendite ist jetzt gleich

$$m := E[R(p)] = r + (\mu^T a - r\mathbf{1}^T a)$$

und die Varianz ebendieser Rendite ist

$$\sigma^2 := V(R(p)) = a^T \Sigma a,$$

da die risikolose Anlage keinen Beitrag zur Varianz leistet. Wir wollen auch hier wieder die effizienten Portfolios finden und suchen deshalb zuerst nach den Grenzportfolios:

Zweites Optimierungsproblem [mit risikoloser Anlage S^0] *Finde a, so dass $\sigma^2 := V(R(p))$ minimiert wird und folgende Nebenbedingung eingehalten wird:*

$a^T \mu - r\mathbf{1}^T a + r = m$ *(=konstant, gegeben!).*

Hier muss $a^T\mathbf{1}$ nicht gleich 1 sein. Die Lösung ist einfacher als beim ersten Optimierungsproblem und wird hier nicht ausgeführt. Man erhält mit den Bezeichnungen von vorhin für A, B, C, D den Ausdruck

$$a = \frac{m - r}{C - 2rB + r^2 A}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}). \tag{15.2}$$

Da $a^T\mathbf{1} = \alpha$, können wir auch das gesamte Portfolio p berechnen. Wir wollen auch hier den Zusammenhang zwischen m und σ bestimmen. Einfache Rechnungen führen in der (m, σ^2)-Ebene zu folgender Parabel:

$$\sigma^2 = \frac{(m - r)^2}{C - 2rB + r^2 A}.$$

Wir wollen wieder diesen Zusammenhang auch in der (m, σ)-Ebene darstellen. Im Gegensatz zum Teil ohne risikolose Anlage erhalten wir keine Hyperbel sondern eine (zwei) Geradengleichung:

$$\sigma = \Big|\frac{1}{\sqrt{C - 2rB + r^2 A}}(m - r)\Big|.$$

Dies sind die Grenzportfolios; die effizienten Portfolios sind diejenigen auf dem oberen Ast. Diesen oberen Ast nennt man auch die **"efficient-market-line"**.

In der Tat gilt hier wenn $m = r$, dass dann die Varianz Null ist. Das muss ja auch so sein, denn wenn man Gleichung (15.2) anschaut, sieht man sofort, dass man dann gar nicht in die risikobehafteten Anlagen investiert.

Wenn wir die Anlagemöglichkeiten vergrössern (d vergrössern oder nur schon die risikolose Anlage mit einbeziehen), so sind wir (was unsere Problemstellung anbelangt) mindestens in einer gleich guten Situation wie vorher. Falls uns die Anlagemöglichkeit nicht "passt", so werden wir einfach nicht in sie investieren. Also muss die Menge der möglichen Portfolios in der (m, σ)-Ebene immer grösser werden, je mehr Anlagemöglichkeiten wir zur Verfügung haben. Wenn wir m fix vorgeben, so werden wir also das Risiko immer weiter reduzieren können, wenn wir mehr Anlagemöglichkeiten berücksichtigen. Diesen Vorgang nennt man "Diversifizieren". Das Risiko wird aber nicht bis auf Null reduziert werden können, ausser $m = r$. Der Teil des Risikos, welchen wir nie wegdiversifizieren können nennt man das systematische Risiko. Der Teil, welcher wegdiversifiziert werden kann heisst "unsystematisches

Risiko". Wird d vergrössert, so muss man (bei gegebenem m) immer wieder mit Gleichung (15.1) oder (15.2) das beste Portfolio berechnen. Es kann also nicht einfach willkürlich "ein bisschen diversifiziert" werden. Die Kovarianzstruktur und die Erwartungswerte der Renditen müssen prominent berücksichtigt werden. Der Diversifikationsprozess ist aber leider in der Praxis mit Kosten verbunden (je mehr verschiedene Titel desto teurer). Man muss also einen Kompromiss machen.

Betrachten wir noch den Spezialfall, dass wir zuerst in einem Markt ohne risikolose Anlage sind. Wenn wir jetzt die risikolose Anlage einführen, so haben wir in der (m, σ^2)-Ebene also zwei Parabeln: eine für die Grenzportfolios ohne risikolose Anlage und eine für die Grenzportfolios mit risikoloser Anlage. Einen Schnittpunkt kann es nicht geben: sonst wäre die Menge der möglichen Portfolios ohne S^0 keine echte Teilmenge der möglichen Portfolios mit S^0, was wir oben ausgeschlossen haben.

Falls $r < B/A$, so gibt es hingegen ein "Tangentialportfolio". Es ist dies ein Portfolio, welches sowohl im Markt mit S^0 als auch ohne S^0 effizient ist. Diese Rechnungen werden nicht ausgeführt (Schneiden zweier Parabeln, Mittelschulstoff). Das Tangentialportfolio ist

$$a^t = \frac{1}{B - Ar}\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}).$$

Die erwartete Rendite des Tangentialportfolios ist

$$m^t := E[R(a^t)] = \frac{C - rB}{B - Ar}(> \frac{B}{A} > r)$$

und die Varianz ist

$$(\sigma^t)^2 = \frac{m^t - r}{B - Ar}.$$

Es ist klar, dass wir im Tangentialportfolio selbstverständlich nur in die risikobehafteten Anlagen investieren. Ansonsten hätten wir ja für gegebenes m^t im Modell mit S^0 zwei effiziente Portfolios. Eines mit risikolosem Anteil $\neq 0$ und eines ohne risikolosen Anteil. Die effizienten Portfolios sind aber eindeutig.

Ein Investor wird je nach Risikobereitschaft (α) einen unterschiedlichen Anteil seines Vermögens in a^t und in S^0 investieren (das haben wir nicht gezeigt, einfache Übung). Wir haben die für ihn sinnvollen Portfolios identifiziert. Für Personen mit Ökonomie-Kenntnissen: Wo wird er investieren?

15.6 Bemerkungen

1. Es wird "normalerweise" in alle Anlagen investiert, auch mit "schlechtem Erwartungswert" (Kovarianzen eventuell zur Risikominimierung gut brauchbar).

2. Ganz generell wollen wir hier festhalten, dass wir bis jetzt keine explizite Annahme über die Art der Verteilung der Rendite (Normalverteilung etc.) gemacht haben. Es ist eine besondere Stärke des Mean-Variance-Ansatzes, das keine Annahme über die Verteilung einfliesst (ausser $E[R_i^2] < \infty$).

3. Die Schätz- und Testprobleme in diesen Modellen können wir in der Kürze nicht besprechen. Ich verweise hier auf Kapitel 5, Sektion 3 von Campbell, J.Y., Lo, A.W. und MacKinlay, A.C. (1997): The "Econometrics of Financial Markets"; siehe www.math-jobs.com/lit.html. Es gibt Konferenzen, an denen man sich ausschliesslich mit Schätzmethoden für die Kovarianzmatrizen auseinandersetzt.

4. Der Mean-Variance-Ansatz ist in der Praxis zentral wichtig.

5. In der Realität sind wir mit Restriktionen konfrontiert (von Behörden oder vom globalen Risk-Management des Finanzhauses). Beispielsweise könnten
* Leerverkäufe vollständig verboten sein,
* oder man darf nur 20 % des Portfolios short sein,
* oder man darf nicht mehr als 30 % des Geldes in risikobehaftete Anlagen investieren,
* oder man darf höchstens 40 % des Geldes im Ausland anlegen.

Wenn man Portfolios unter solchen Restriktionen optimieren will, wird die Lösung nicht mehr so schön. Meist sind dann numerische Methoden von Nöten.

6. Weitere Modelle beinhalten Transaktionskosten, mehrere Perioden und Konsum am Ende der einzelnen Perioden.

15.7 Zusammenfassung

Wir haben im "reichen Markt" mit risikoloser Anlage S^0 gesehen, dass es in der (σ, m)-Ebene eine efficient market line gibt, welche die Portfolios beschreibt, die bei vorgegebener erwarteter Rendite die kleinste Varianz haben. Obschon im Prinzip gilt, dass Investoren nur dann in eine risikoreiche Anlage investieren, wenn auch die erwartete Rendite hoch ist, haben wir gesehen, dass nicht jedes Risiko vom Markt auch mit einer höheren Rendite belohnt wird. Nur das systematische Risiko wird belohnt.